画像認識

フーリエ解析

佐藤　嘉伸

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

→　日本語ページ　→　授業の資料　→　画像認識

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/lecture.html

→　画像認識

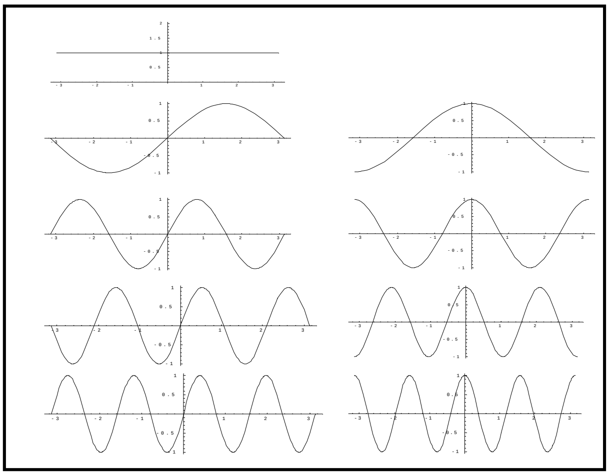
フーリエ変換の復習

平滑化処理

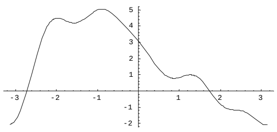
フーリエ解析

- 波形を三角関数(正弦波)に分解する。

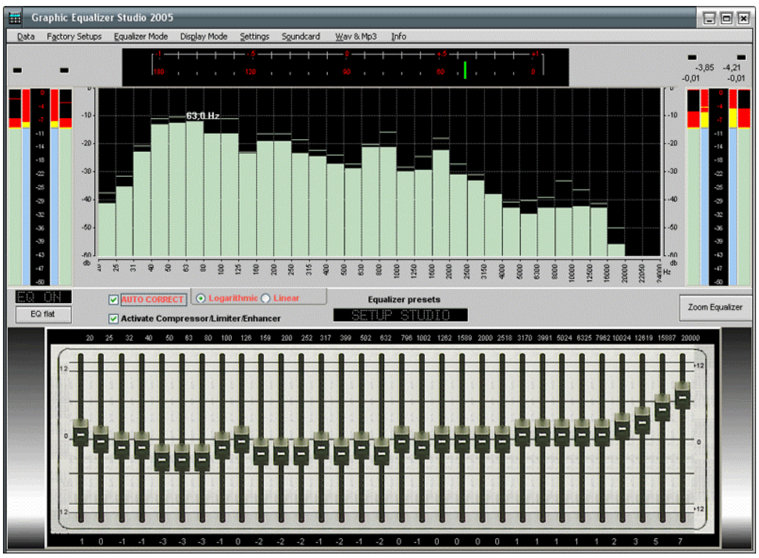
正弦波



波形



What is this?

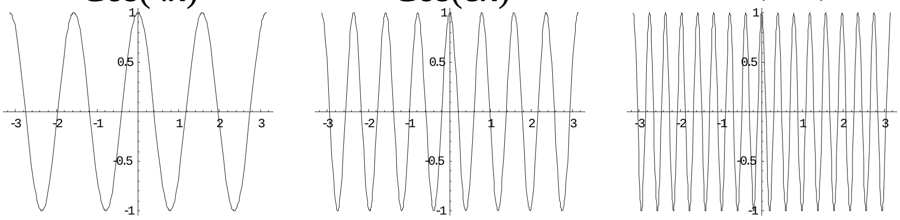


音楽の波形を考える

- 音の高さ＝周波数

低周波 → 高周波

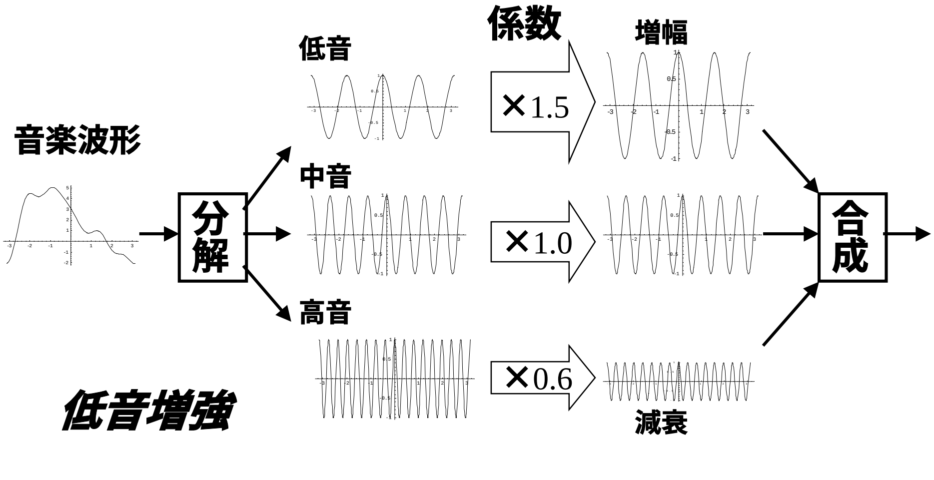
Cos(4*x*) Cos(8*x*) Cos(16*x*)



低い音 → 高い音

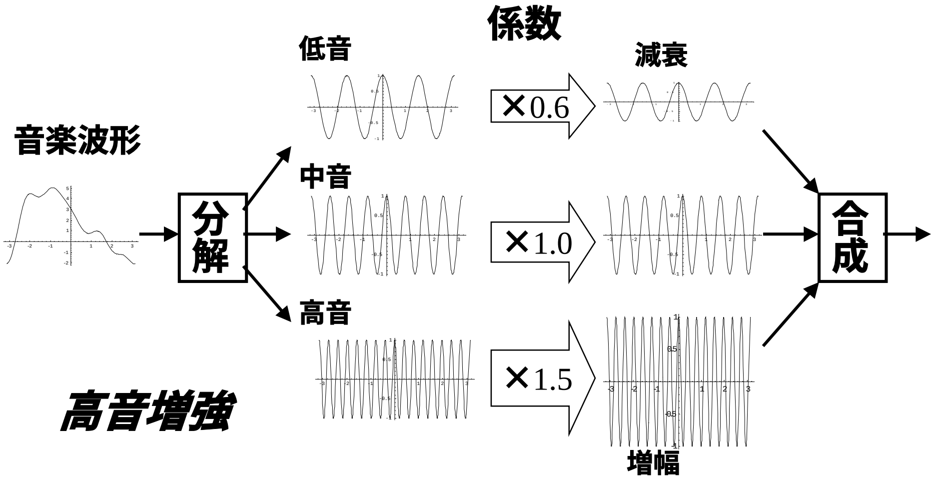
グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



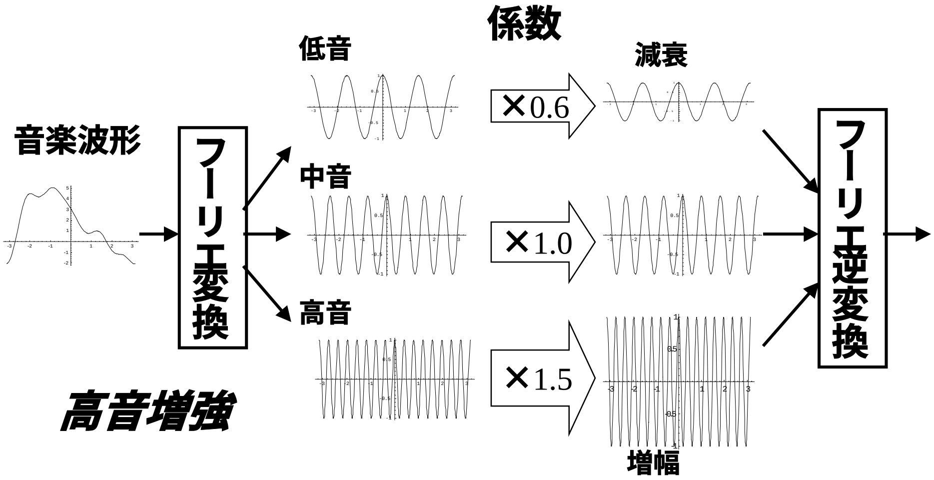
グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



グラフィックイコライザー

- グラフィックイコライザーの表示は、まさしくフーリエ変換である。
- グラフィックイコライザーは、各周波数毎に増幅（減衰）率を変えることにより、音質を変化させている。
- このような機能は、「周波数フィルタ」と呼ばれる。

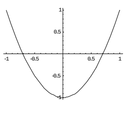
フーリエ変換

- フーリエ変換により、波形を正弦波に分解し、各周波数毎の正弦波の振幅（波の高さ）と位相（波の位置）を求めることができる。
- ただし、位相を理解するのは、やや難しいので、当面、振幅のみを考える。

周波数 ω

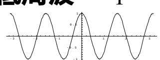
$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積

波形 $f(x)$



フーリエ変換

低周波 ω_1

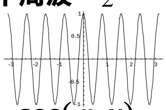


$\cos(\omega_1 x)$

振幅

$$F(\omega_1) = \int f(x)\cos(\omega_1 x)dx$$

中周波 ω_2

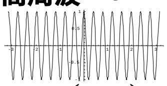


$\cos(\omega_2 x)$

振幅

$$F(\omega_2) = \int f(x)\cos(\omega_2 x)dx$$

高周波 ω_3



$\cos(\omega_3 x)$

振幅

$$F(\omega_3) = \int f(x)\cos(\omega_3 x)dx$$

内積の意味

$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積

$$F(\omega_1) = \int f(x)\cos(\omega_1 x)dx \quad \text{は、}$$

$f(x)$ から $\cos(\omega_1 x)$ の成分 $F(\omega_1)$ のみを抽出する。

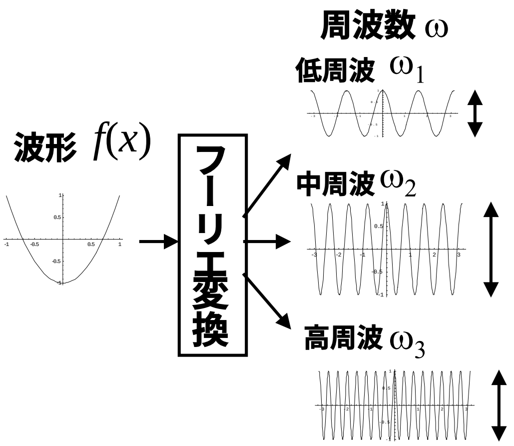
内積をとる ＝ 成分の分離

コーラと砂糖の内積 ＝ 砂糖成分の分離
コーラとカフェインの内積 ＝ カフェイン成分の分離

$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積 ＝ $\cos(\omega_1 x)$ 成分の分離

フーリエ変換

- 偶関数（原点を中心として対称な関数）のみを対称とすると、cos 成分のみを考えればよい。また、位相も考えなくて良い。

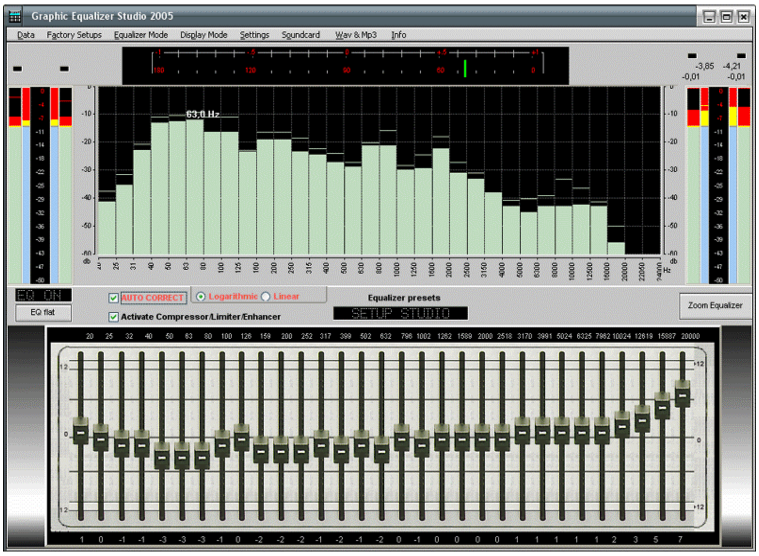


振幅

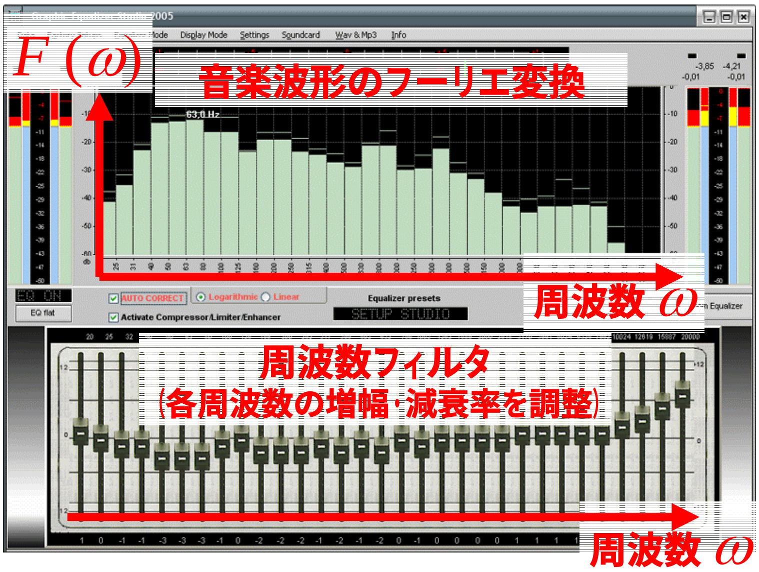
$$F(\omega) = \int f(x)\cos(\omega x)dx$$

波形の成分分析
$F(\omega)$ は ω 成分の量を表す

以下のグラフィックイコライザーで、さきほど勉強したことを確認せよ。



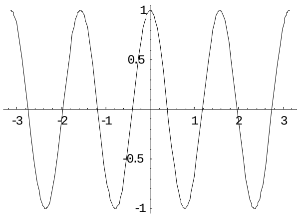
以下のグラフィックイコライザーで、さきほど勉強したことを確認せよ。



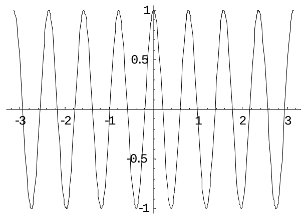
1次元フーリエ変換

フーリエ変換：1次元の波 Cos(ωx) の場合
ω: 周波数

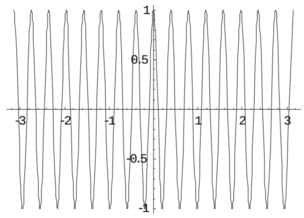
f(x) = Cos(4x)

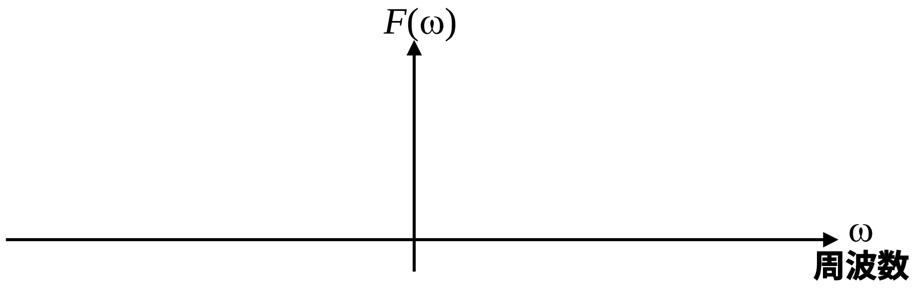


f(x) = Cos(8x)



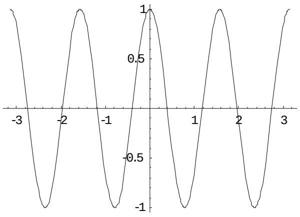
f(x) = Cos(16x)



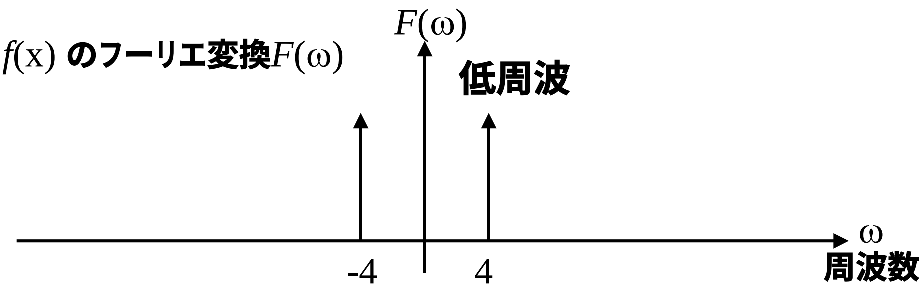


フーリエ変換：1次元の波 Cos(ω*x*) の場合
ω: 周波数

f(x) = Cos(4*x*)

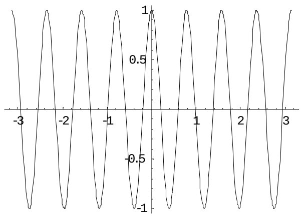


f(x) のフーリエ変換*F*(ω)

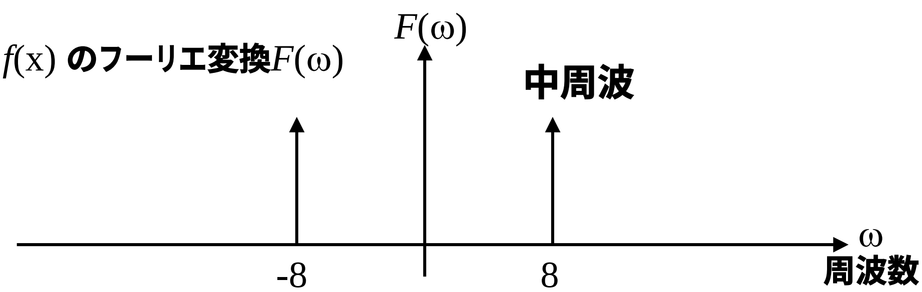


フーリエ変換：1次元の波 Cos(ω*x*) の場合
ω: 周波数

f(x) = Cos(8*x*)

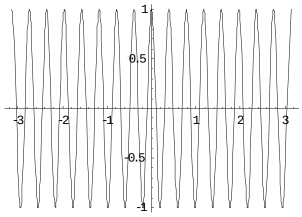


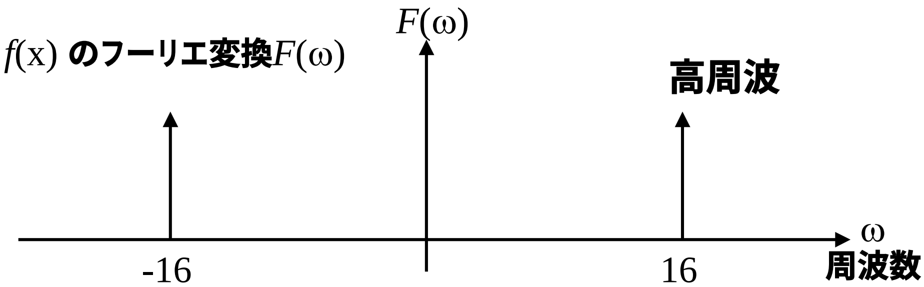
f(x) のフーリエ変換*F*(ω)



フーリエ変換：1次元の波 Cos(ωx) の場合
ω: 周波数

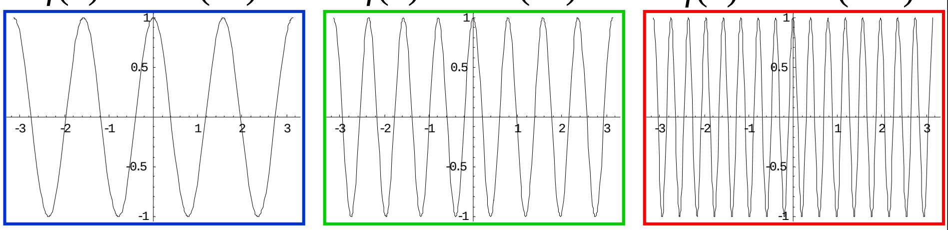
f(x) = Cos(16x)

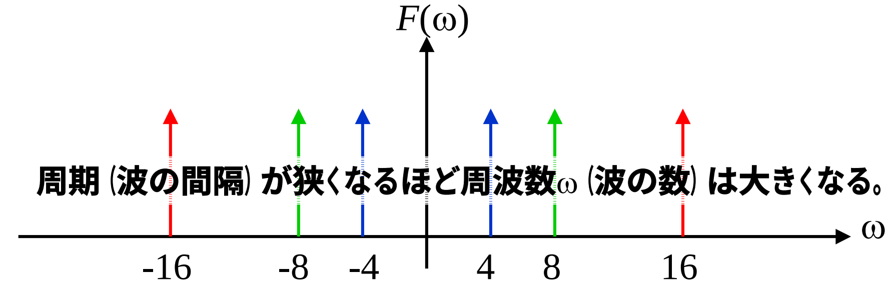




フーリエ変換：1次元の波 Cos(ωx) の場合
ω: 周波数

f(x) = Cos(4x)　　f(x) = Cos(8x)　　f(x) = Cos(16x)

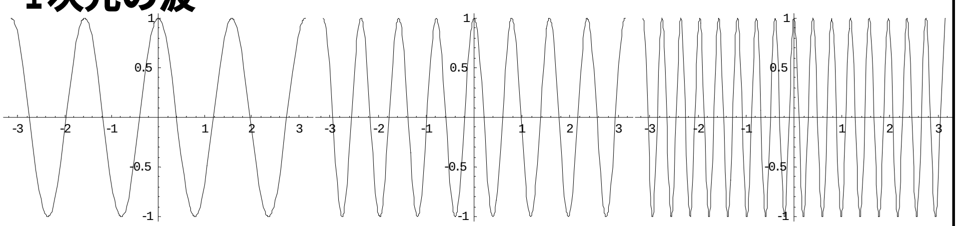




2次元への拡張

1次元の波から2次元の波へ

1次元の波

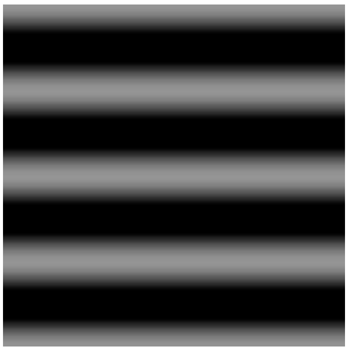


2次元の波 ＝ しま模様

2次元の波：2次元三角関数

- 2次元の波（2次元三角関数）
  ＝　様々の幅・方向の縞模様

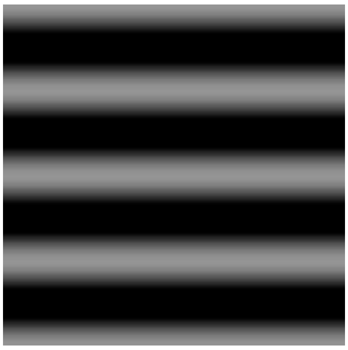
様々な間隔（周波数）

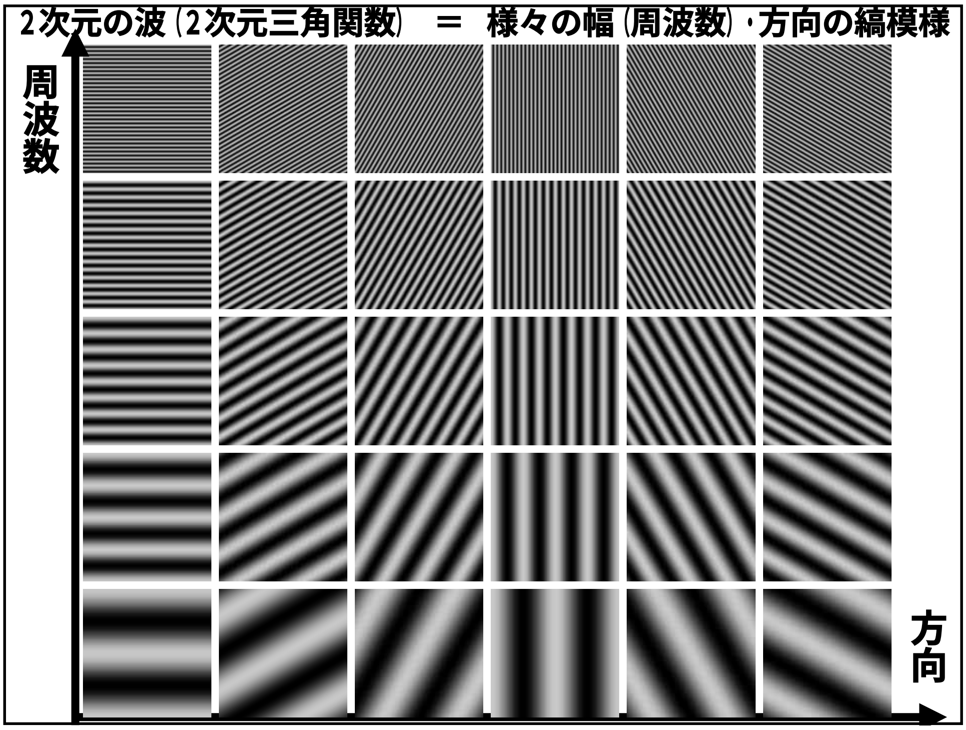


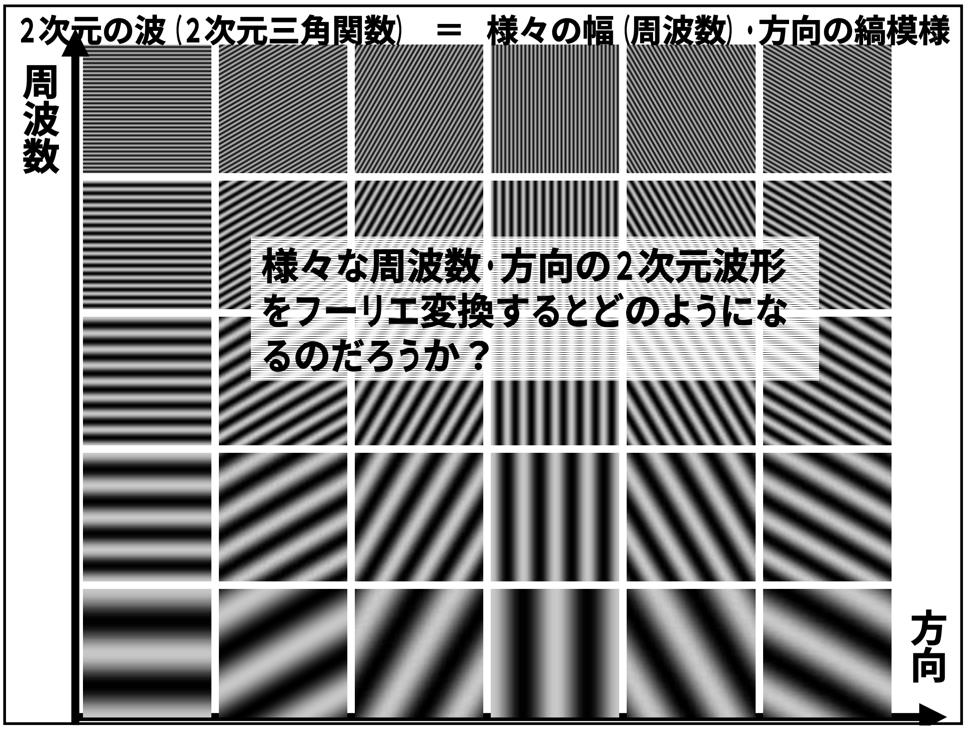
2次元の波：2次元三角関数

- 2次元の波（2次元三角関数）
  ＝　様々の幅・方向の縞模様

様々な方向




2次元の波（2次元三角関数）　＝　様々の幅（周波数）・方向の縞模様
周波数
方向


2次元の波（2次元三角関数）　＝　様々の幅（周波数）・方向の縞模様
周波数
様々な周波数・方向の2次元波形をフーリエ変換するとどのようになるのだろうか？
方向

Mathematica による2次元フーリエ変換：その1

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/
member/yoshi/ouec_lecture/image_recognition/

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/
member/yoshi/lecture.html　　画像認識をクリック

- 2次元三角関数画像 の “cos_xx_yyy.pgm” をダウンロードする。(xx はしま模様の幅、yyyはしま模様の角度を表す。)
  デスクトップにファイルを置いた場合、ファイルパスは、MACでは、
  /Users/w学籍番号/Desktop/……./bar_data0.txt
  MACでファイルパスを知る方法
  1　プルダウンメニュー　入力　－＞　ファイルパスの取得
  2　Terminal にフォルダをおく
- Mathematica でダウンロードした画像を表示する。
- Mathematica で2次元波形画像のフーリエ変換を行う。しま模様の幅と角度が変わるとフーリエ変換はどのように変わるかを確かめよ。

フーリエ変換のサンプル

2次元波形画像の入力と表示

2次元波形画像入力、画像表示、3次元表示

```
g =
Import[“d:/presen/oecu_game_lecture/cos_images/cos_04
_120.pgm”];  cos04120 = g[[1,1]];
ListDensityPlot[cos04120, Mesh->False, PlotRange->All];
ListPlot3D[cos04120, PlotRange->All];
```

2次元波形画像のフーリエ変換と表示

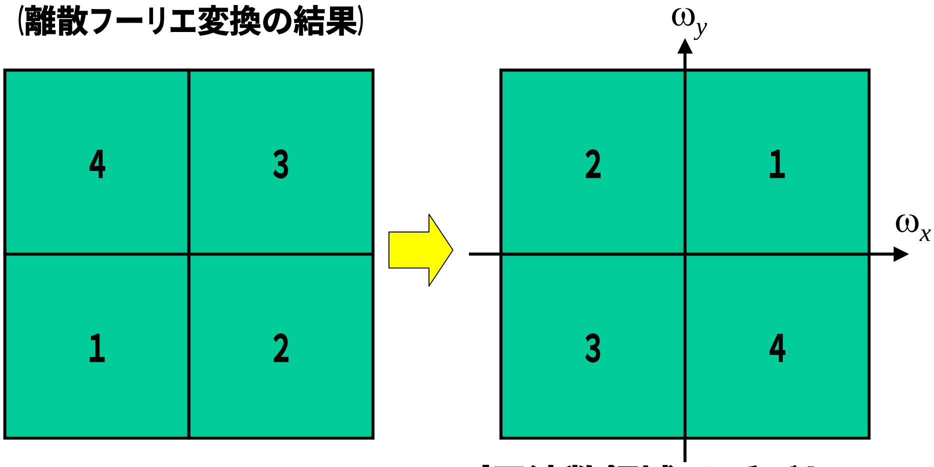
フーリエ変換、画像表示、3次元表示

```
fcos04120 = Fourier[cos04120];
ListDensityPlot[Abs[fcos04120], Mesh->False,
PlotRange->All];
ListPlot3D[Abs[fcos04120], PlotRange->All];
```

Mathematicaが出力する 2次元フーリエ変換結果の解釈

Mathematica での表示
(離散フーリエ変換の結果)

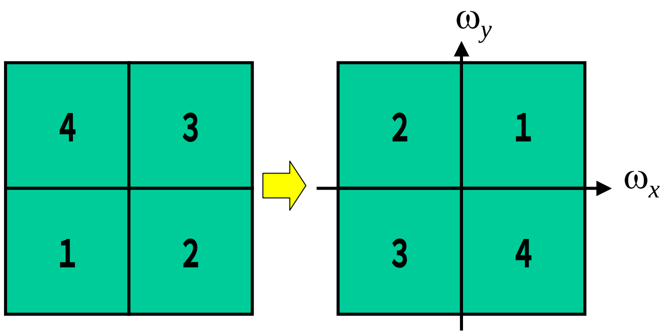
フーリエ変換の結果



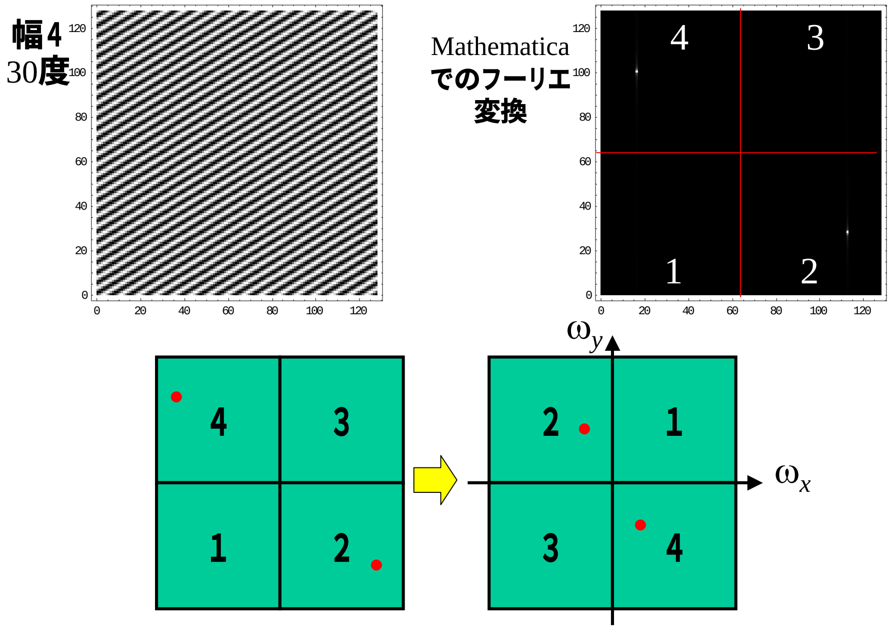
「周波数領域」と呼ばれる。

2次元フーリエ変換

- すべての2次元波形画像ファイルをダウンロード、フーリエ変換を行い、以下の右図の2次元空間（周波数領域）に、各波形の出力をプロットする。

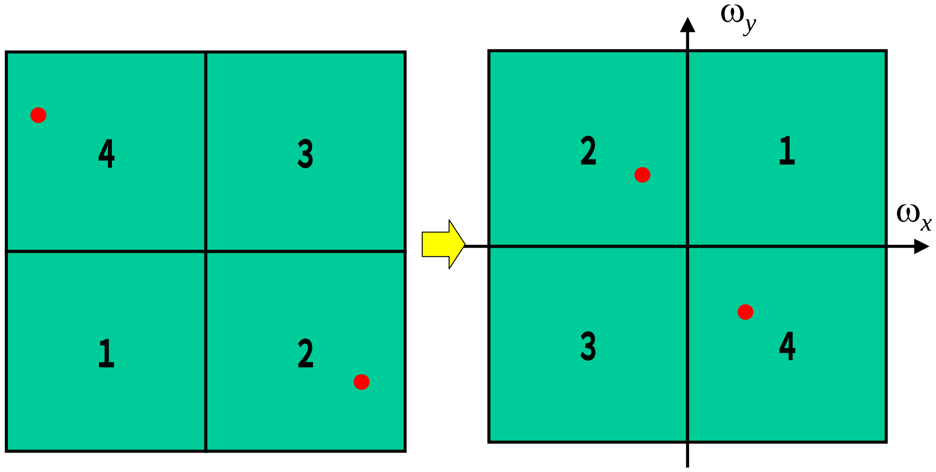


2次元波形のフーリエ変換



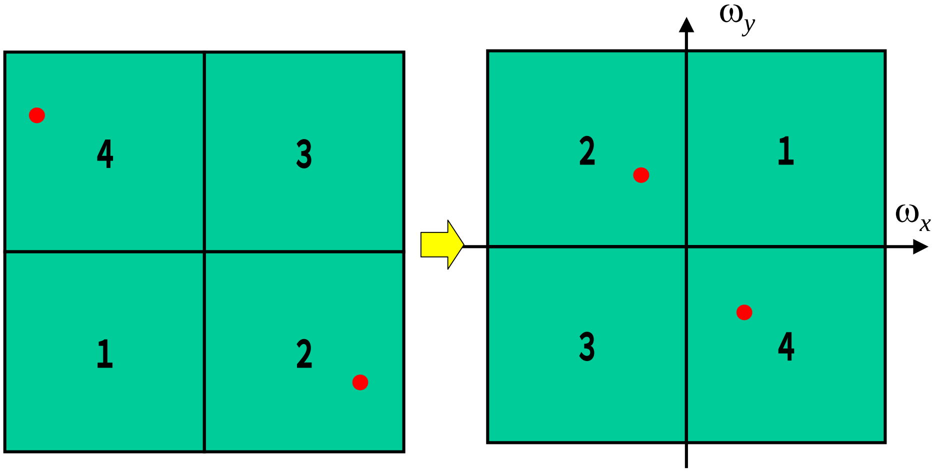
2次元フーリエ変換：演習1

ある角度を1つ選び、角度を固定して、様々な幅（周波数）の縞模様（2次元波形）に対して、出力をプロットして、2次元波形画像の幅（周波数）とそのフーリエ変換の関係はどのようになっているか？を調べよ。



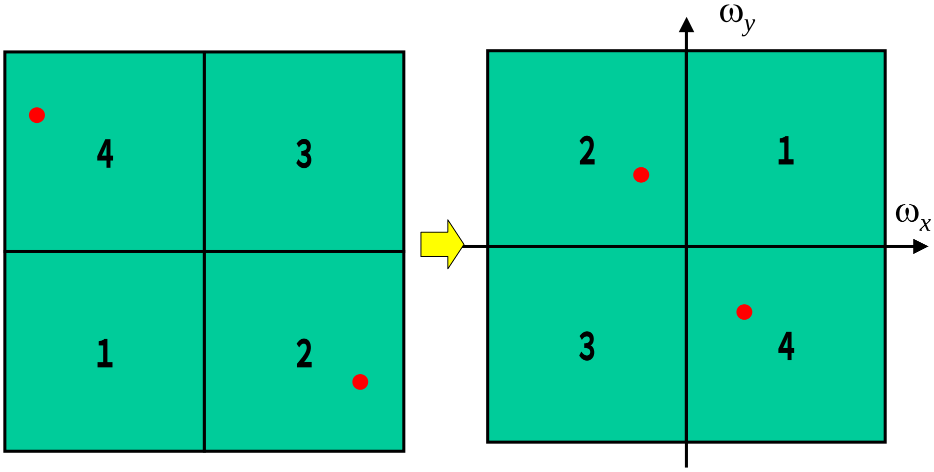
2次元フーリエ変換：演習2

ある幅（周波数）を1つ選び、幅（周波数）を固定して、様々な角度の縞模様（2次元波形）に対して、出力をプロットして、2次元波形画像の角度とそのフーリエ変換の関係はどのようになっているか？を調べよ。



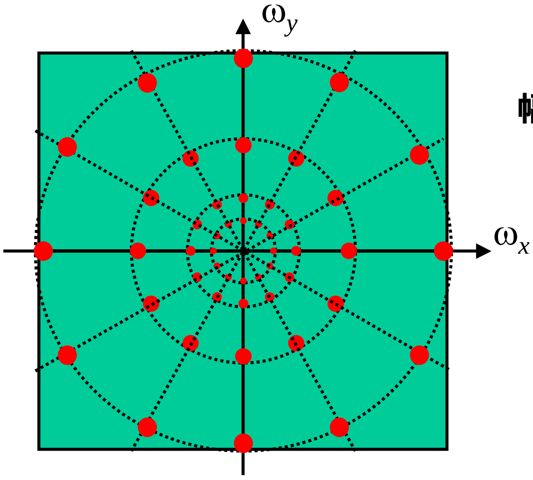
2次元フーリエ変換：演習3

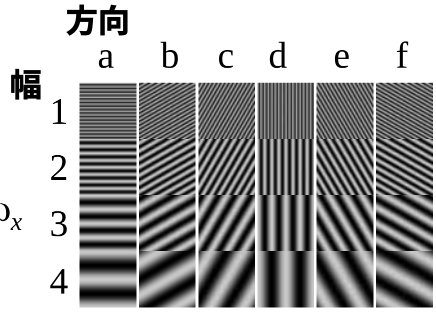
様々な幅（周波数）と角度をもつ縞模様（2次元波形）に対してのフーリエ変換において、2次元波形の周波数と角度、および、そのフーリエ変換の関係はどのようになっているか？を述べよ。



2次元フーリエ変換：演習4

様々な幅（周波数）と角度をもつ縞模様（2次元波形）に対してのフーリエ変換において、2次元波形の周波数と角度、および、そのフーリエ変換の関係はどのようになっているか？を述べよ。





上図の2次元波形のそれぞれが、左図（フーリエ変換）のどこに対応するかを示せ。

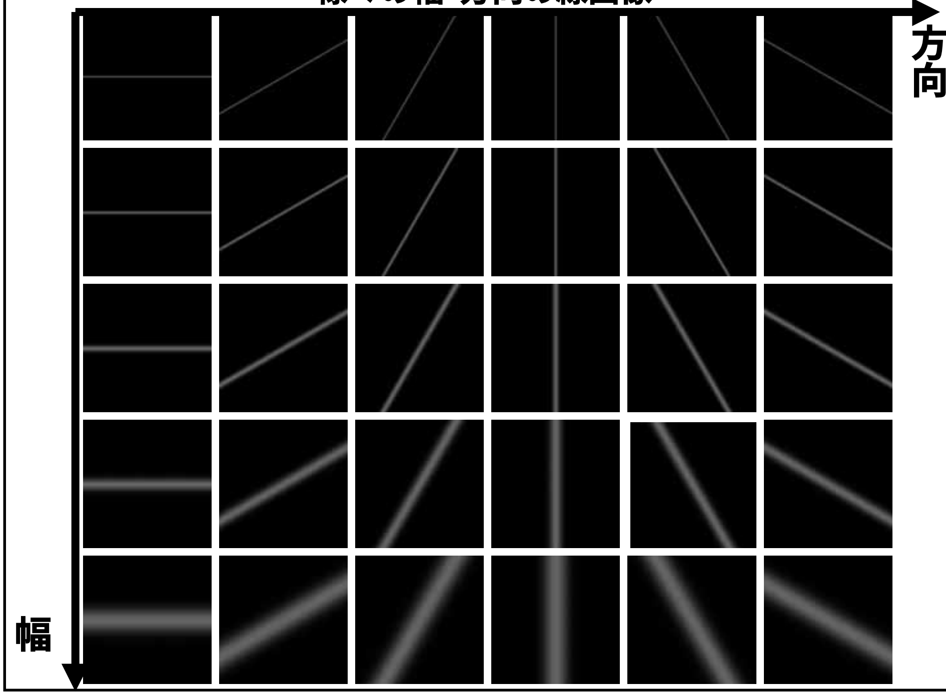
2次元フーリエ変換：まとめ

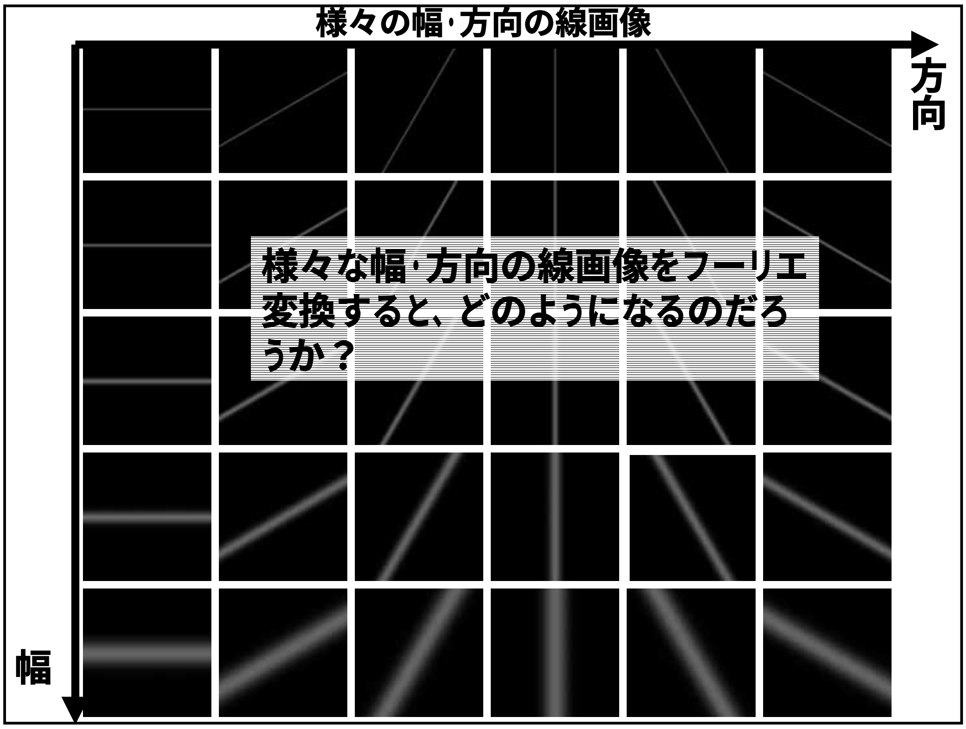
- 2次元の波（2次元三角関数）を、フーリエ変換すると、原点対称の2点になる。
- その2点の原点からの距離は、波の幅に反比例する（周波数に比例する）。
- その2点の原点からの方向は、波の方向に直交する。
- すなわち、フーリエ変換面（周波数領域）の各点は、様々な幅、方向の2次元の波（2次元三角関数）に対応する。

線画像のフーリエ変換

様々な方向、様々な幅の線画像の周波数特性

様々の幅･方向の線画像





Mathematica による2次元フーリエ変換：その2

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/
member/yoshi/ouec_lecture/image_recognition/

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/
member/yoshi/lecture.html　画像認識をクリック

- Line images (いろいろな幅･方向の線の画像) Gaussian profile (なだらかなガウス関数型プロファイル)の “gline_xx_yyy.pgm” をダウンロードする。(xx は線の幅、yyyは線の角度を表す。)
  - デスクトップにファイルを置いた場合、ファイルパスは、MACでは、
  - /Users/w学籍番号/Desktop/……./bar_data0.txt
  - MACでファイルパスを知る方法
    1. プルダウンメニュー　入力　－＞　ファイルパスの取得
    2. Terminal にフォルダをおく
- Mathematica でダウンロードした画像を表示する。
- Mathematica で線画像のフーリエ変換を行う。線の幅と角度が変わるとフーリエ変換はどのように変わるかを確かめよ。

線画像フーリエ変換のサンプル

2次元波形画像の入力と表示

2次元波形画像入力、画像表示、3次元表示

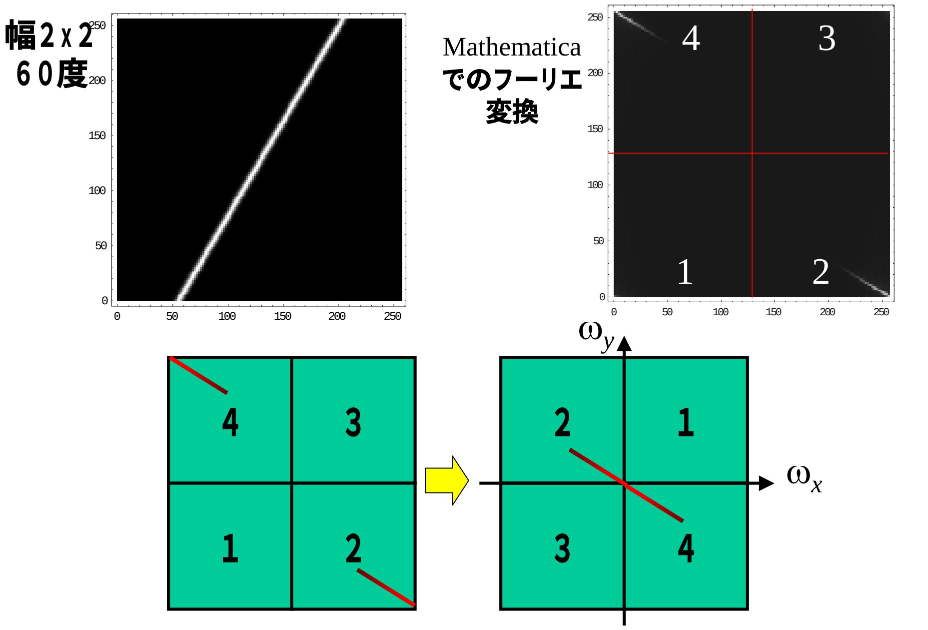
```
g =
Import[“d:/presen/oecu_game_lecture/line_images/gline_0
4_120.pgm”];  line04120 = g[[1,1]];
ListDensityPlot[line04120, Mesh->False, PlotRange->All];
ListPlot3D[line04120, PlotRange->All];
```

2次元波形画像のフーリエ変換と表示

フーリエ変換、画像表示、3次元表示

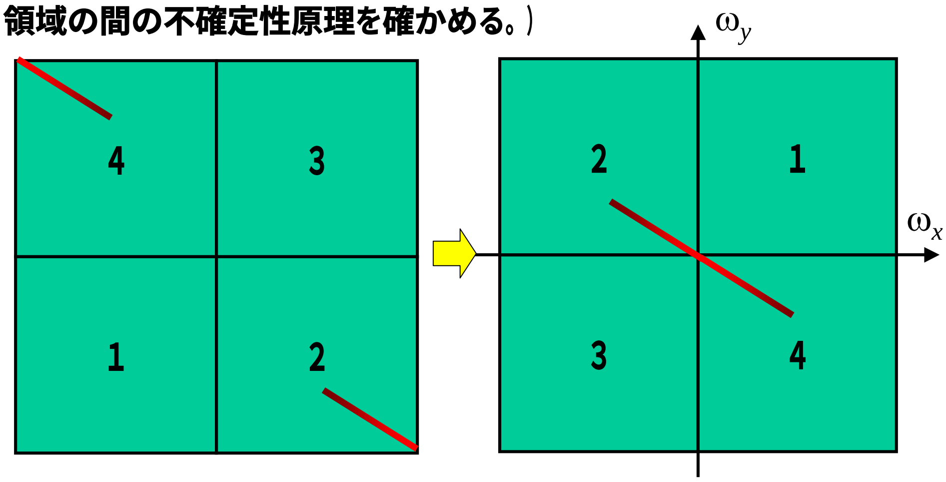
```
fline04120 = Fourier[lines04120];
ListDensityPlot[Abs[fline04120], Mesh->False,
PlotRange->All];
ListPlot3D[Abs[fline04120], PlotRange->All];
```

線画像のフーリエ変換



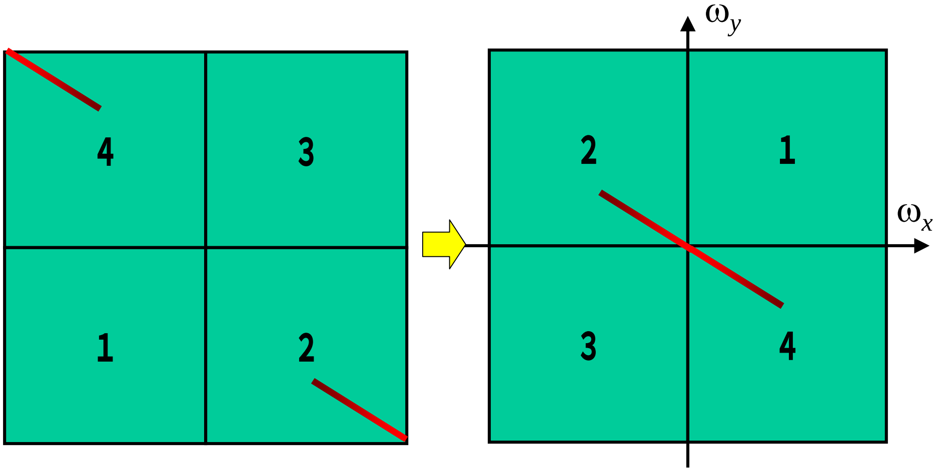
2次元フーリエ変換：演習5

ある角度を1つ選び、角度を固定して、様々な幅の線画像に対して、出力をプロットして、線画像の幅とそのフーリエ変換（周波数領域での分布）の関係はどのようになっているか？を調べよ。（空間領域と周波数領域の間の不確定性原理を確かめる。）



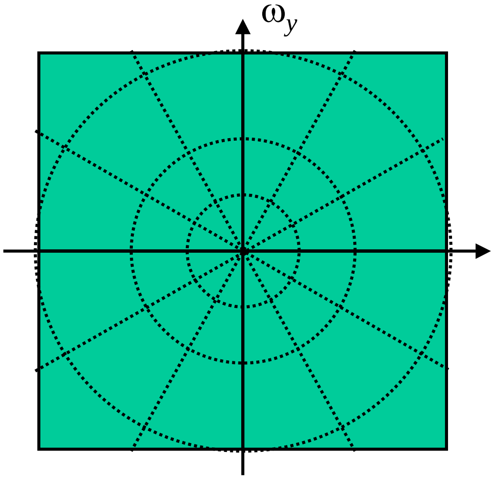
2次元フーリエ変換：演習6

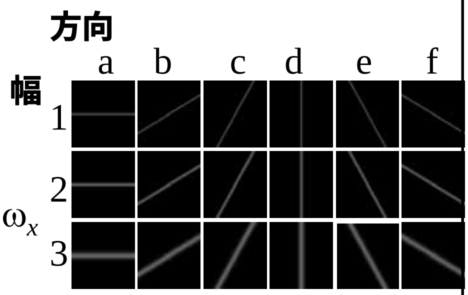
ある幅を1つ選び、幅を固定して、様々な角度の線画像に対して、出力をプロットして、線画像の角度とそのフーリエ変換（周波数領域での分布）の関係はどのようになっているか？を調べよ。



2次元フーリエ変換：演習7

様々な幅（周波数）と角度をもつ線画像のフーリエ変換（周波数分布）の対応関係を示せ。





上図の2次元線画像のいくつかに対してが、左図（周波数領域）における分布を図示せよ。