デジタル情報処理

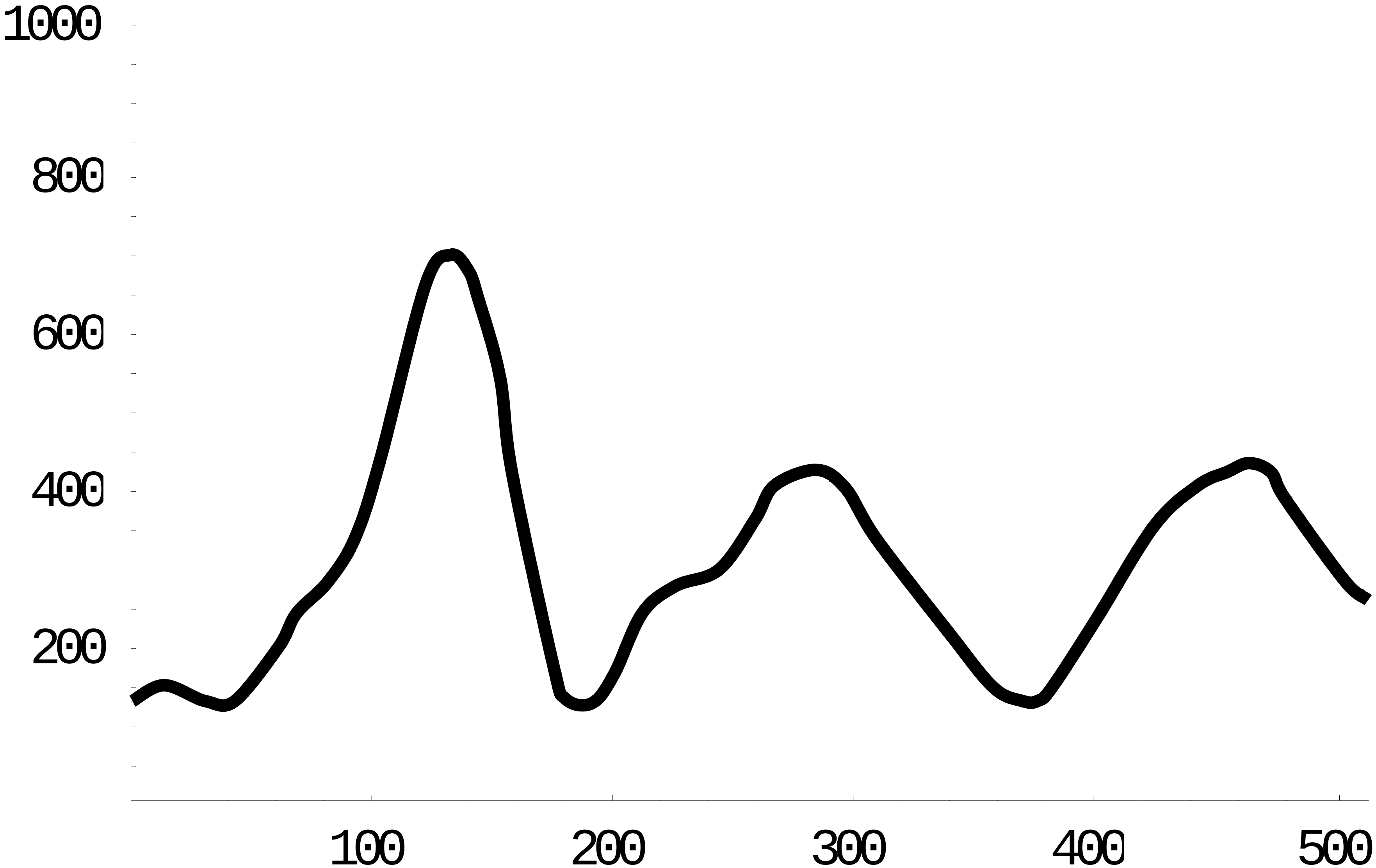
標本化定理
(サンプリング定理)
Sampling Theorem

佐藤　嘉伸

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

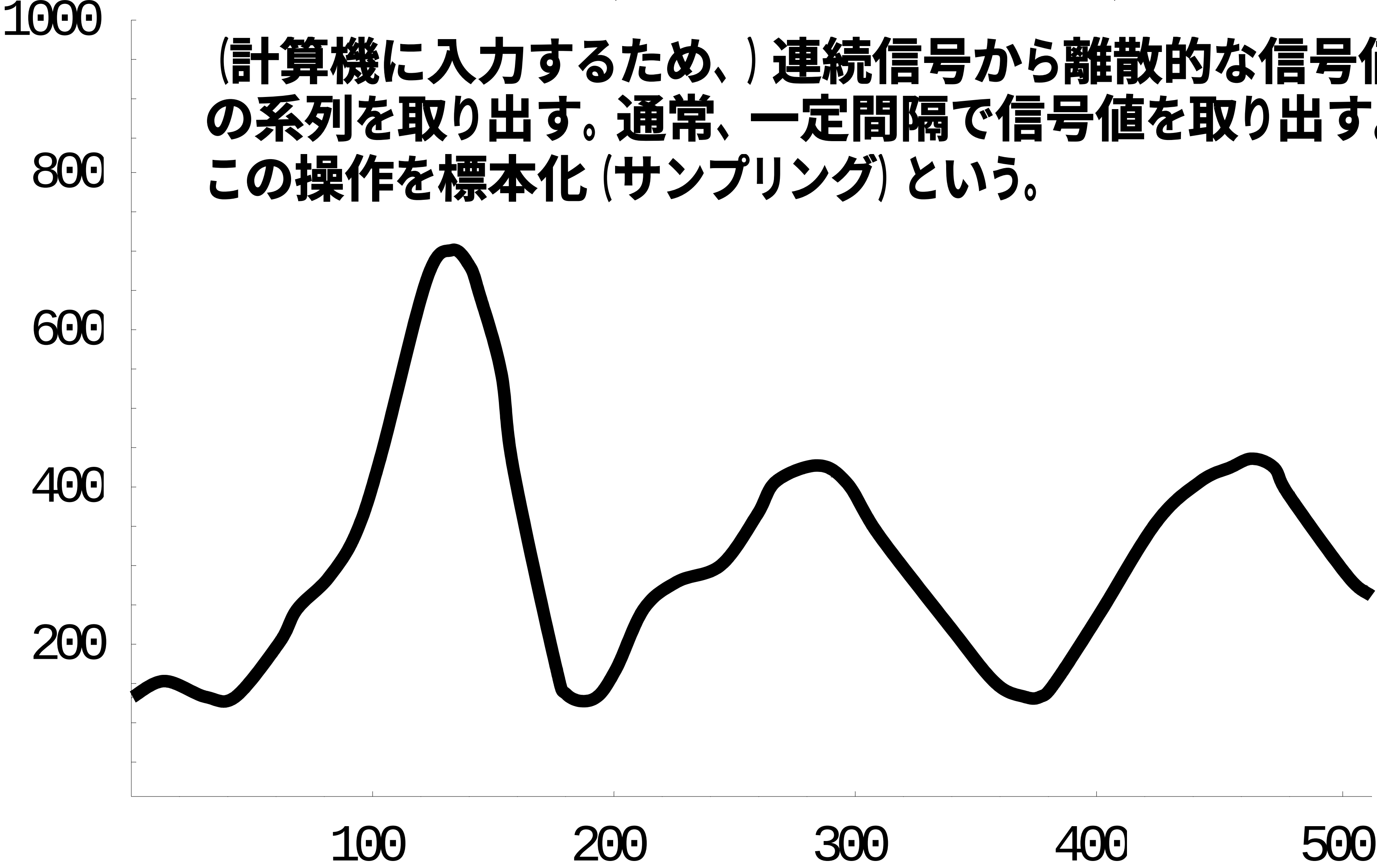
http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

アナログ信号



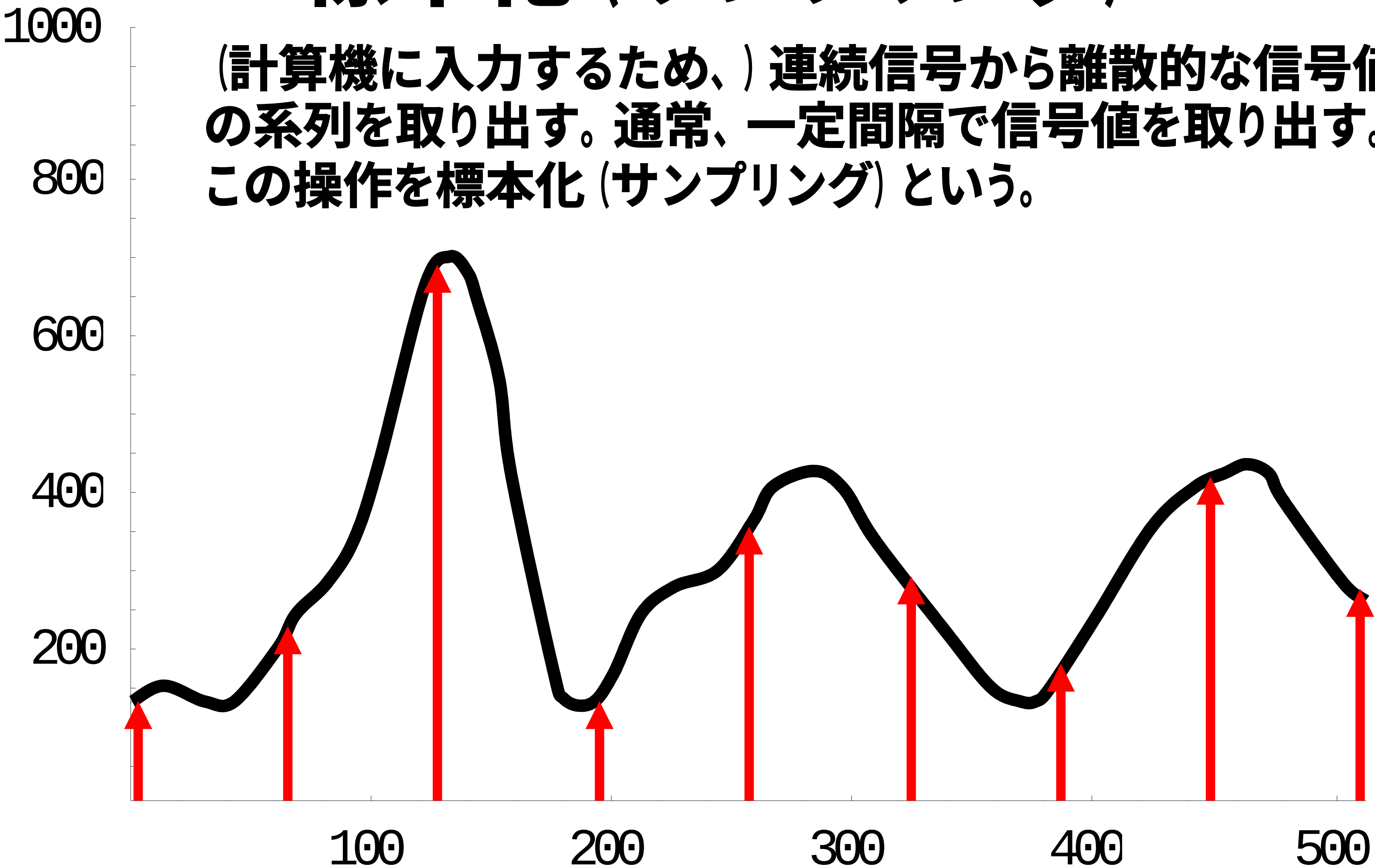
アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）

（計算機に入力するため、）連続信号から離散的な信号値の系列を取り出す。通常、一定間隔で信号値を取り出す。この操作を標本化（サンプリング）という。



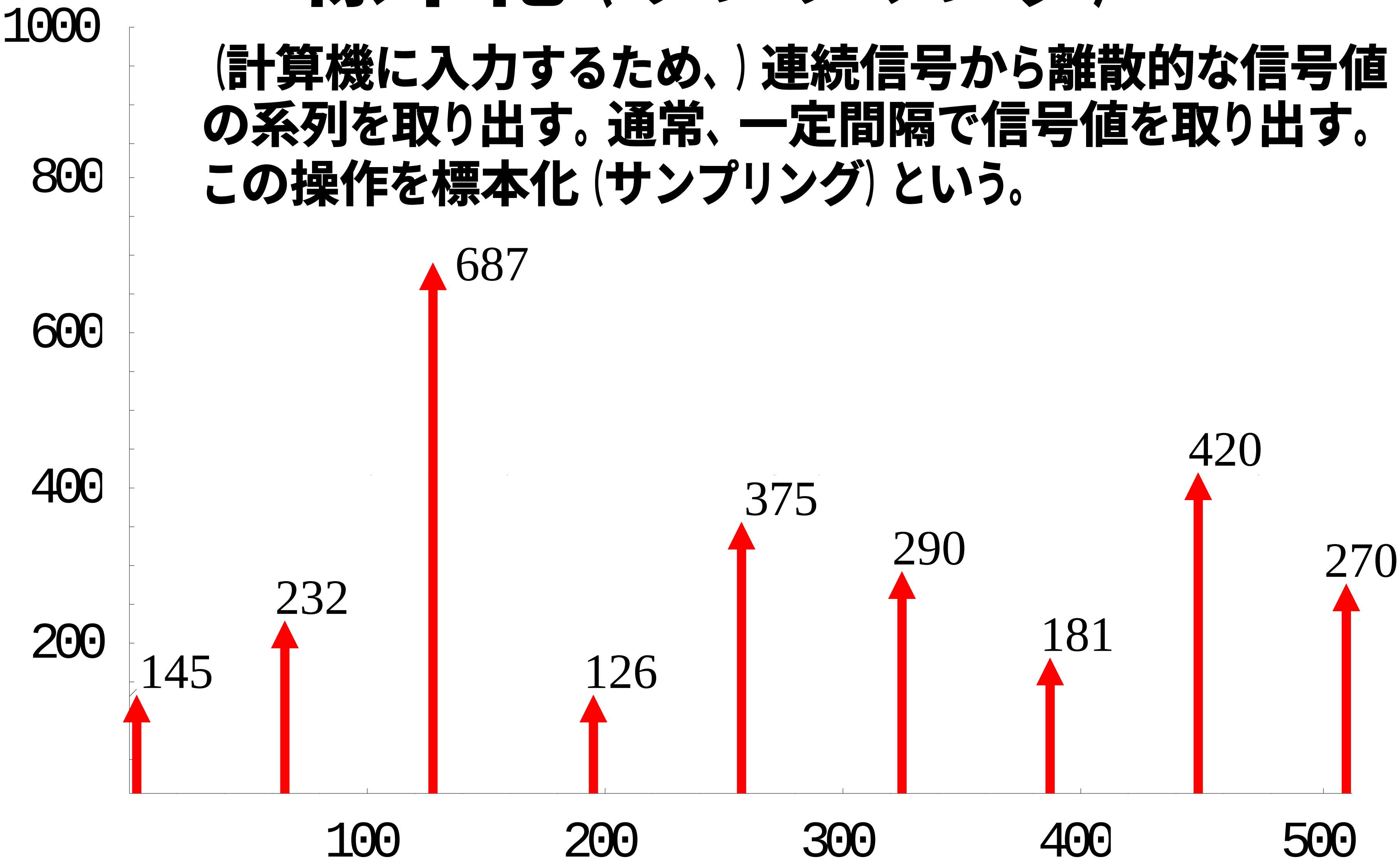
アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）

（計算機に入力するため、）連続信号から離散的な信号値の系列を取り出す。通常、一定間隔で信号値を取り出す。この操作を標本化（サンプリング）という。



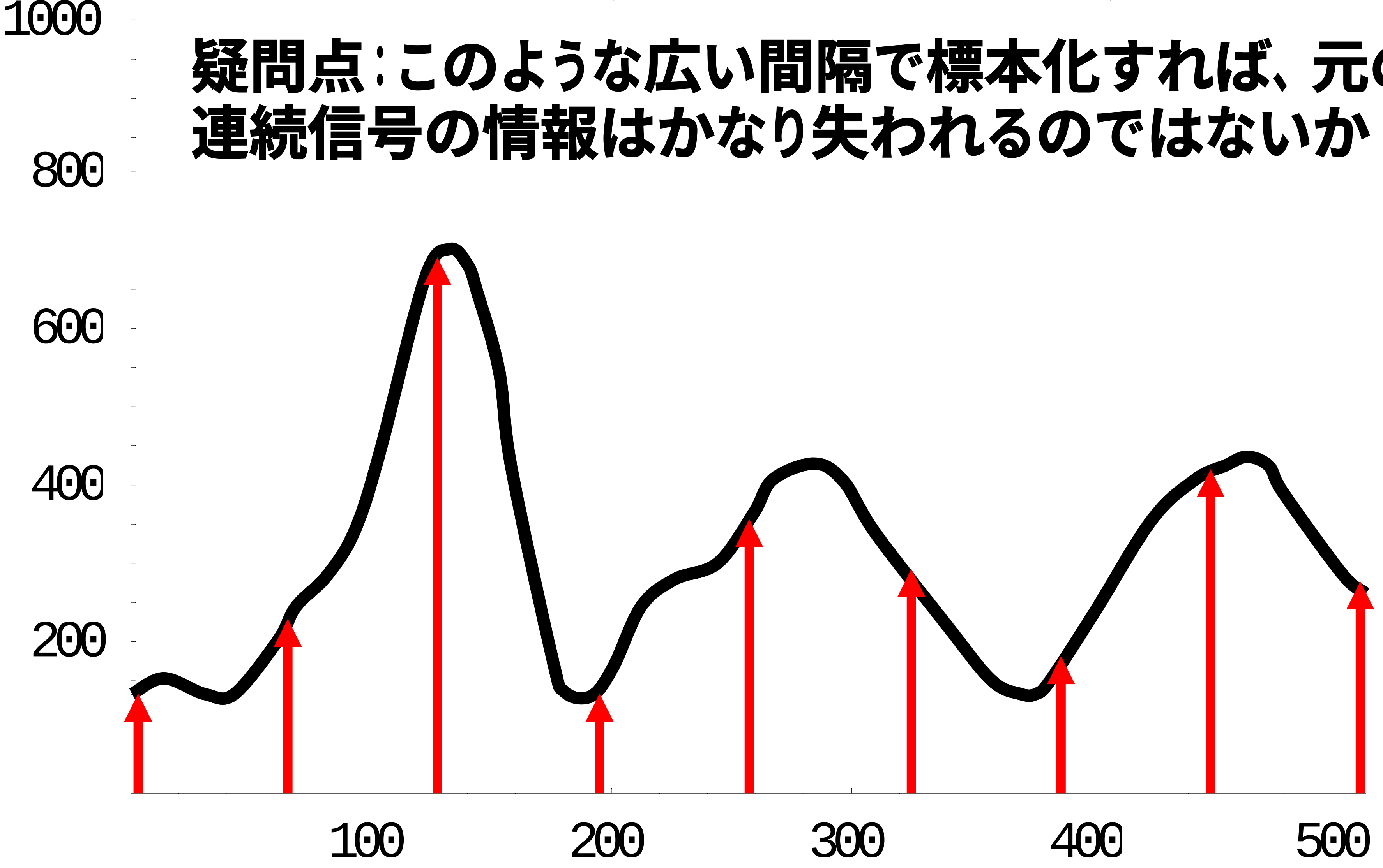
アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）

（計算機に入力するため、）連続信号から離散的な信号値の系列を取り出す。通常、一定間隔で信号値を取り出す。この操作を標本化（サンプリング）という。

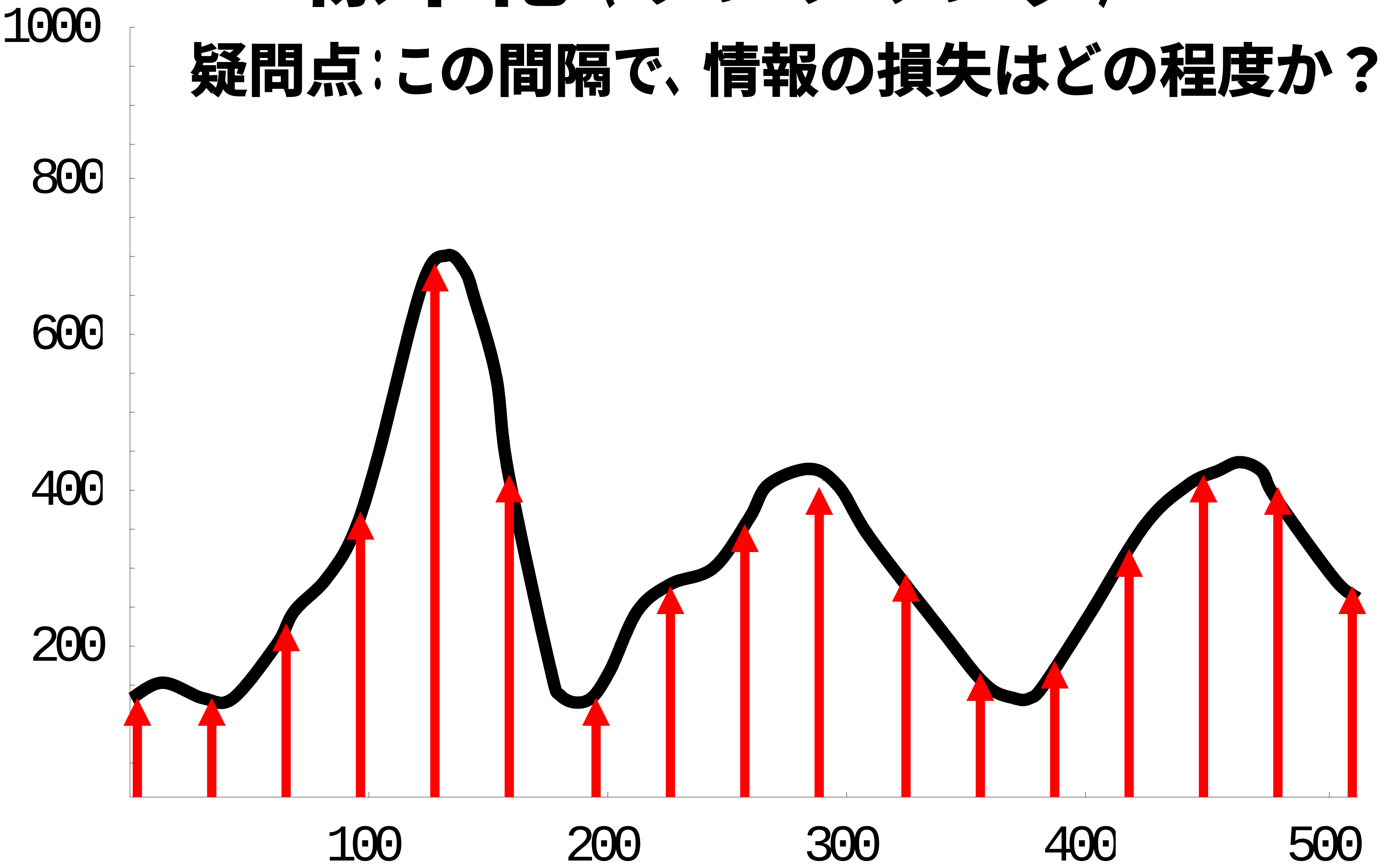


アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）

疑問点：このような広い間隔で標本化すれば、元の連続信号の情報はかなり失われるのではないか？

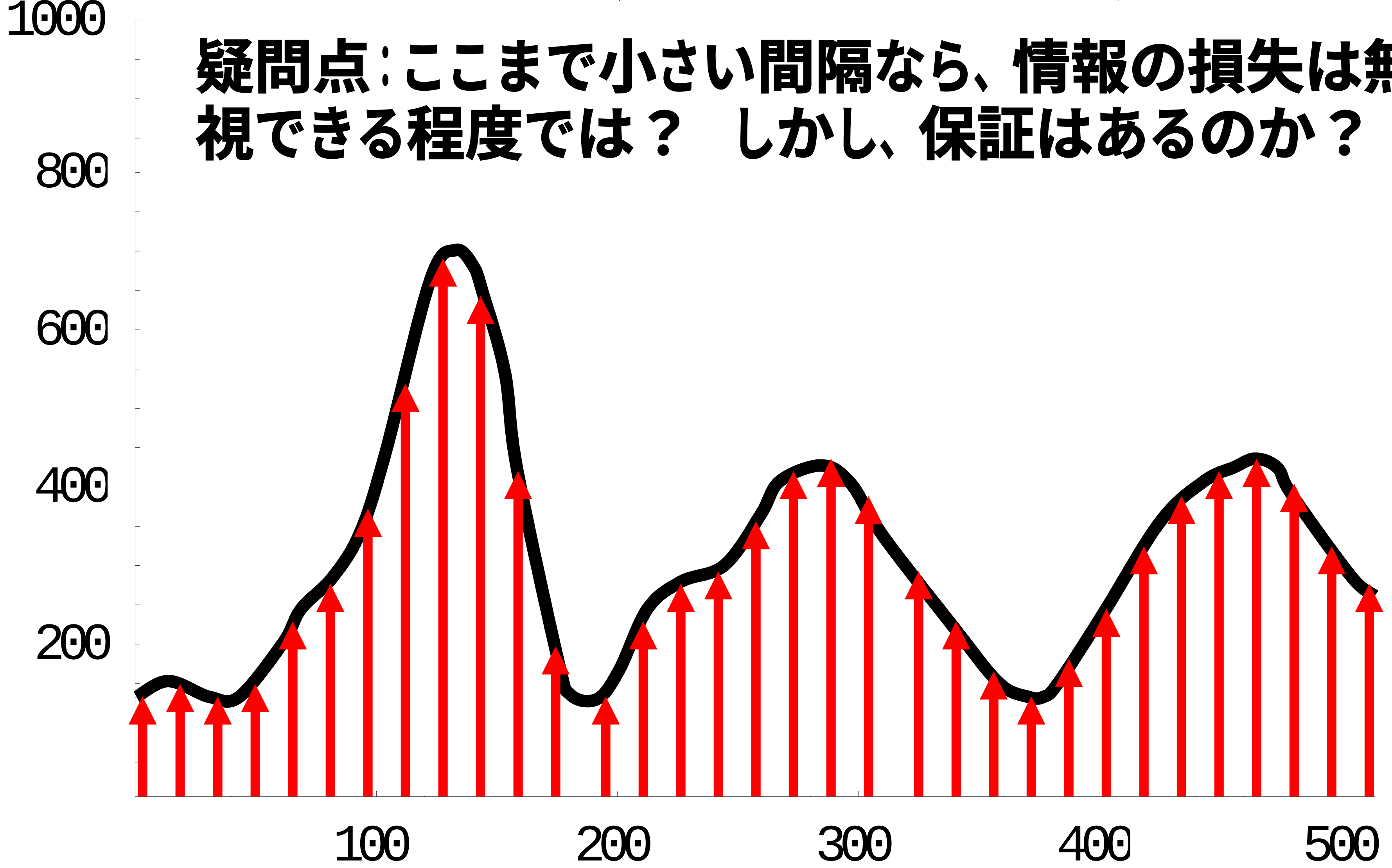


アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）



疑問点：この間隔で、情報の損失はどの程度か？

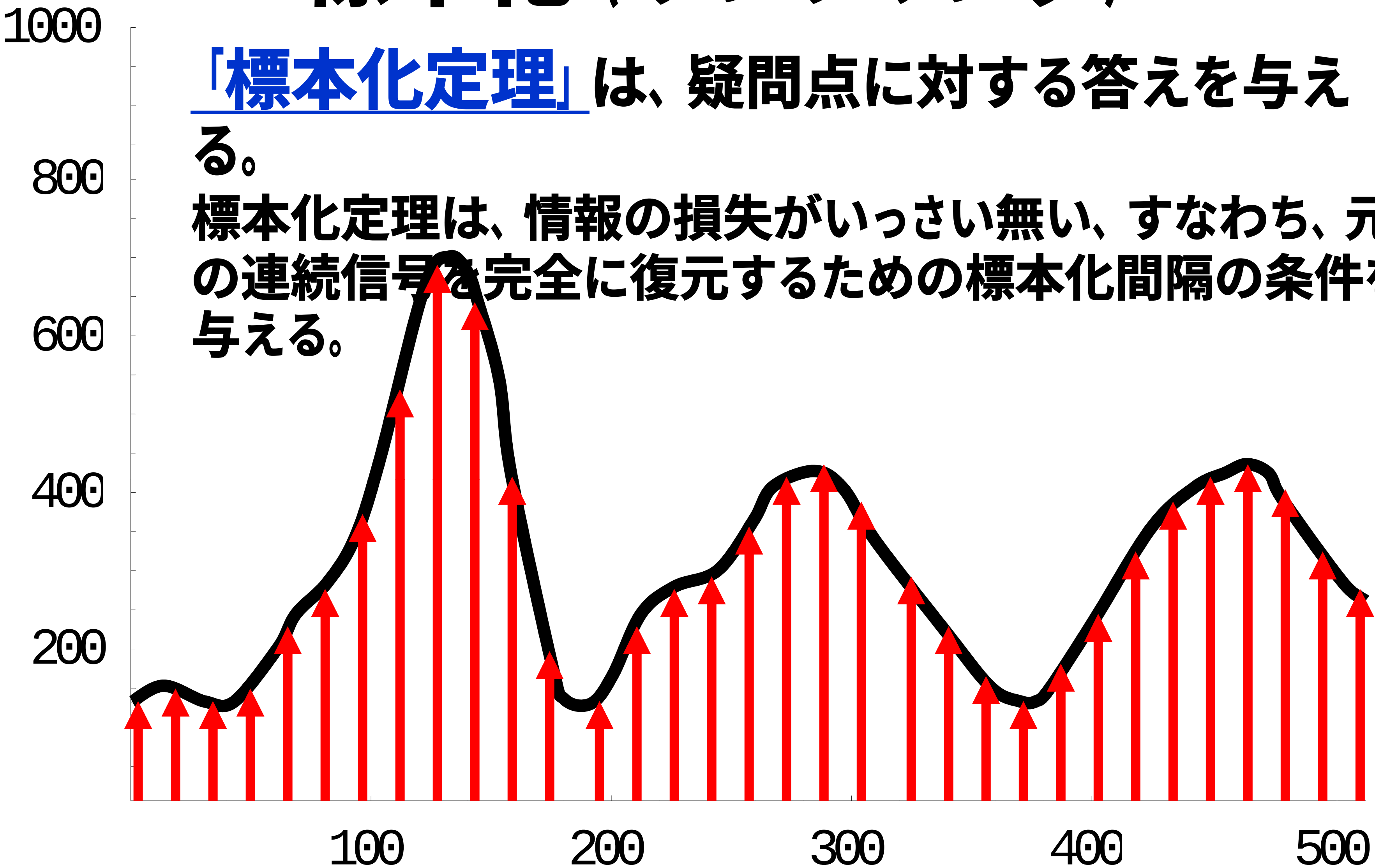
アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）



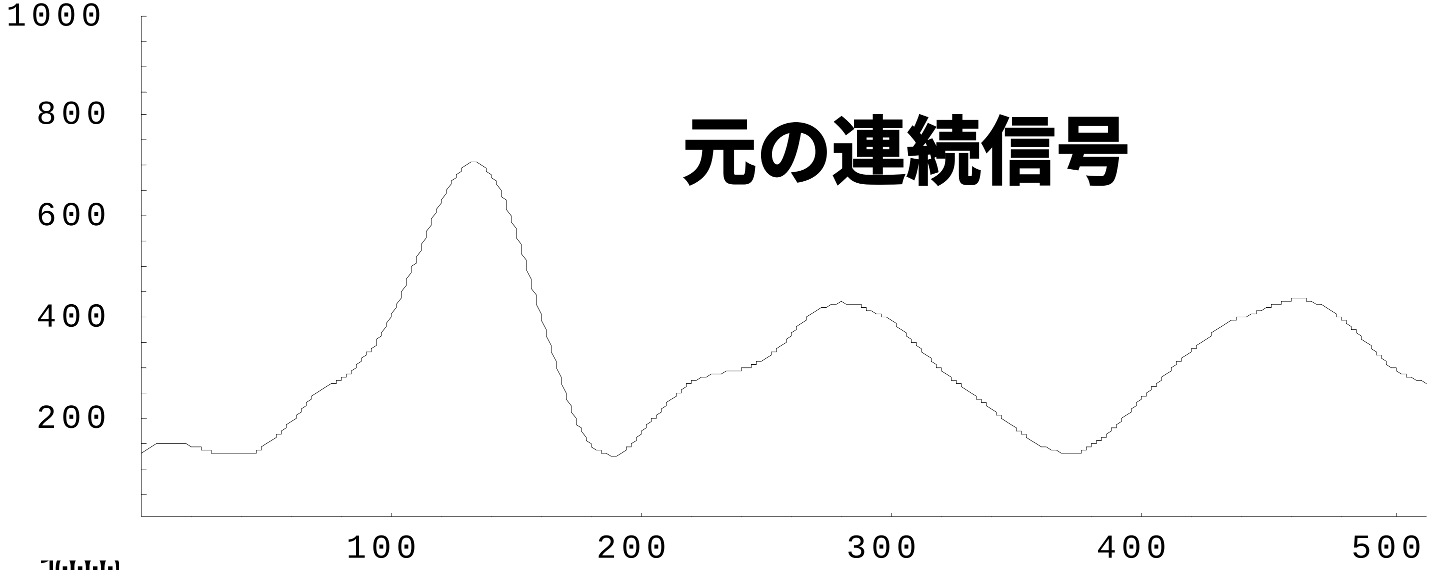
アナログ信号のデジタル化
標本化（サンプリング）

「標本化定理」は、疑問点に対する答えを与える。

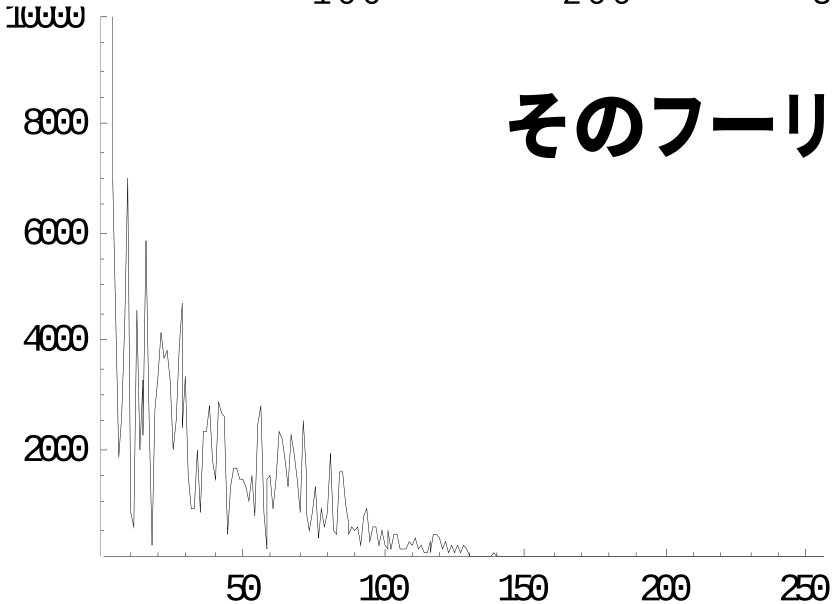
標本化定理は、情報の損失がいっさい無い、すなわち、元の連続信号を完全に復元するための標本化間隔の条件を与える。



標本化定理 (サンプリング定理)

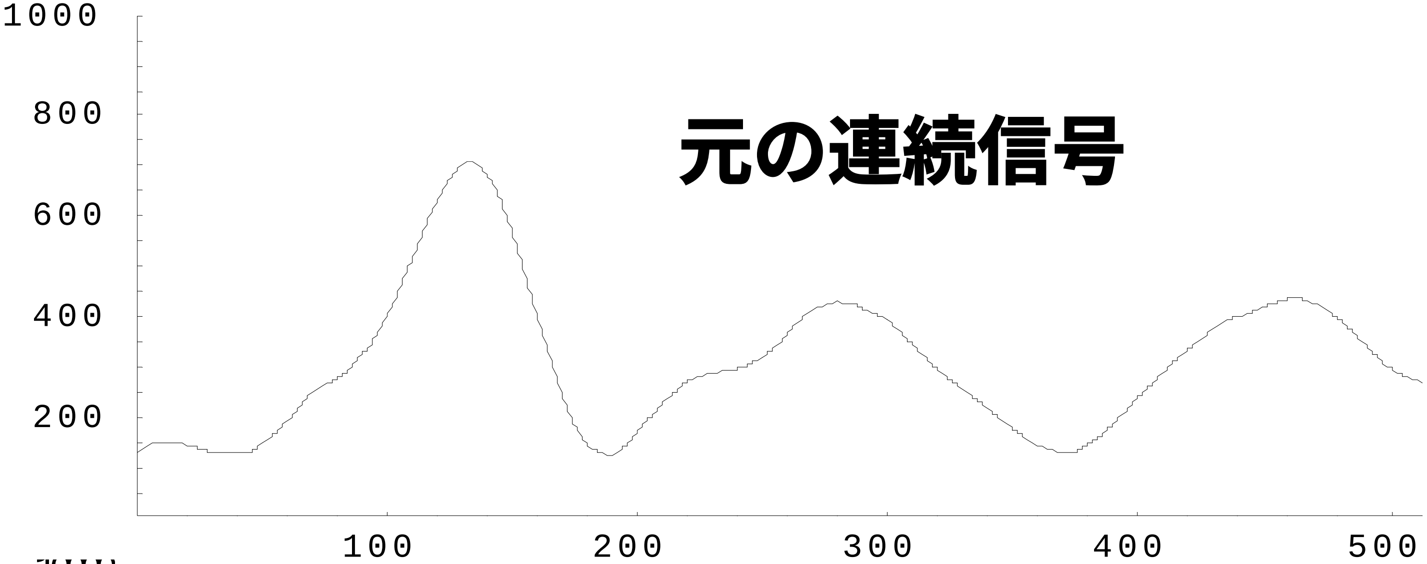


空間軸
時間軸



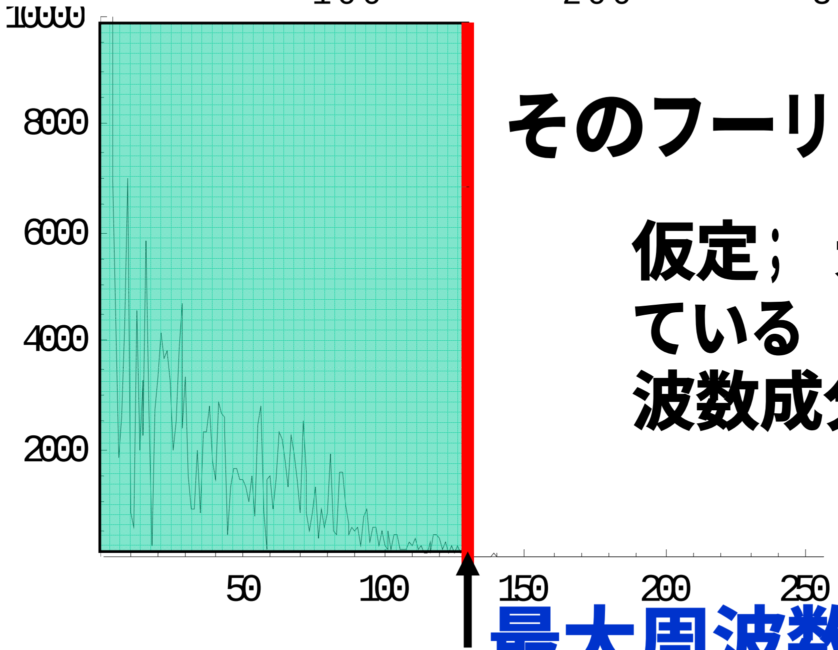
周波数

標本化定理 (サンプリング定理)



元の連続信号

空間軸
時間軸



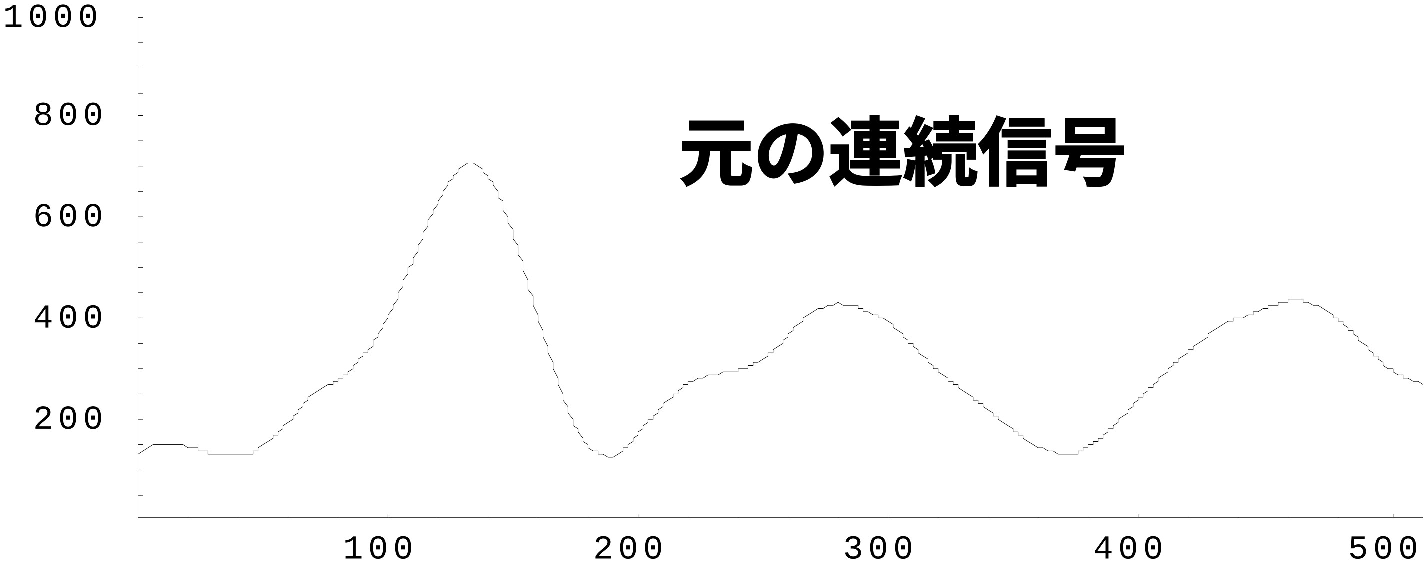
そのフーリエ変換

仮定; 元の連続信号が<u>帯域制限</u>されている ＝ ある最大周波数以下の周波数成分しか含まない。

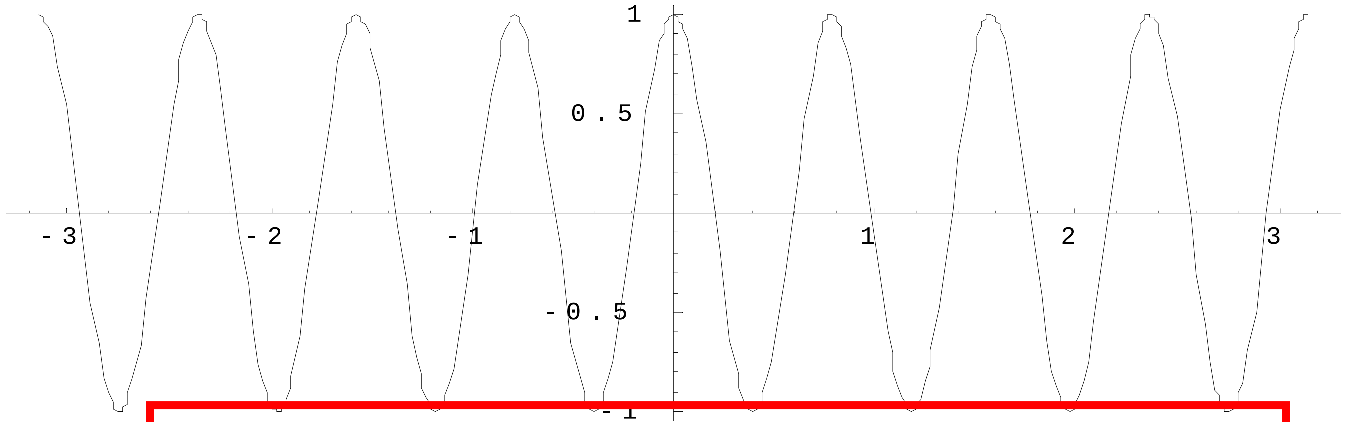
周波数

最大周波数 $\omega_{\max}$

標本化定理 (サンプリング定理)



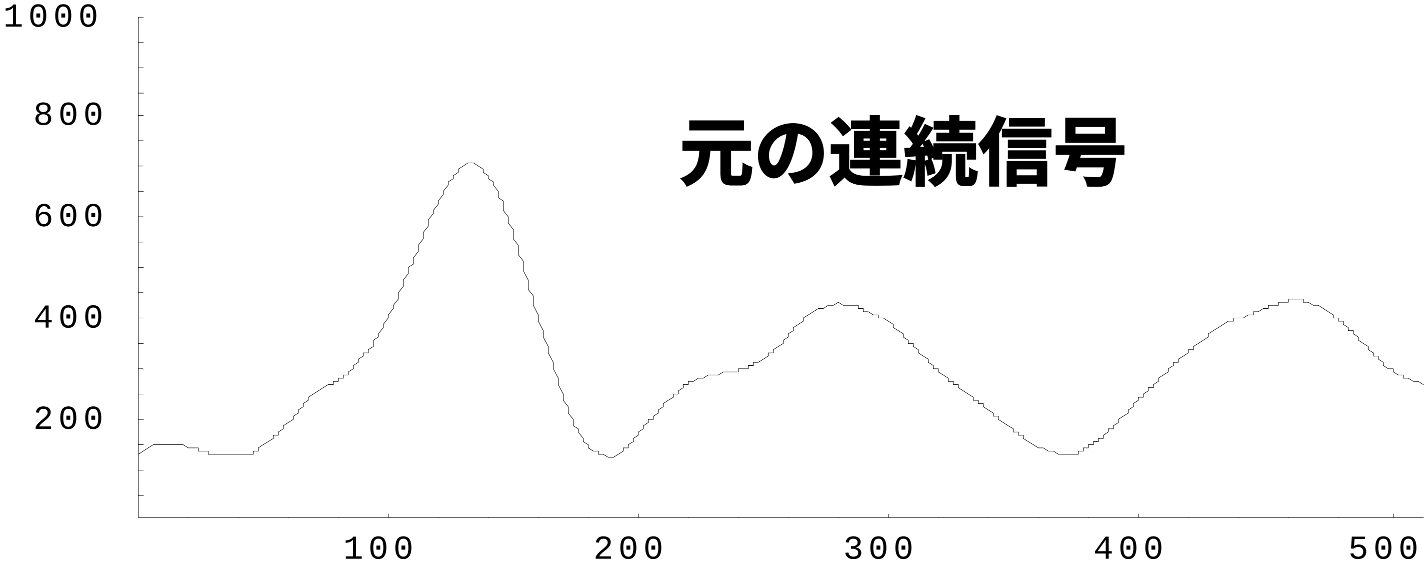
空間軸
時間軸



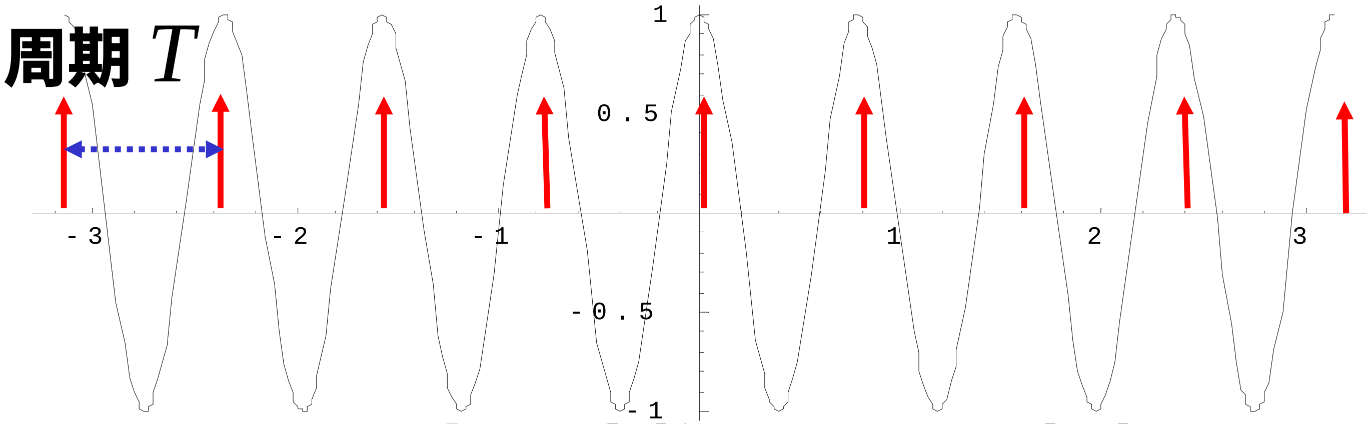
最大周波数ω_{max}の正弦波

の周期の半分 (以下) の間隔で標本化すれば、情報の損失は全く無い。

標本化定理（サンプリング定理）

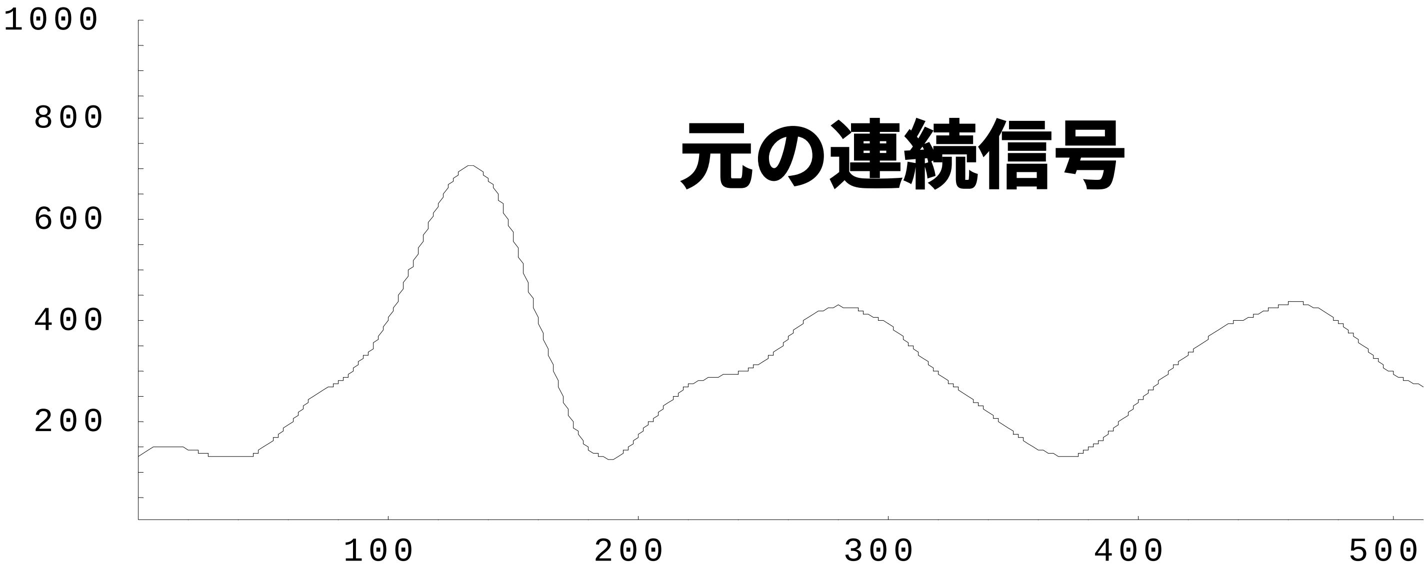


空間軸
時間軸

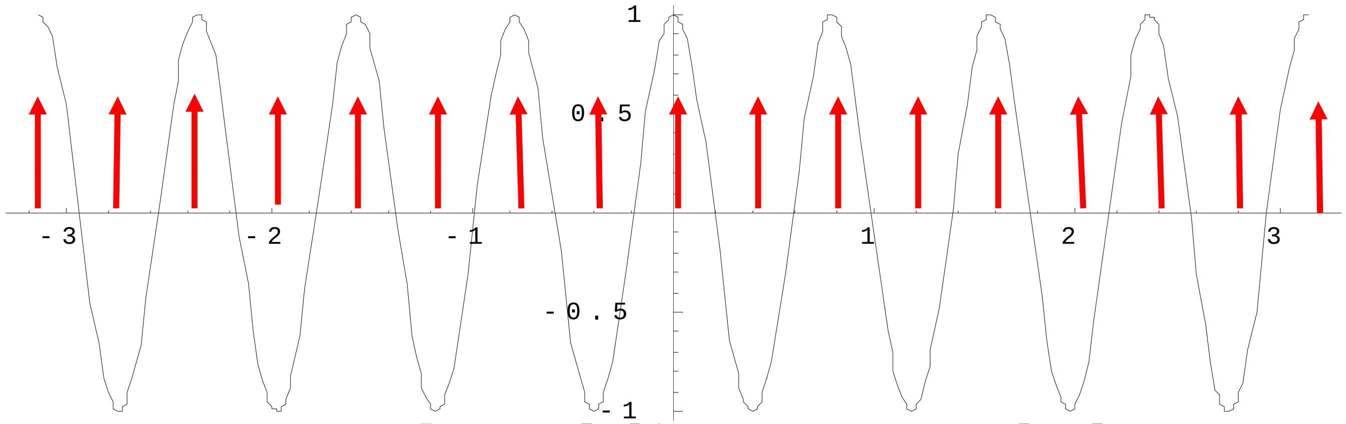


最大周波数$\omega_{\max}$の正弦波の周期 T の半分（以下）の間隔で標本化すれば、情報の損失は全く無い。

標本化定理 (サンプリング定理)



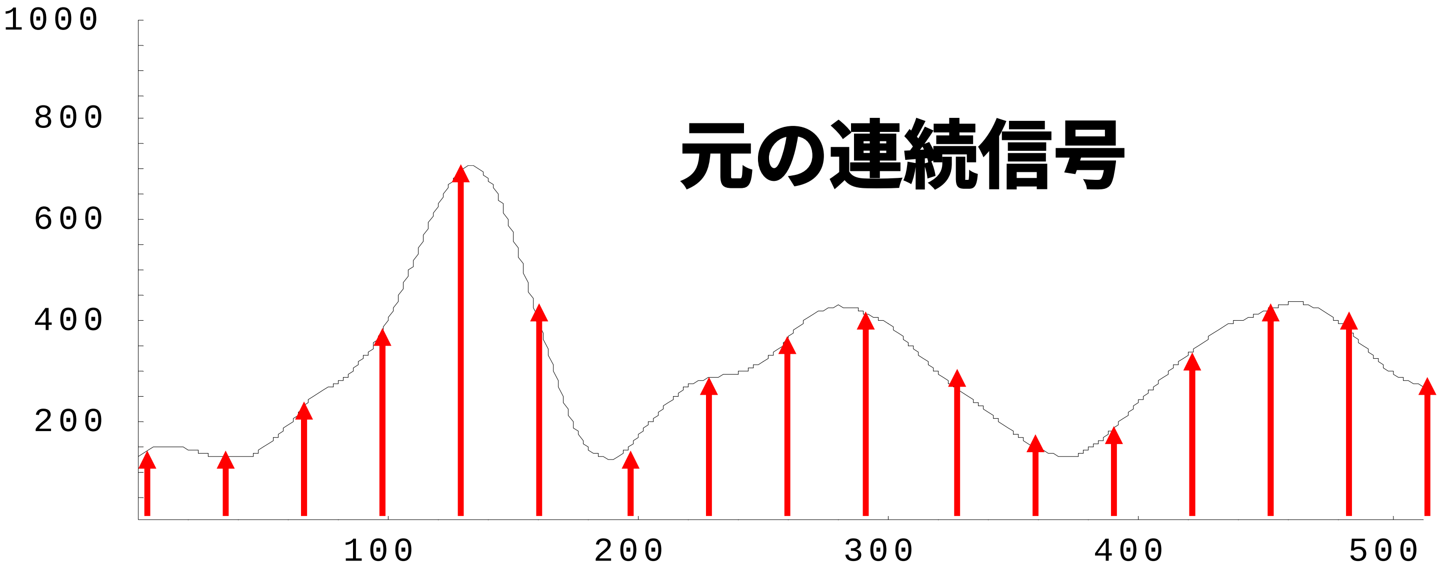
空間軸
時間軸



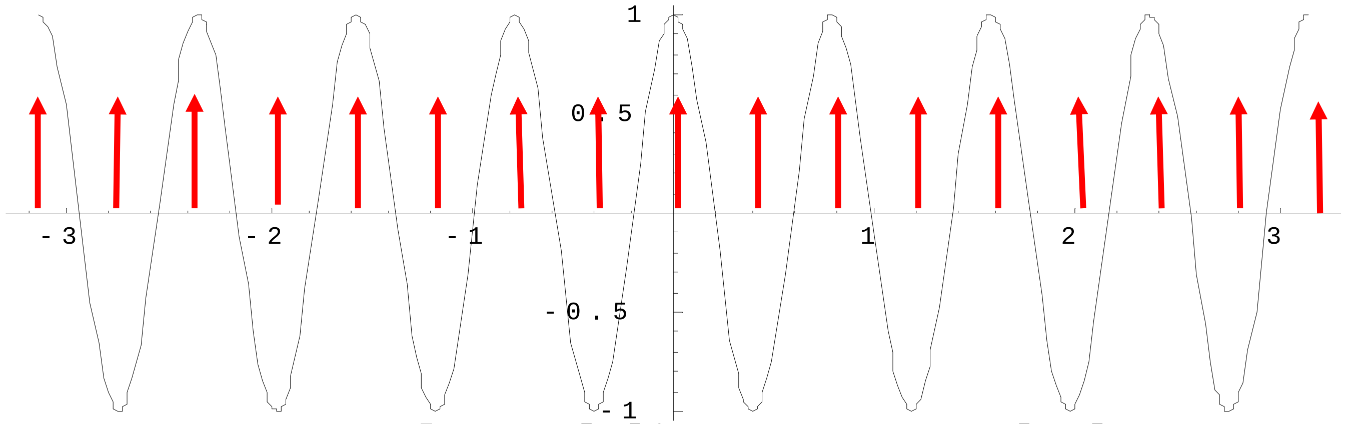
最大周波数$\omega_{\max}$の正弦波

の周期の半分 (以下) の間隔で標本化すれば、情報の損失は全く無い。

標本化定理(サンプリング定理)



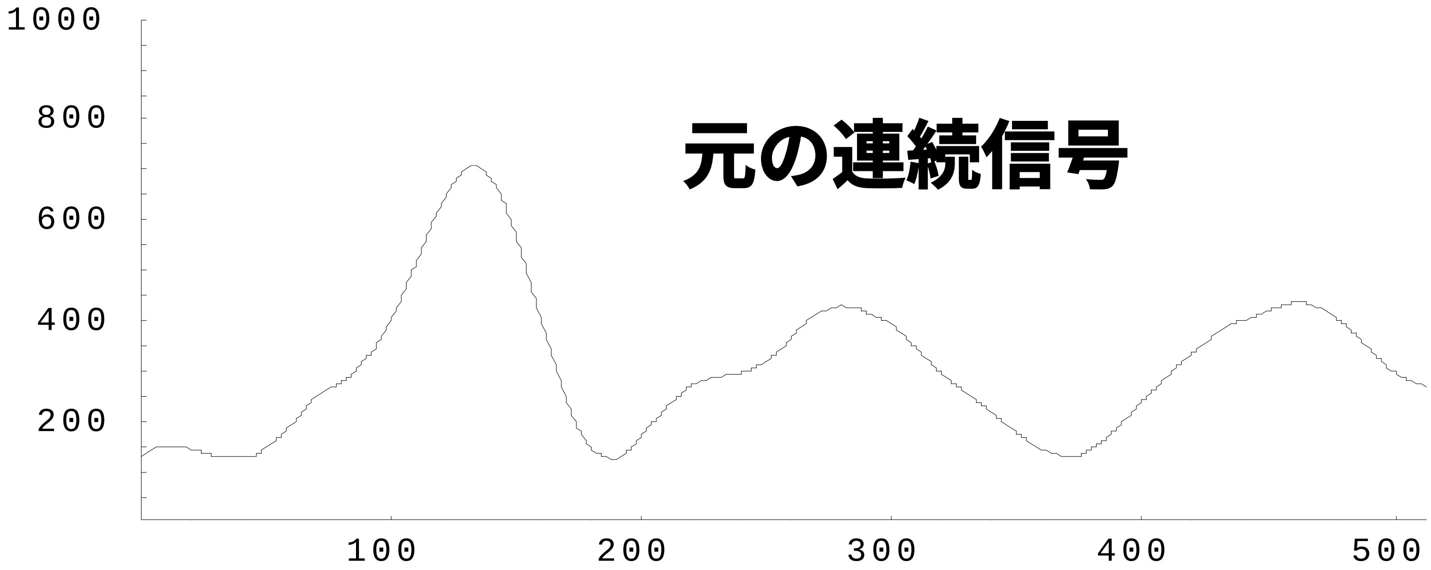
空間軸
時間軸



最大周波数ω_{max}の正弦波

の周期の半分(以下)の間隔で標本化
すれば、情報の損失は全く無い。

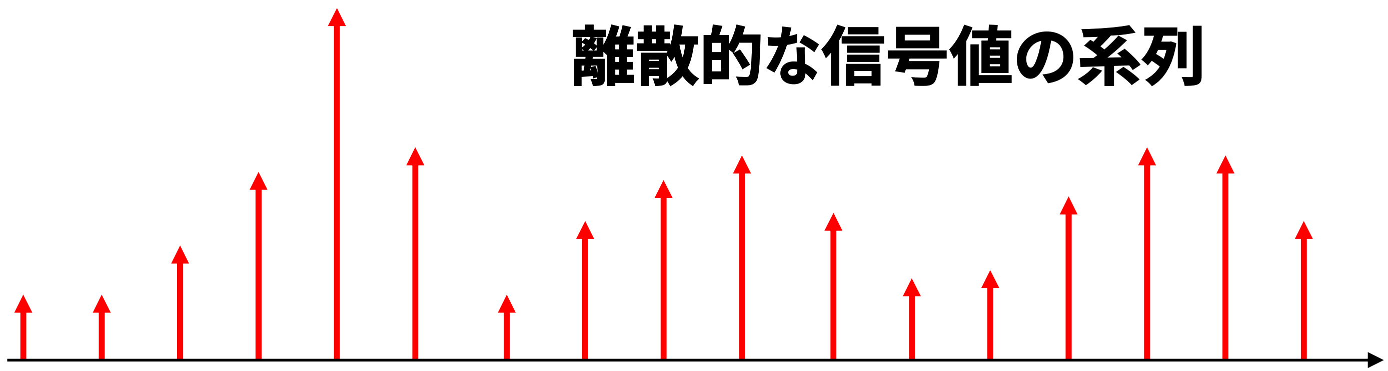
標本化定理 (サンプリング定理)



空間軸
時間軸

復元可能

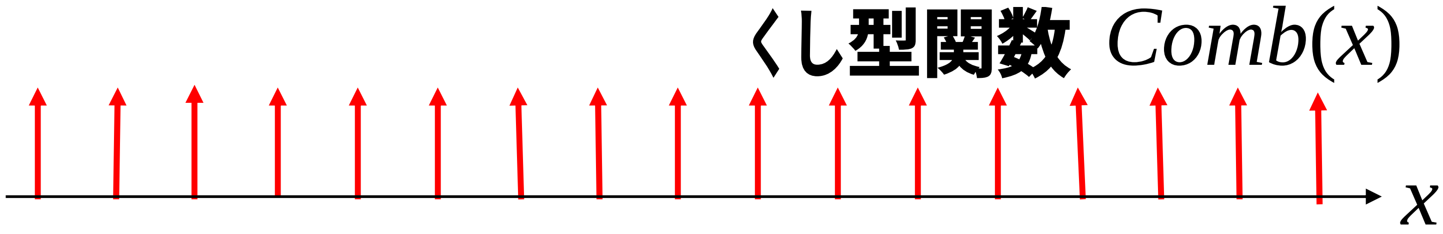
離散的な信号値の系列

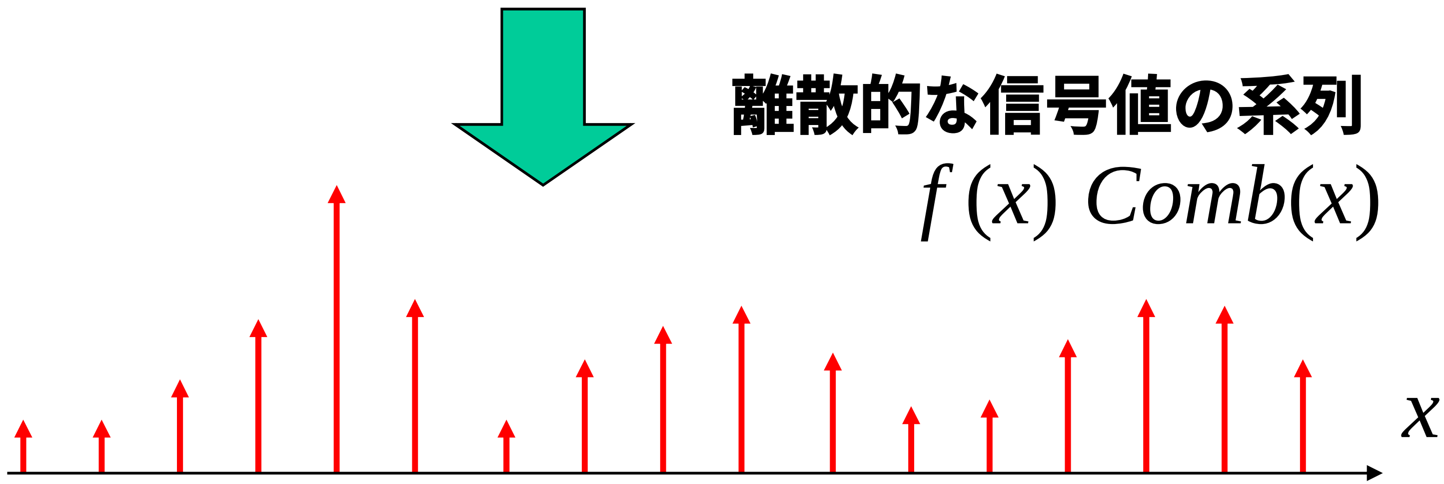


標本化定理 (サンプリング定理) の証明

- おおまかな手順
  - 標本化 (サンプリング) された連続信号を数学的に表現する。
  - これをフーリエ変換する。
    - 周波数領域において、情報の損失の有無がはっきりと確認できる。
  - 周波数領域において、元の信号成分のみを取り出す。
  - 逆フーリエ変換する。
    - 元の連続信号になっているはずである。

標本化定理（サンプリング定理）の証明

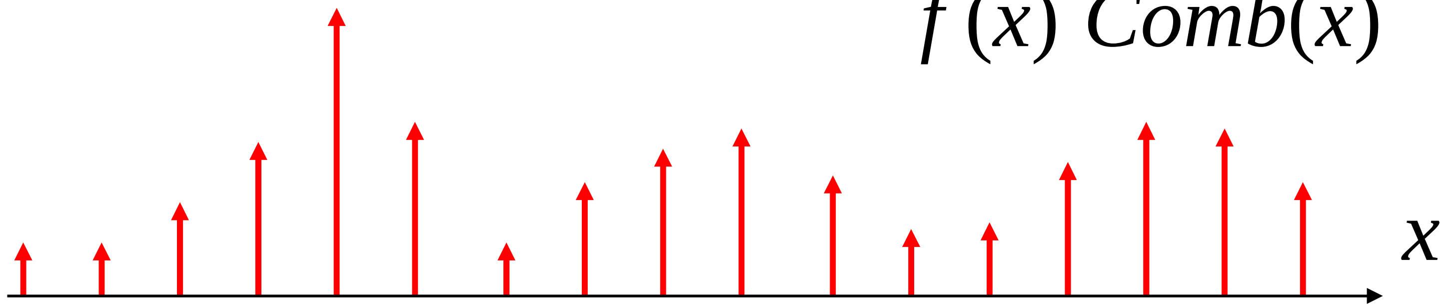




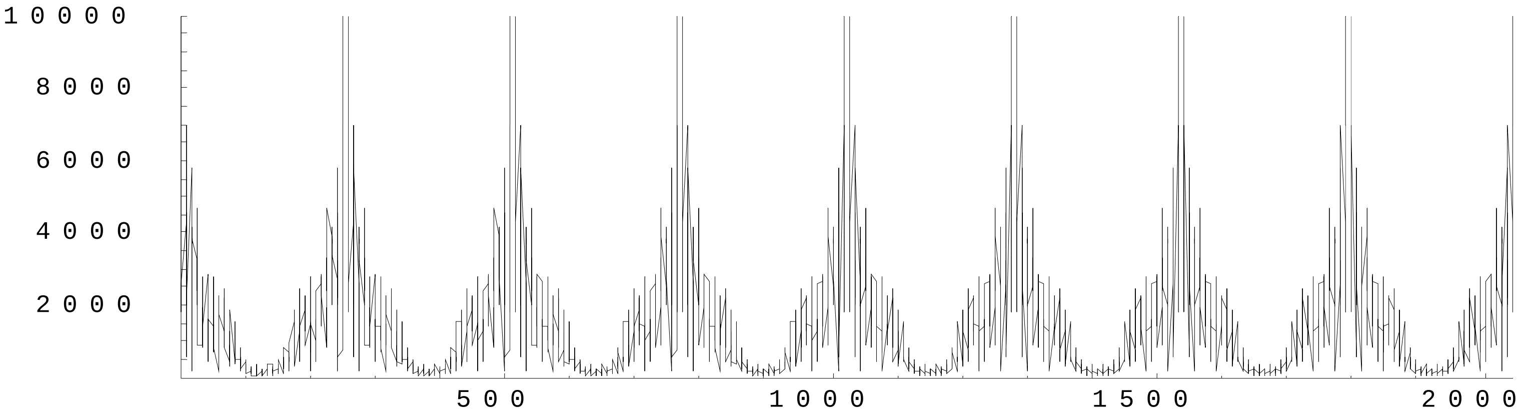
標本化定理（サンプリング定理）の証明

離散的な信号値の系列

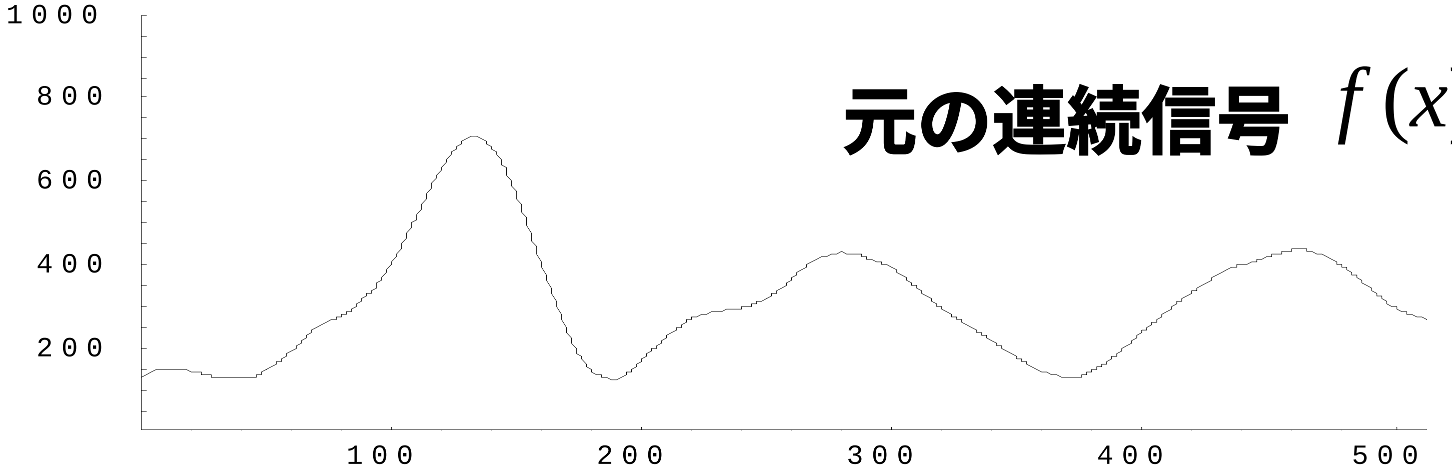
$$f(x)\ Comb(x)$$



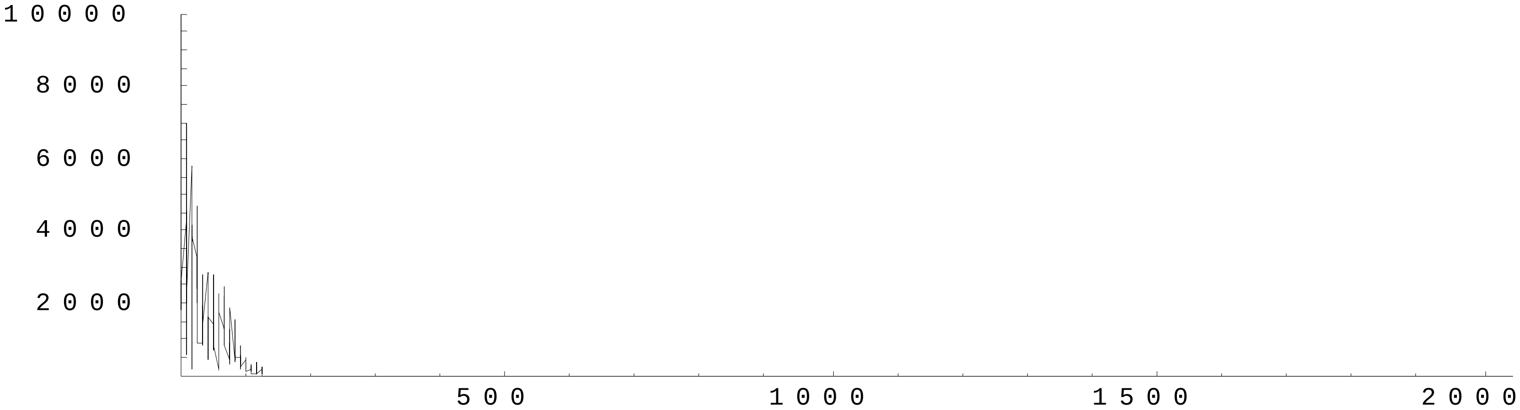
フーリエ変換



標本化定理 (サンプリング定理) の証明



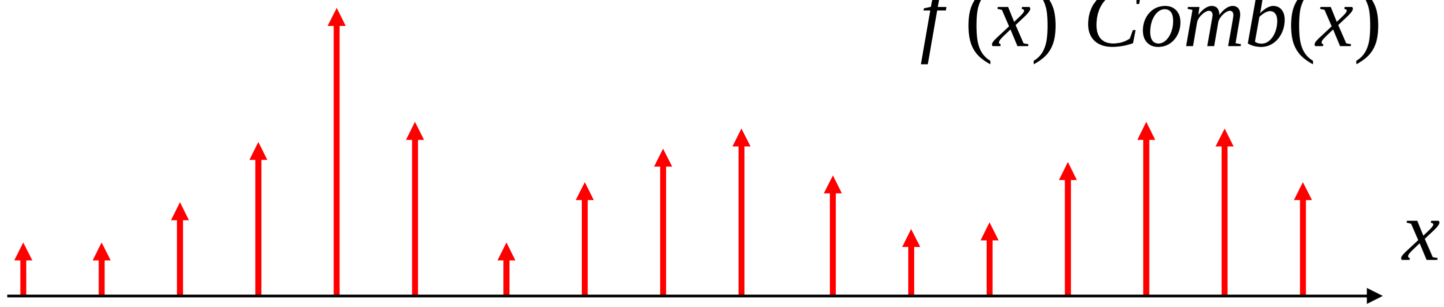
フーリエ変換



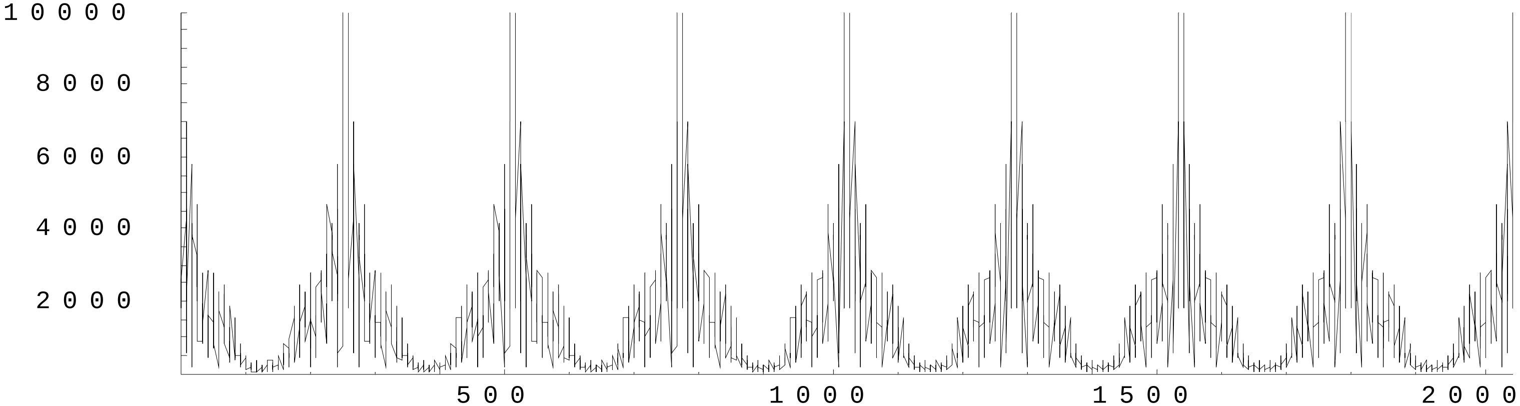
標本化定理 (サンプリング定理) の証明

離散的な信号値の系列

$$f(x)\ Comb(x)$$



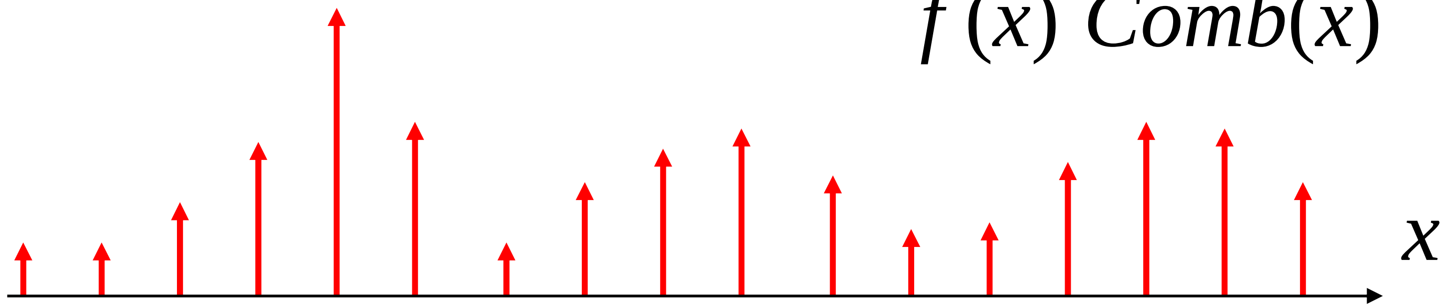
フーリエ変換



標本化定理（サンプリング定理）の証明

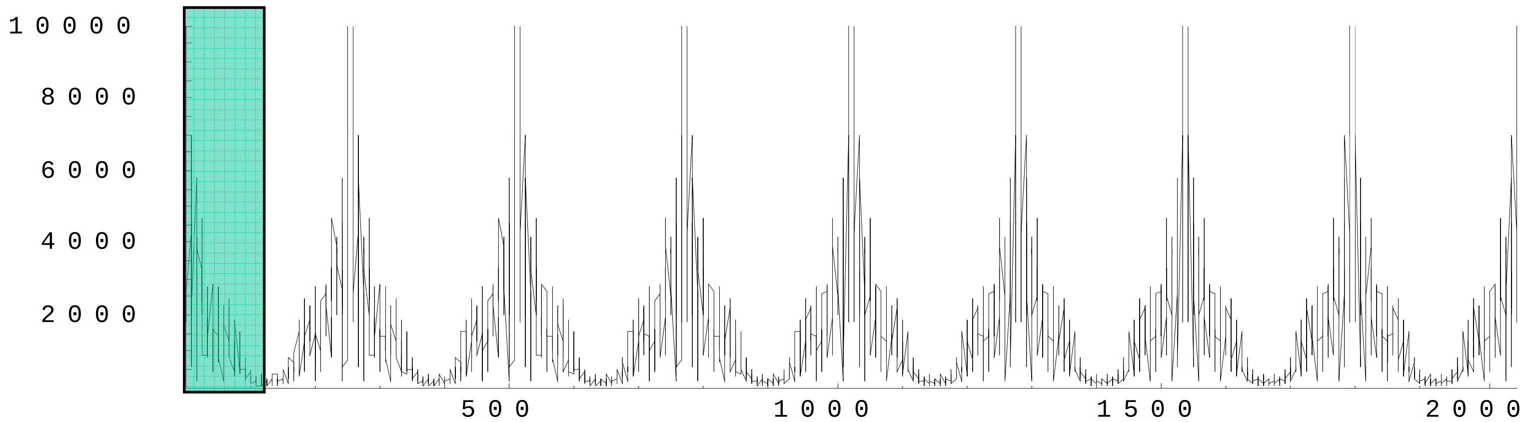
離散的な信号値の系列

$$f(x)\ Comb(x)$$



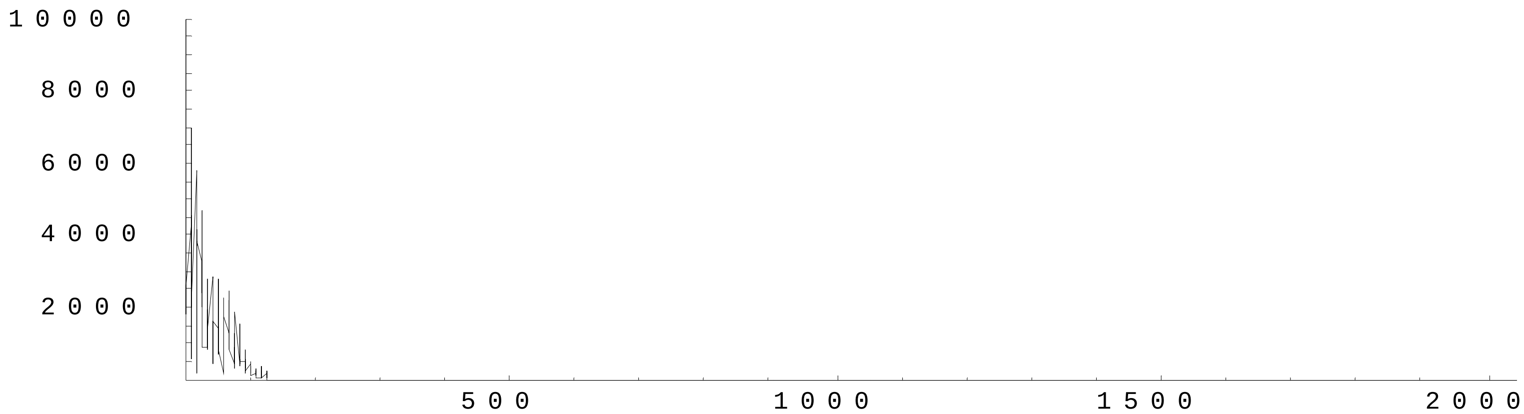
矩形関数を掛け算する

フーリエ変換



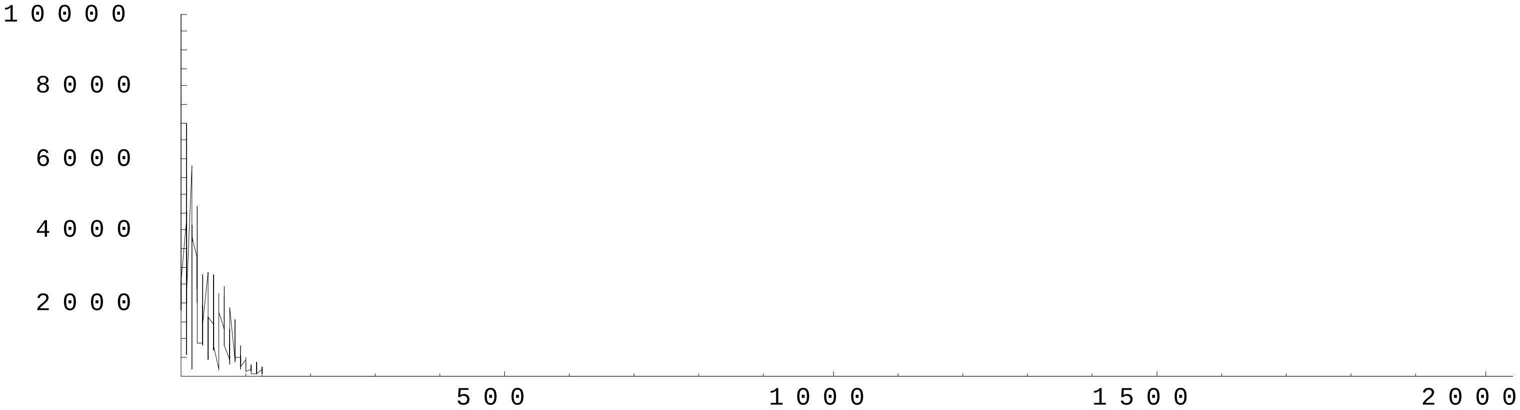
標本化定理（サンプリング定理）の証明

元の信号の周波数成分取り出し

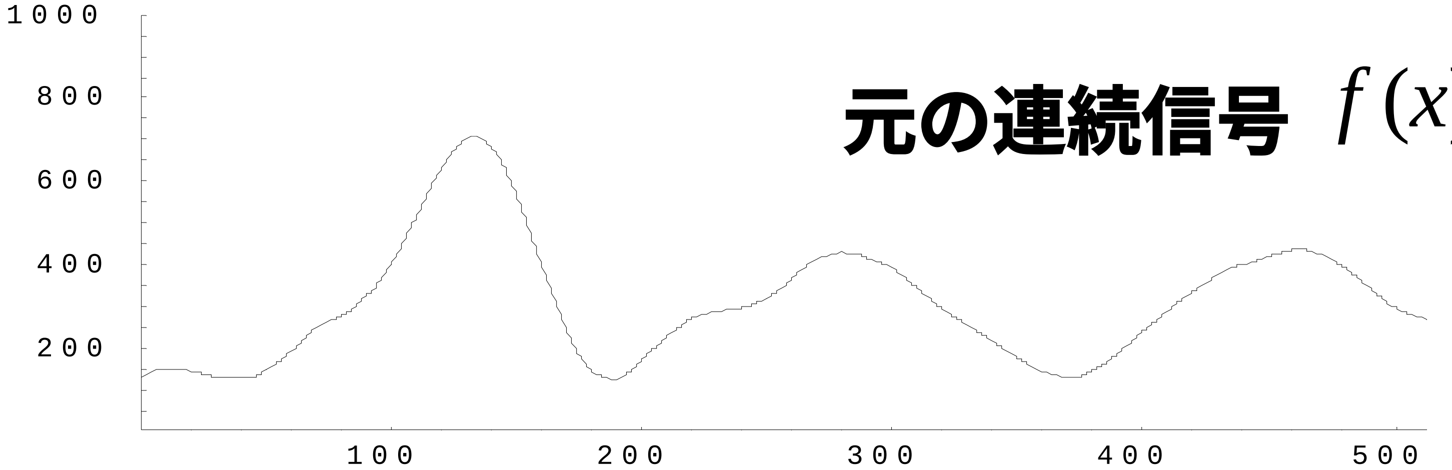


標本化定理(サンプリング定理)の証明

逆フーリエ変換

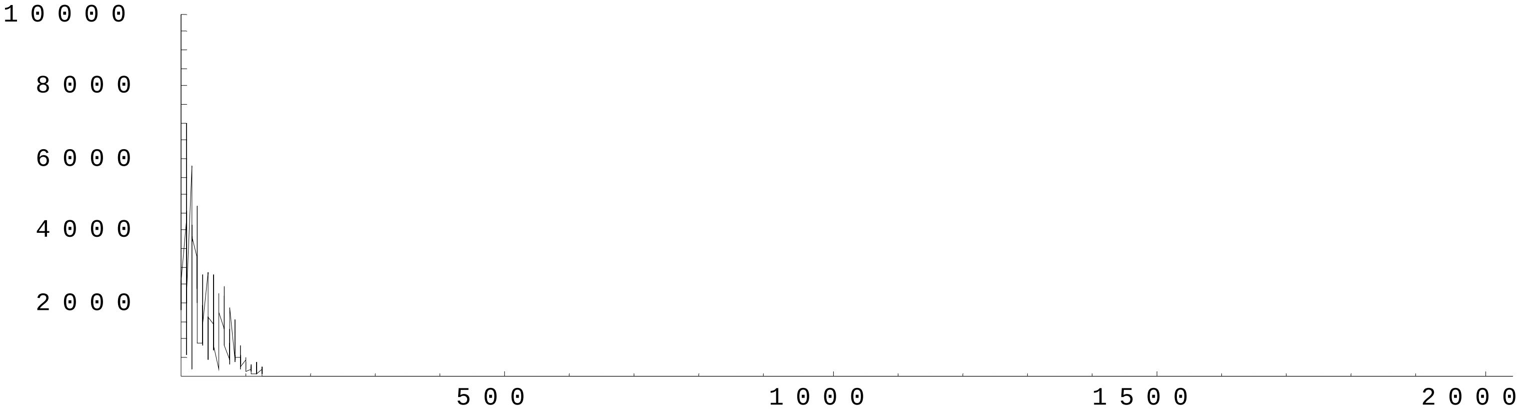


標本化定理（サンプリング定理）の証明



元の連続信号 $f(x)$

逆フーリエ変換



標本化定理（サンプリング定理）の証明

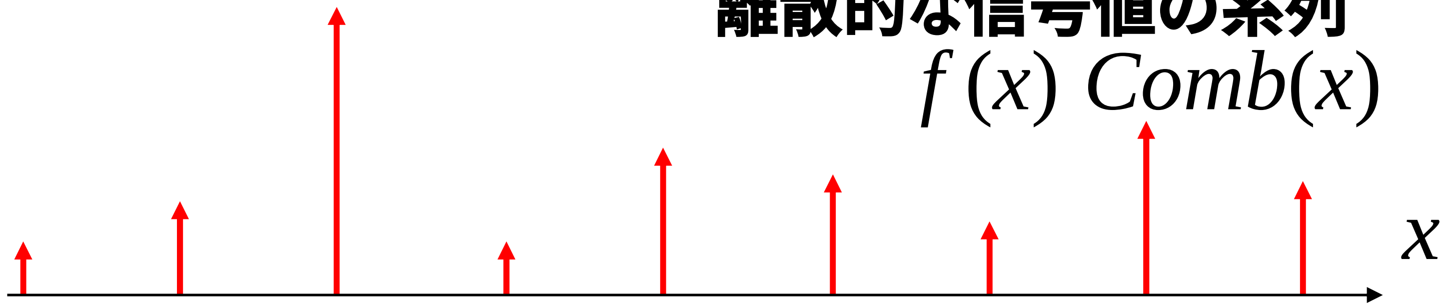
- 標本化間隔を広くすると、どうなるか？
- 標本化間隔を狭くすると、どうなるか？

標本化定理（サンプリング定理）の証明

- 標本化間隔を広くすると、どうなるか？

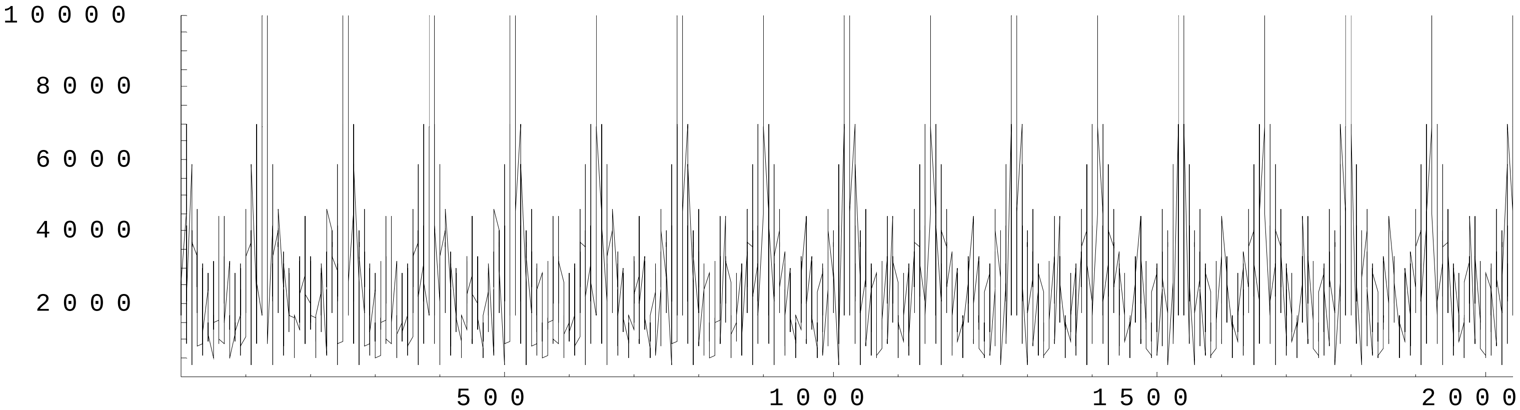
離散的な信号値の系列

$$f(x)\ Comb(x)$$



時間・空間領域で広くなれば、
周波数領域では狭くなる。

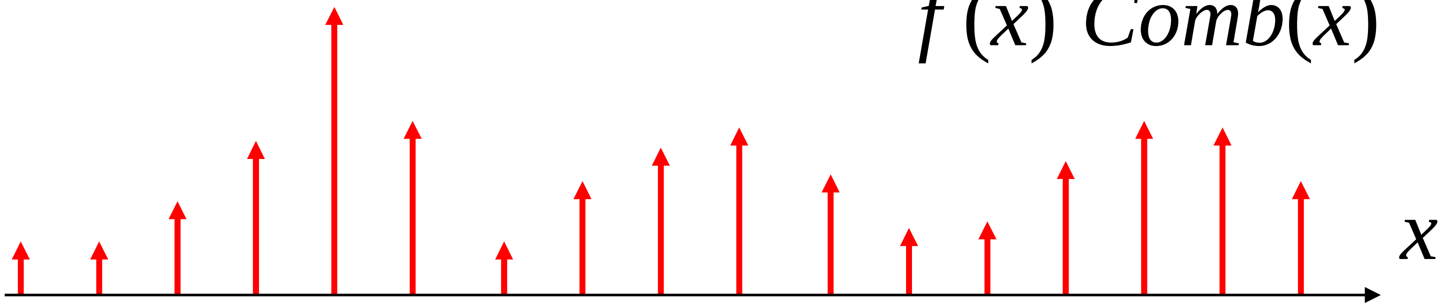
フーリエ変換



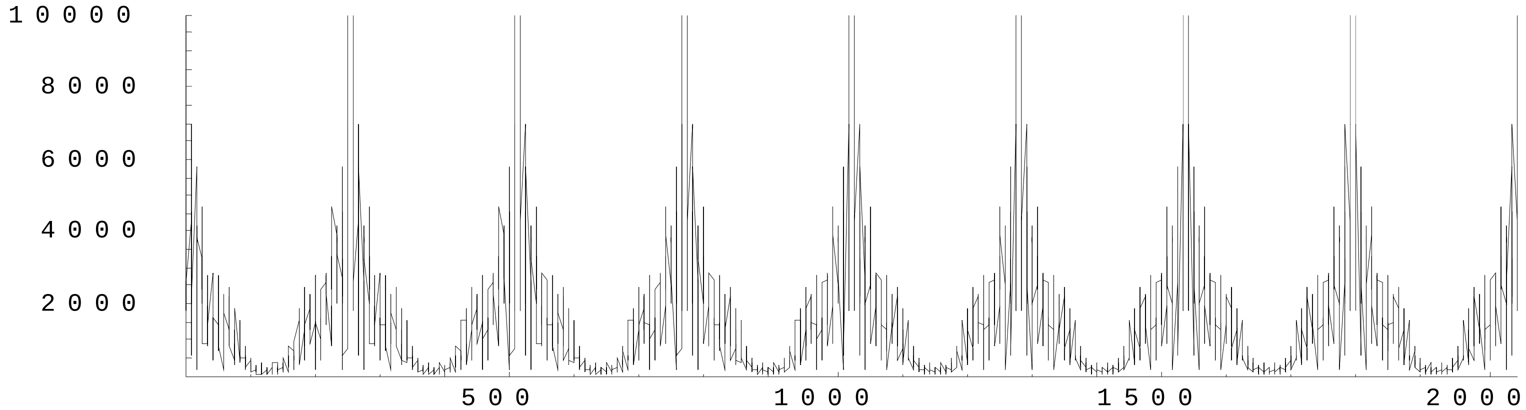
標本化定理 (サンプリング定理) の証明

離散的な信号値の系列

$$f(x)\,Comb(x)$$



フーリエ変換

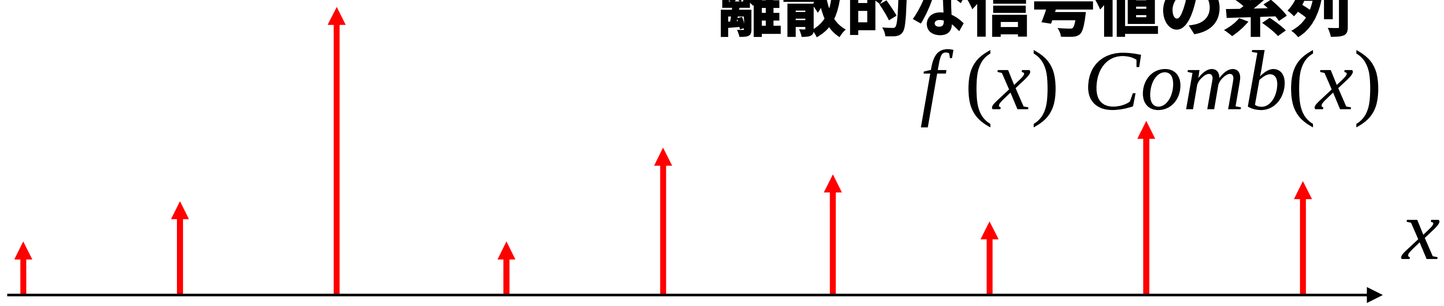


標本化定理（サンプリング定理）の証明

- 標本化間隔を広くすると、どうなるか？

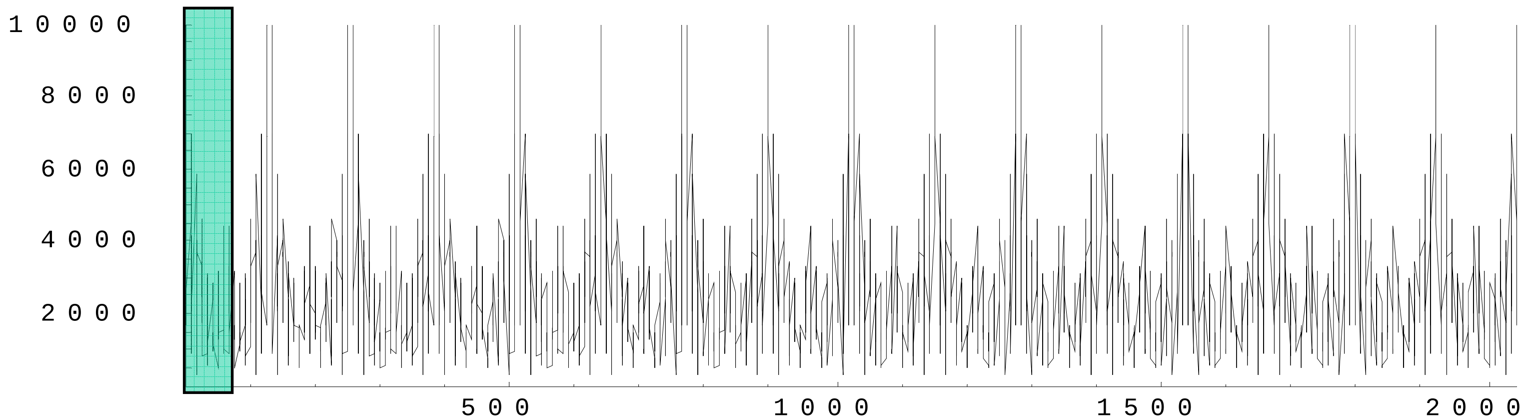
離散的な信号値の系列

$f(x)\ Comb(x)$



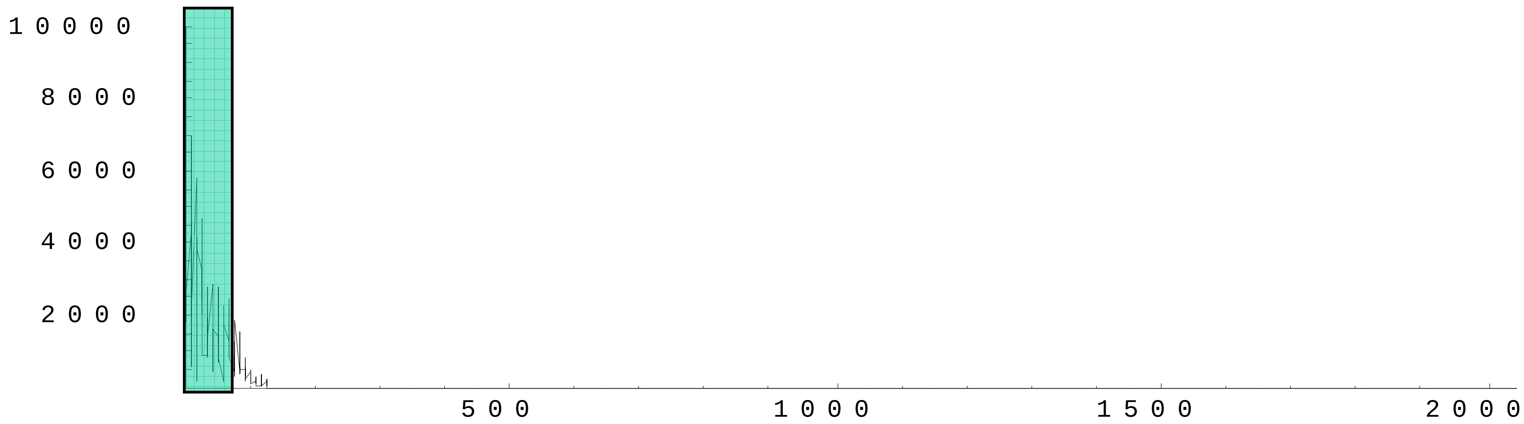
時間・空間領域で広くなれば、
周波数領域では狭くなる。

フーリエ変換



標本化定理（サンプリング定理）の証明

もとの信号の周波数成分は、抽出できない。

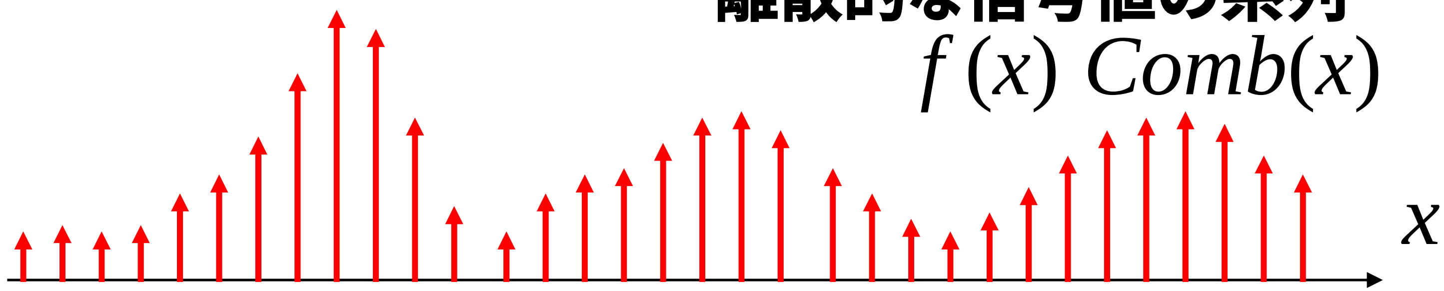


標本化定理（サンプリング定理）の証明

- 標本化間隔を狭くすると、どうなるか？

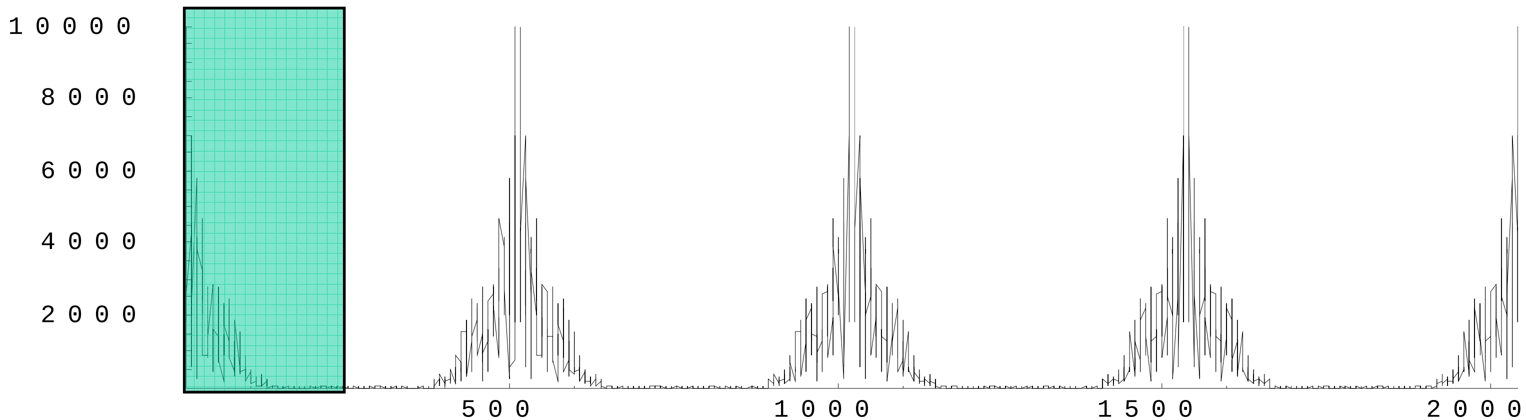
離散的な信号値の系列

$$f(x)\ Comb(x)$$



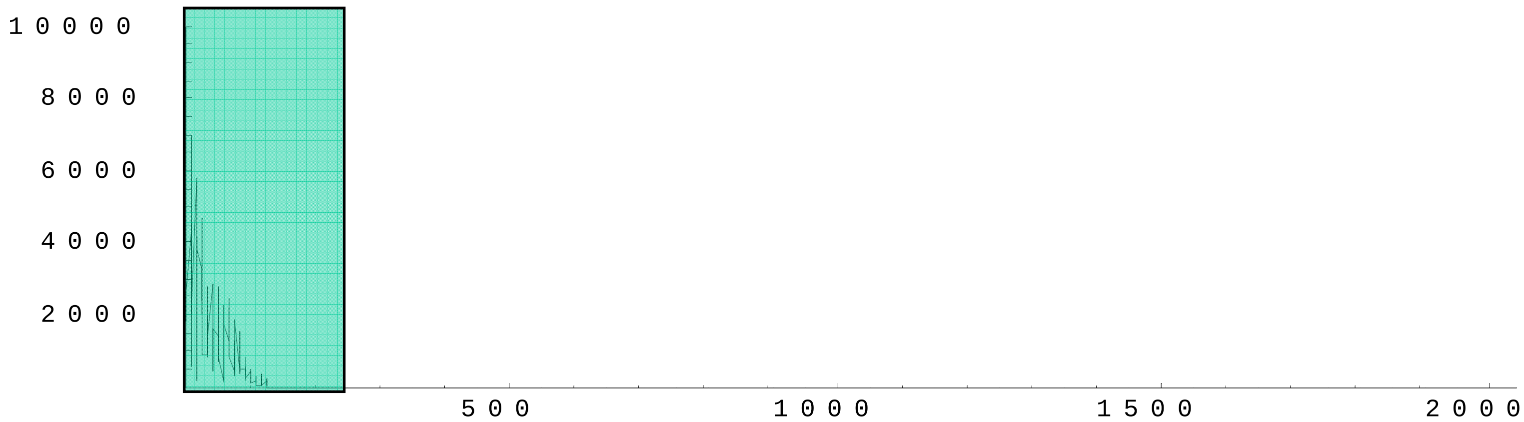
時間・空間領域で狭くなれば、
周波数領域では広くなる。

フーリエ変換



標本化定理 (サンプリング定理) の証明

もとの信号の周波数成分は、余裕も持って抽出できる。



演習問題：Mathematicaによる「標本化定理」の証明

- 授業ホームページ（www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/の授業ページ）の、以下のデジタル信号データファイルをダウンロードせよ。
  - 信号データ（「標本化定理」演習用）　連続信号データファイル
    - データファイル（長さ８１９２）
      信号振幅１倍
  - くし型関数データ（「標本化定理」演習用）
    - データファイル（長さ８１９２）
      - 間隔８
      - 間隔１６
      - 間隔３２
      - 間隔６４
      - 間隔１２８
  - 矩形関数データ（「標本化定理」演習用）
    - データファイル（長さ８１９２）
      - 幅５１２　（くし型関数　間隔８　に対応）
      - 幅２５６　（くし型関数　間隔１６　に対応）
      - 幅１２８　（くし型関数　間隔３２　に対応）
      - 幅６４　（くし型関数　間隔６４　に対応）
      - 幅３２　（くし型関数　間隔１２８　に対応）

演習問題：Mathematicaによる「標本化定理」の証明

- 授業ホームページ（www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/ の授業ページ）の、以下のデジタル信号データファイルをダウンロードせよ。
  - 信号データ（「標本化定理」演習用）
    - グラフとして、プロットする。
    - フーリエ変換して、グラフとしてプロットする。
  - くし型関数データ（「標本化定理」演習用）
    - データファイル（長さ８１９２）
      - 最初は、間隔１６を選び、グラフとしてプロットする。
      - 信号データ（連続信号）と「くし型関数」を掛け算して(標本化を行って）、グラフとしてプロットする。
      - それをフーリエ変換して、グラフとしてプロットする。
  - 矩形関数データ（「標本化定理」演習用）
    - データファイル（長さ８１９２）
      - 幅２５６　（間隔１６に対応）を選び、グラフとしてプロットする。
      - さきほどのフーリエ変換の結果と掛け算して、グラフとしてプロットする。
      - それを逆フーリエ変換して、グラフとしてプロットする。
        - » この結果は、標本化された離散値の系列から復元されたものである。
        - » 標本化する前の信号データのプロットと比較する。

以上を、異なる標本化間隔でもやってみる。

演習問題：Mathematicaによる「標本化定理」の証明

- 標本化間隔が広い場合（例えば、間隔６４の場合）には、元の連続波形を復元することができなくなる。そのような場合に、適切な連続波形復元を行えるようにするために、どのような前処理を行えばよいか？　考えよ。
- 考えた方法をMathematicaで実装して、その有効性を確かめよ。