デジタル情報処理

直交関数展開

佐藤　嘉伸

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

日本語ページ → 授業の資料 → デジタル情報処理

デジタル情報処理：授業の予定

- 最小二乗法
  - 多変数の微分の基礎
  - 線形代数の基礎
- 直交関数展開
- フーリエ解析
- 標本化定理
- （主成分分析）

高校 数II のレベルを前提とする。
重要な数理手法をわかりやすく説明する。
重要項目に重点を絞る。

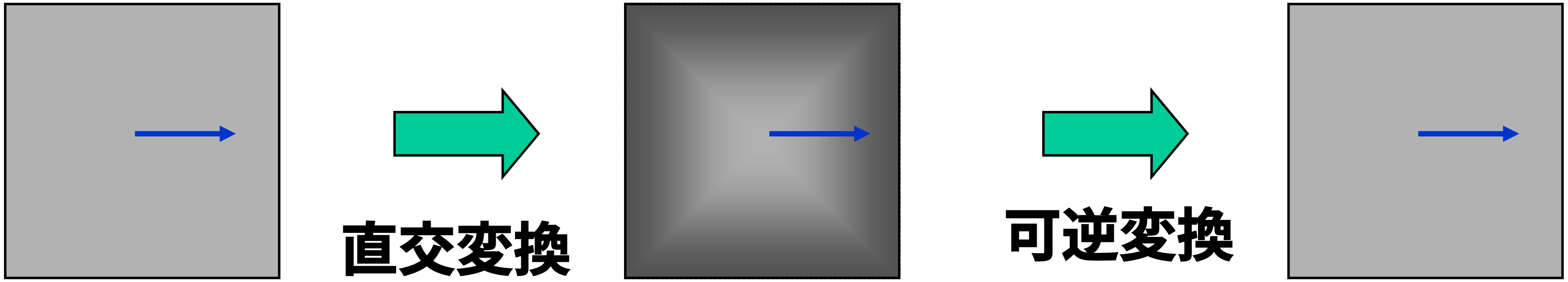
直交関数展開

- 正規直交変換とは何か？　何の役に立つのか？
  - 直交変換とは？
  - 正規直交変換とは？
- ベクトルから関数へ
  - 関数は、(無限次元) ベクトルである。
  - ベクトルから関数へ
  - 直交関数とは？
  - 正規直交関数系とは？
- 直交関数展開
  - なぜ直交関数展開を行うか？
  - 直交関数による関数の最小二乗近似

直交変換とは何か？
何の役に立つのか？

直交変換とは何か？　何の役に立つのか？

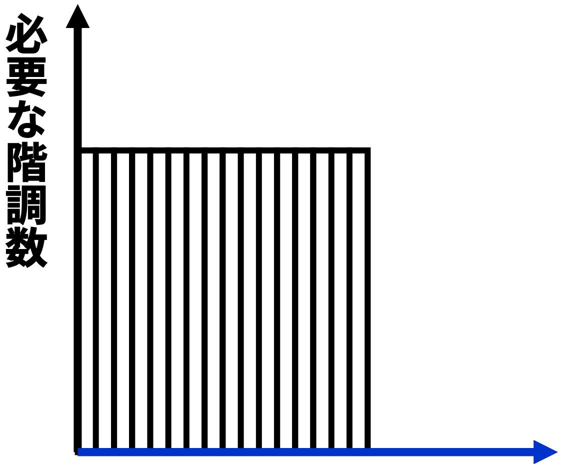
・画像データの圧縮（ＪＰＥＧなど）

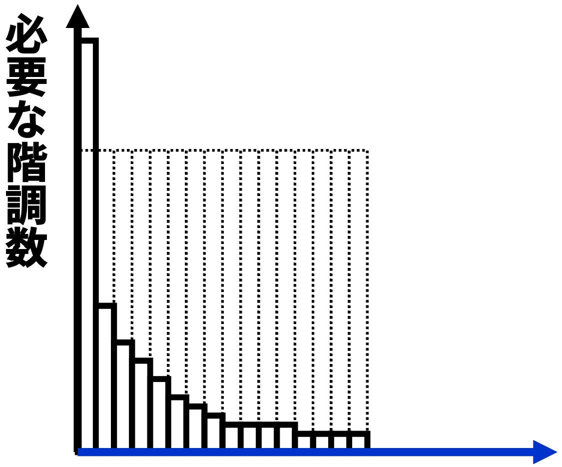


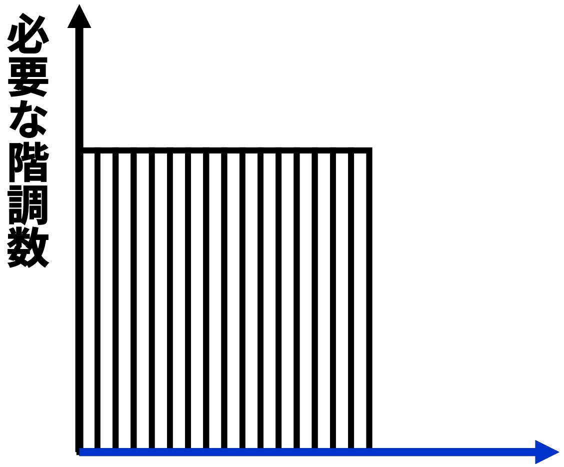
（必要な階調数（ビット数）を明るさで示している。）

すべての画素が２５６階調（８ビット）

画像の場所によって、各画素あたり１０２４階調（１０ビット）から２階調（１ビット）

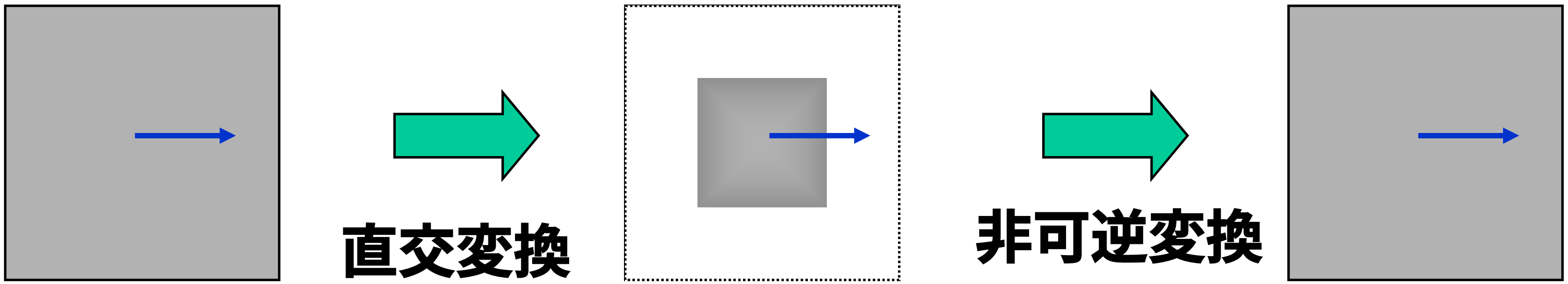






直交変換とは何か？　何の役に立つのか？

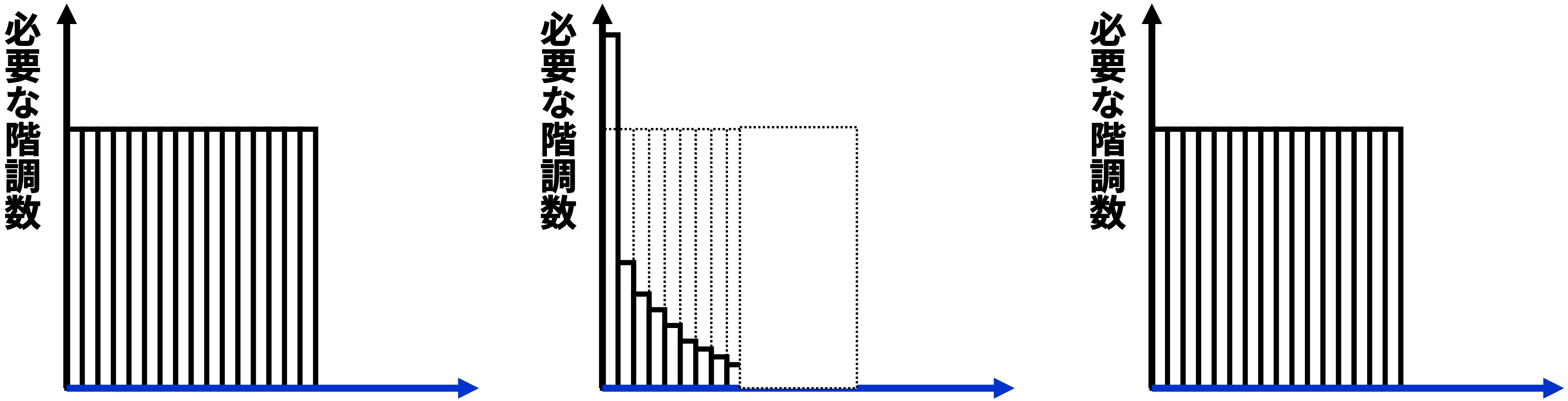
・画像データの圧縮(JPEGなど)



(必要な階調数(ビット数)を明るさで示している。)

すべての画素が256階調(8ビット)

画像の場所によって、各画素あたり1024階調(10ビット)から2階調(1ビット)



画像データ

- 320×240画素、各画素256階調：256＝2^8 (8 bit = 1 byte)

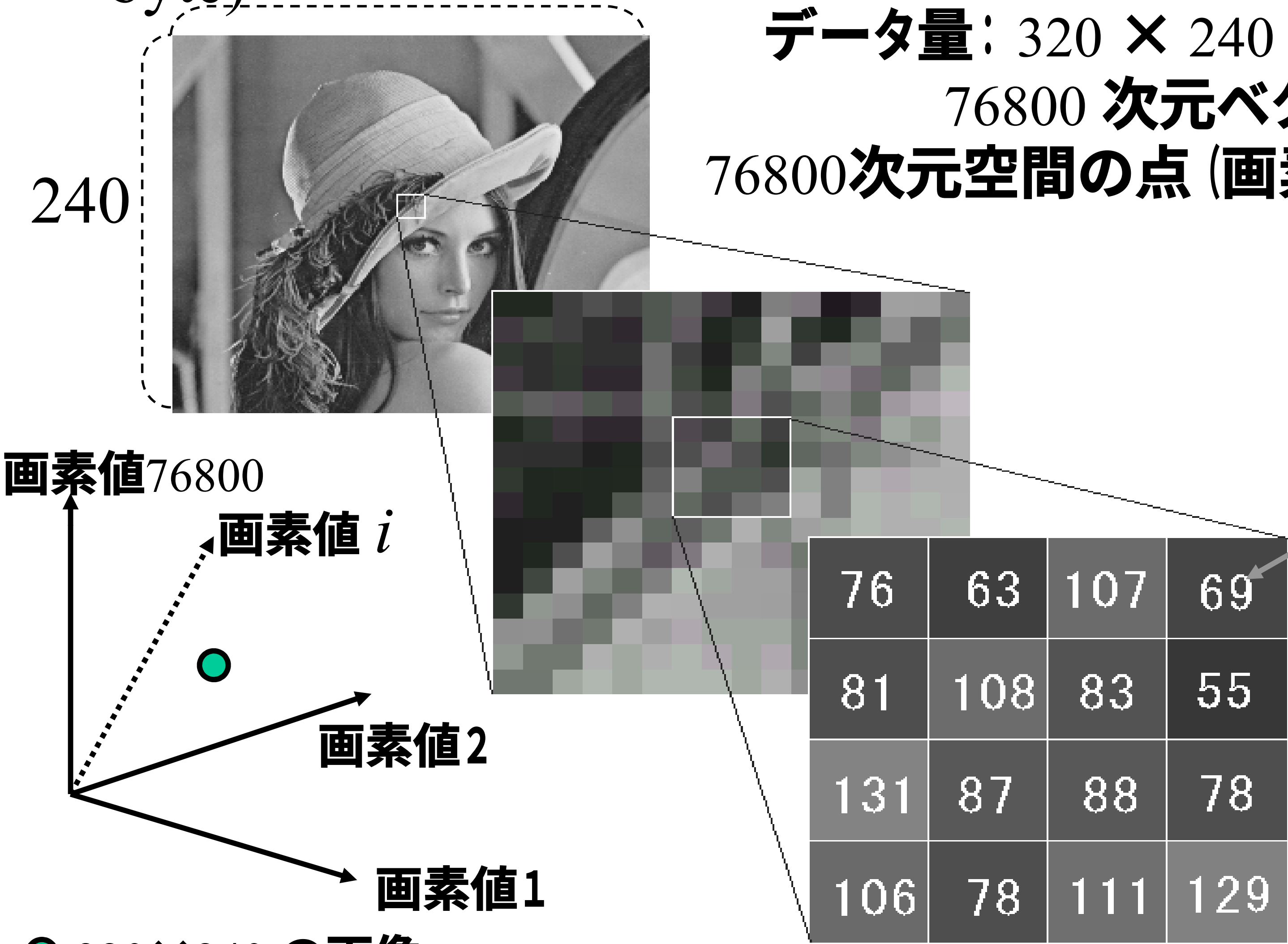
データ量：320 × 240 = 76800 byte

76800 次元ベクトル

76800次元空間の点（画素値が座標値）

320

240

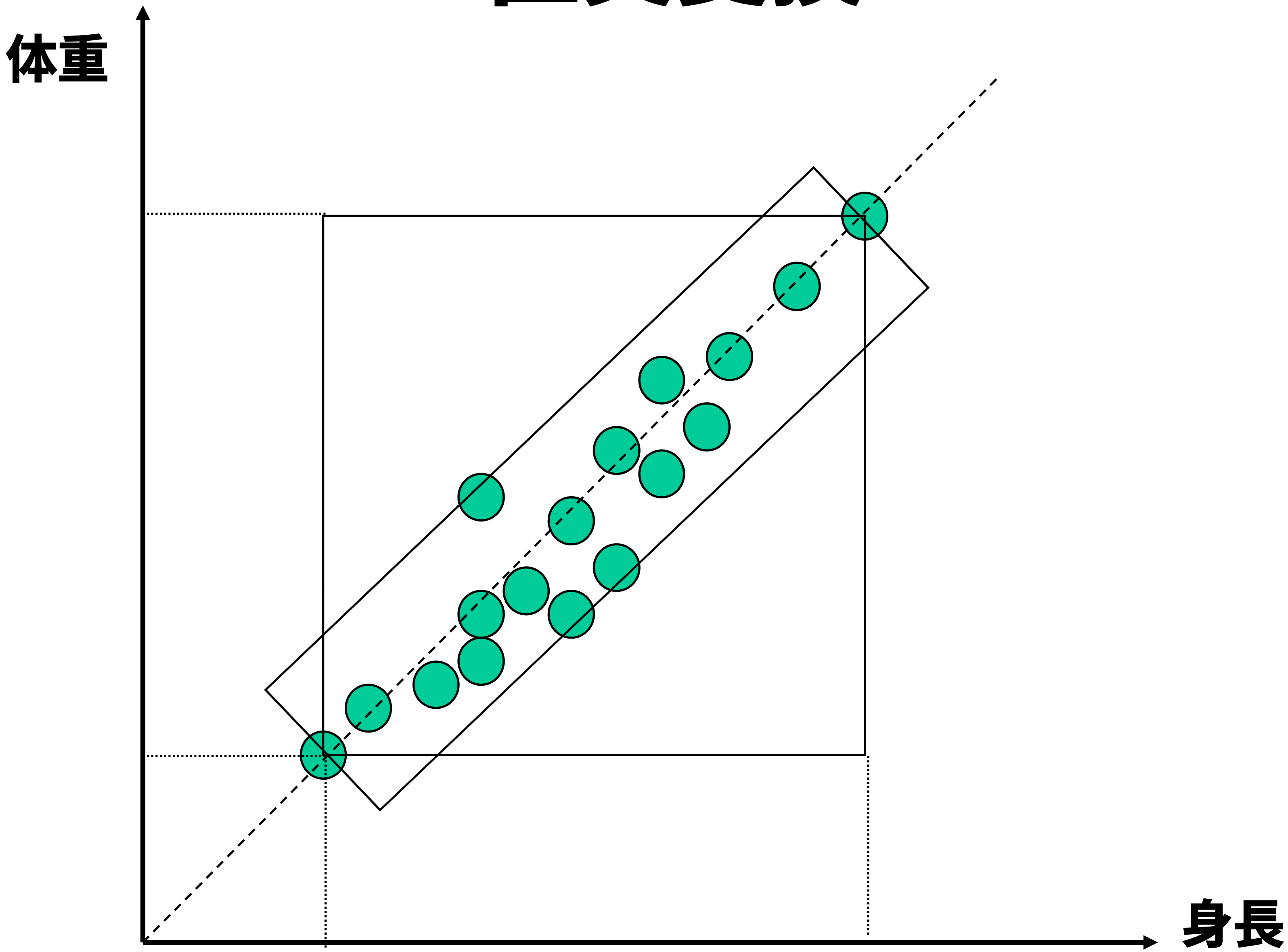


256階調

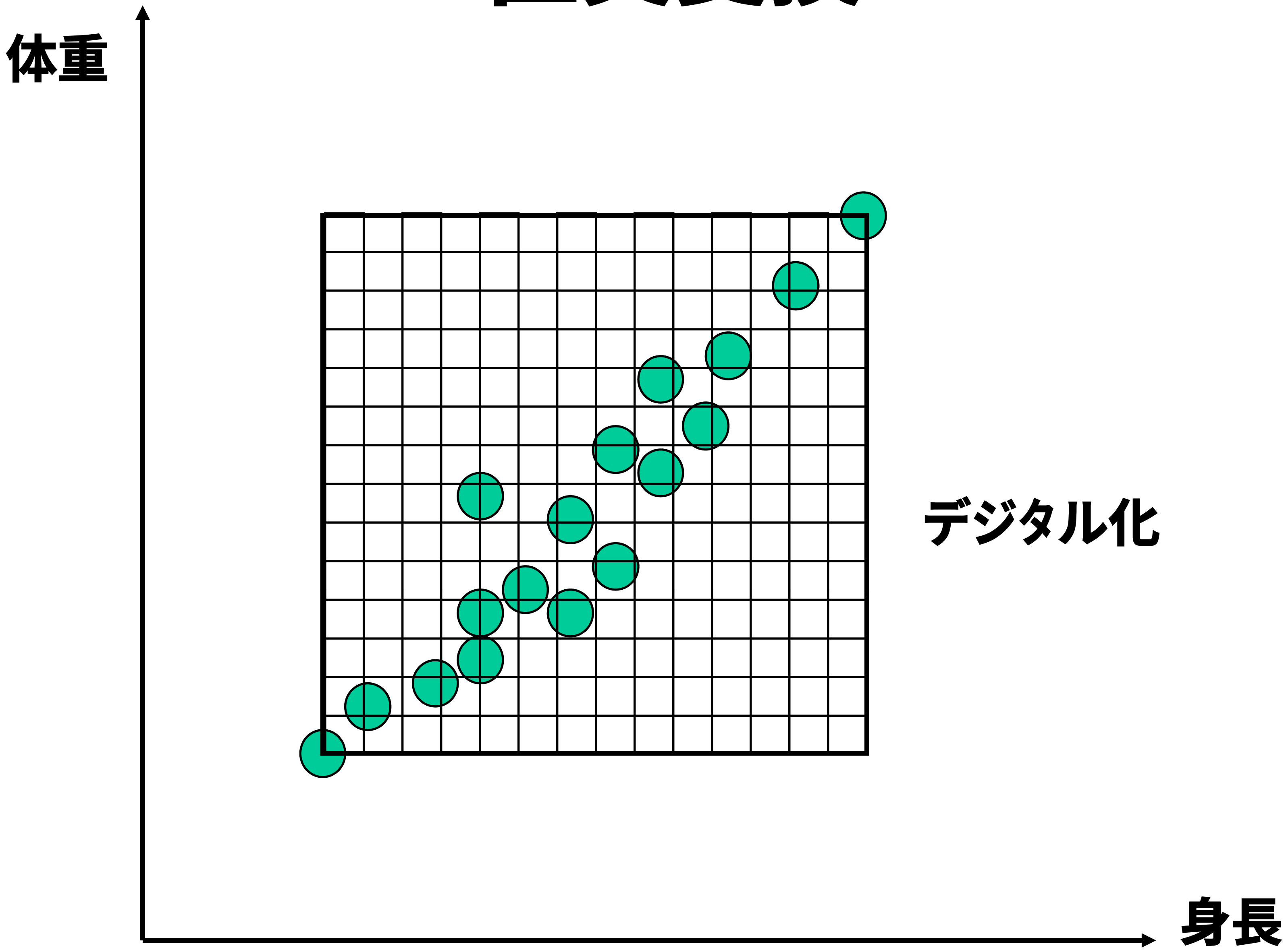
0 ~ 255

● 320×240 の画像

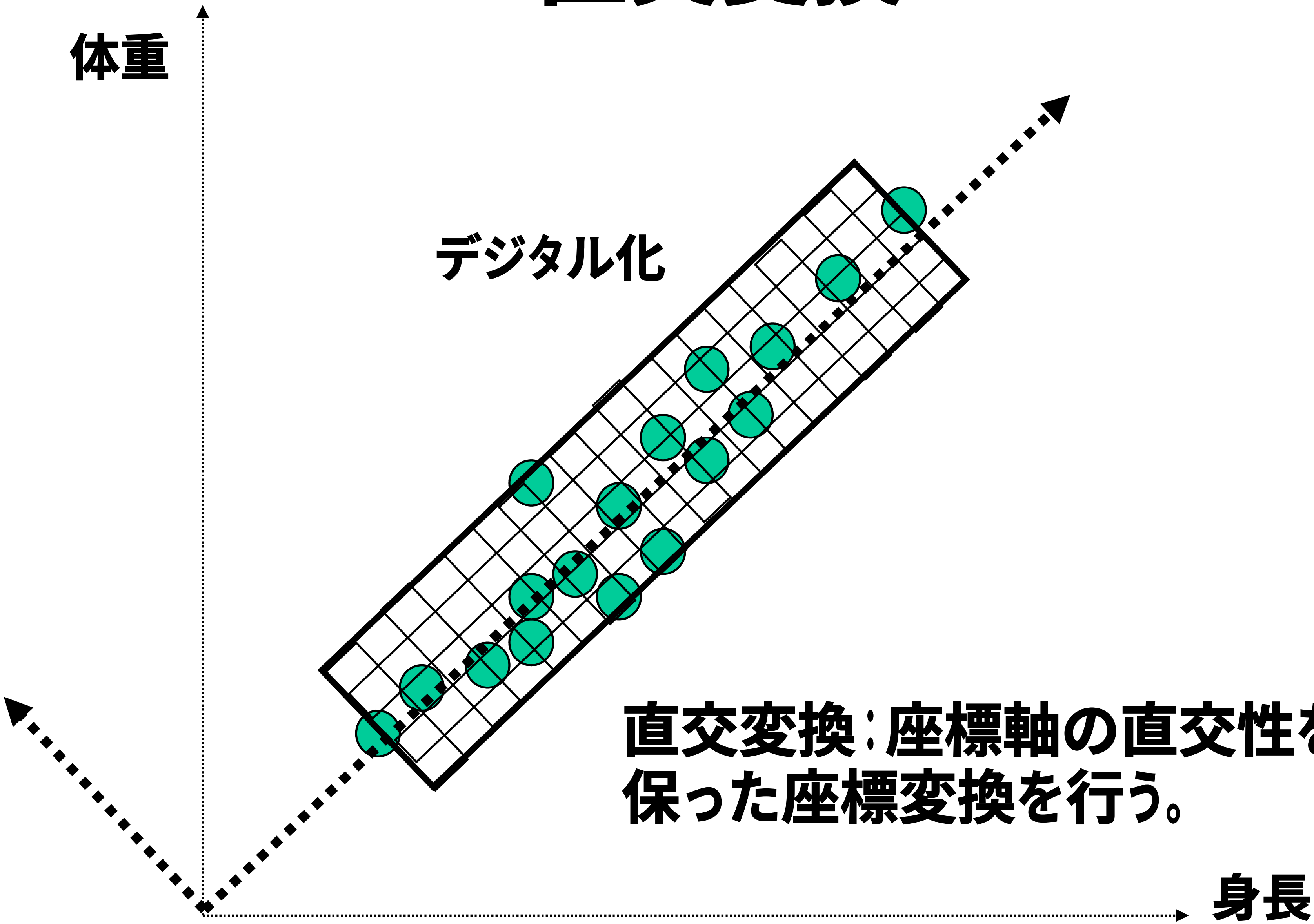
直交変換



直交変換

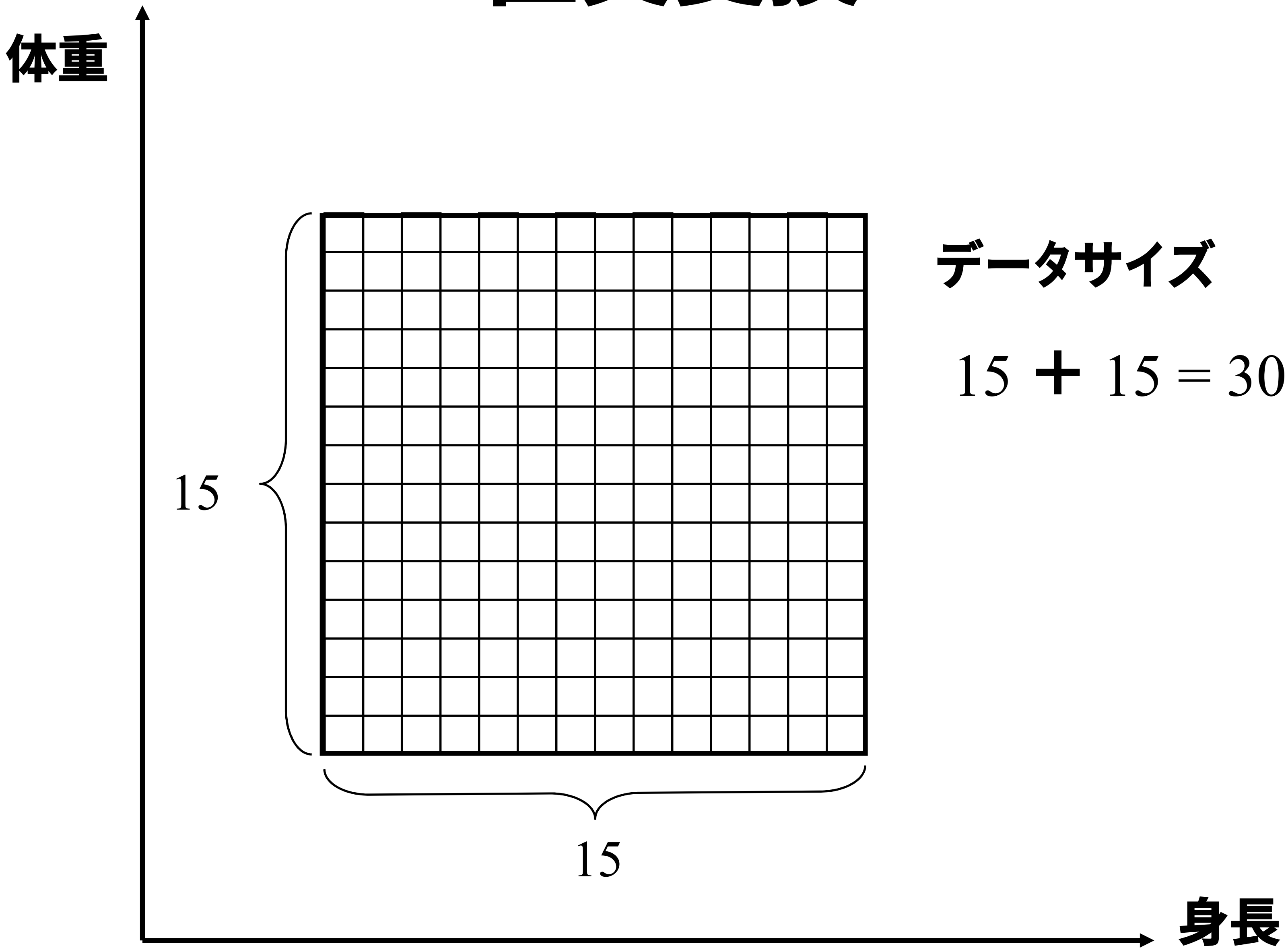


直交変換

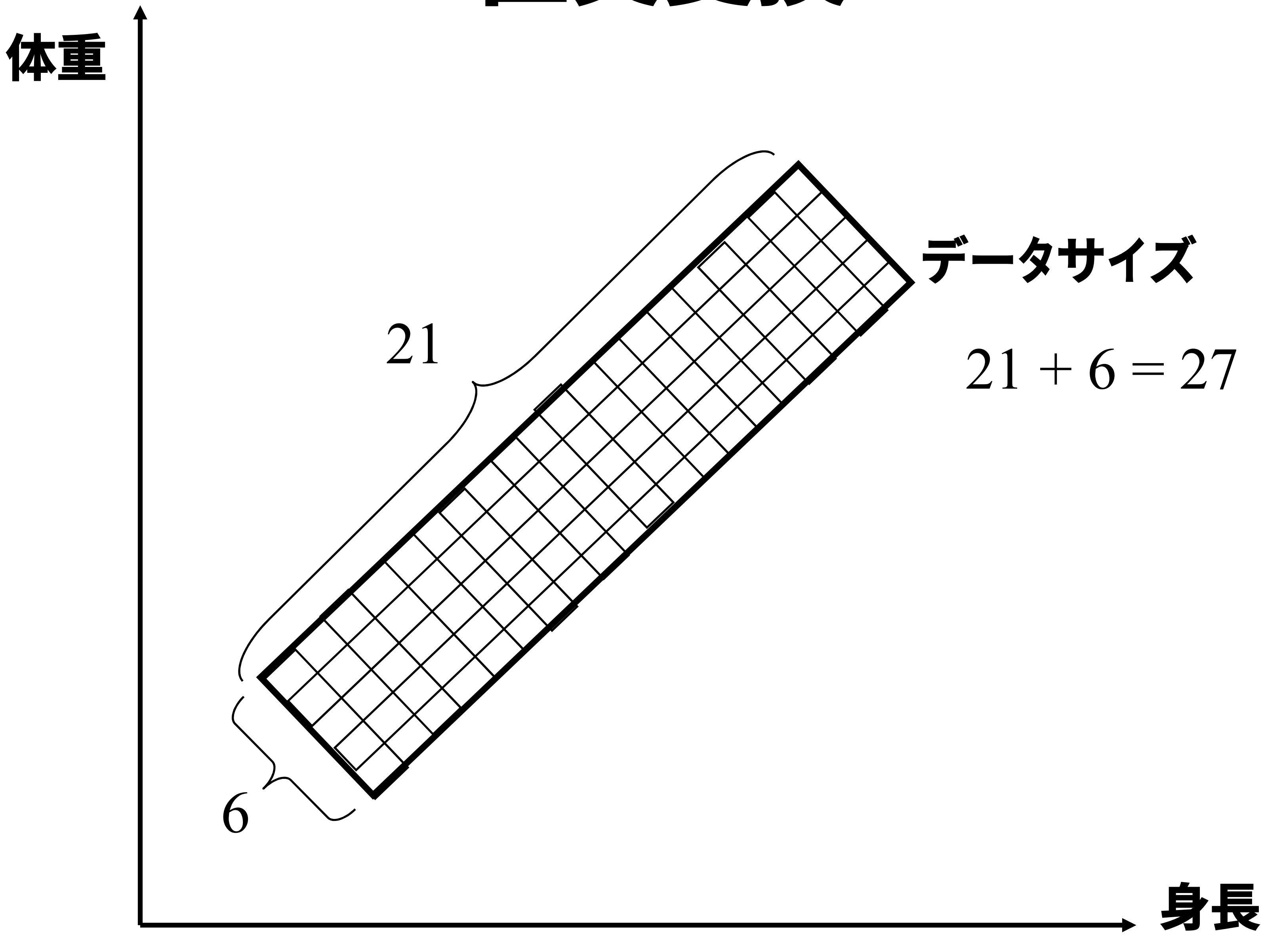


直交変換：座標軸の直交性を保った座標変換を行う。

直交変換



直交変換

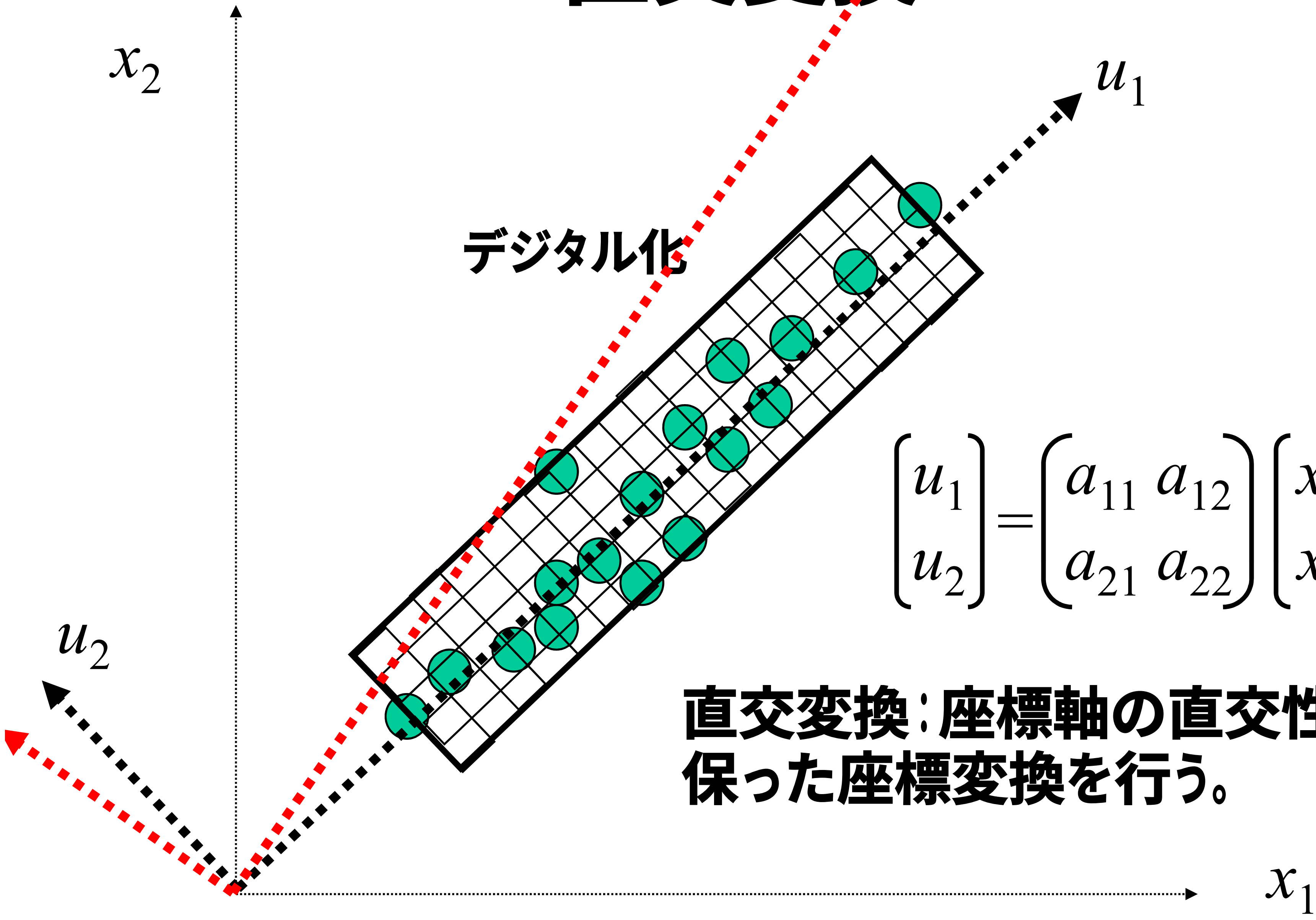


直交変換

- 身長、体重の2変数
  - データサイズ $15 + 15 = 30$
  - 身長がわかれば、体重の範囲は限られる。よって、直交変換後
    - データサイズ $21 + 6 = 27$
- 身長、体重、胸囲、座高、股下の6変数
  - データサイズ $15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75$
  - 身長と体重がわかれば、胸囲の範囲はさらに限られる。身長、体重、胸囲がわかれば、座高の範囲はさらにさらに限られる。。。。。。。よって、直交変換後
    - データサイズ $21 + 6 + 5 + 4 + 2 = 38$
- 直交変換により、多変数（＝多次元ベクトル）のデータサイズを大幅に小さくできる。

- 例えば、画像も一種の多次元ベクトルである。

直交変換



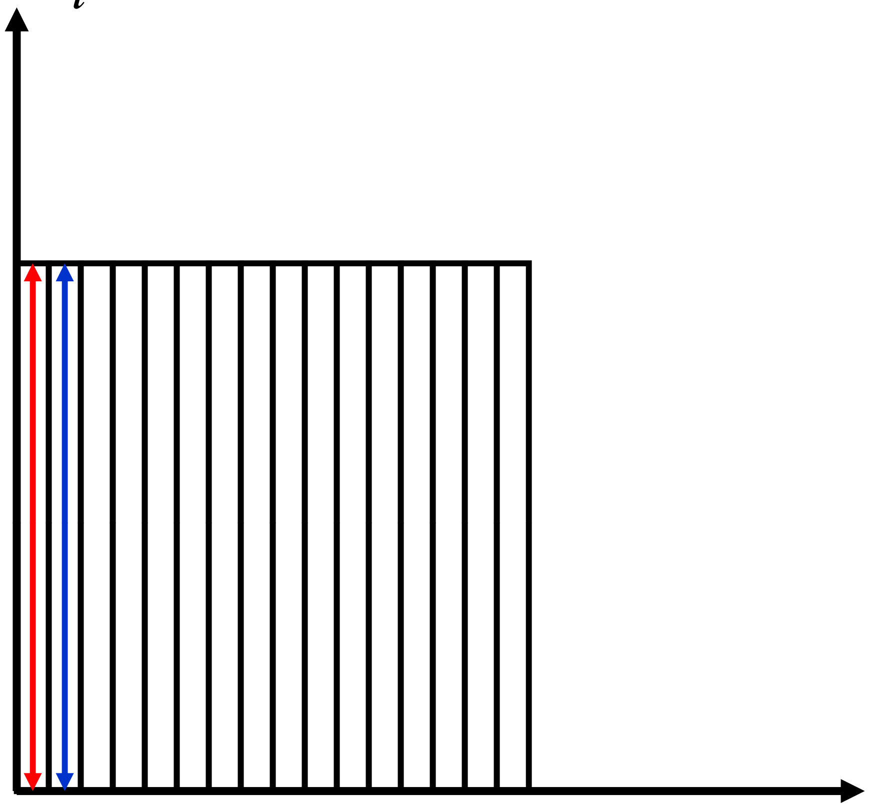
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性を保った座標変換を行う。

直交変換

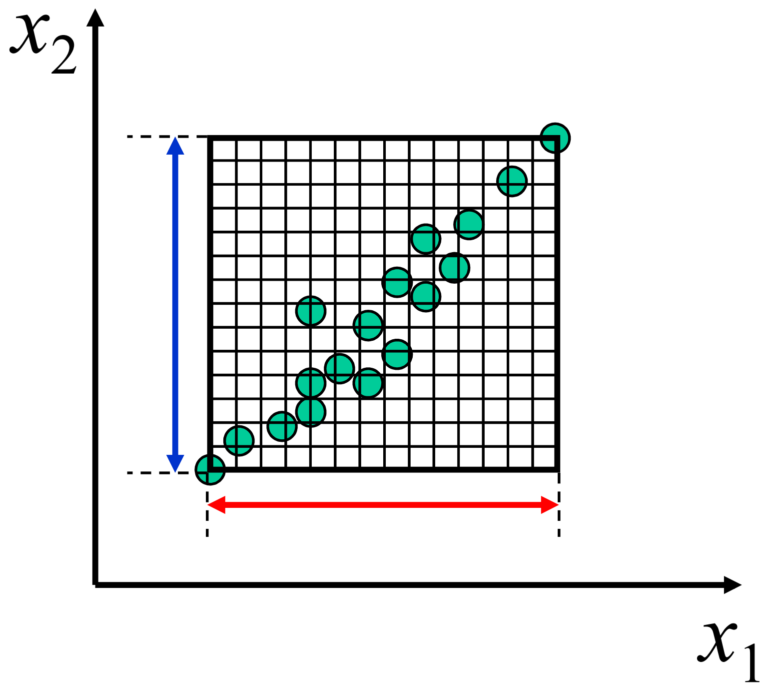
- 直交変換前　１６変数

各変数 x_i のデータサイズ



各変数 x_i

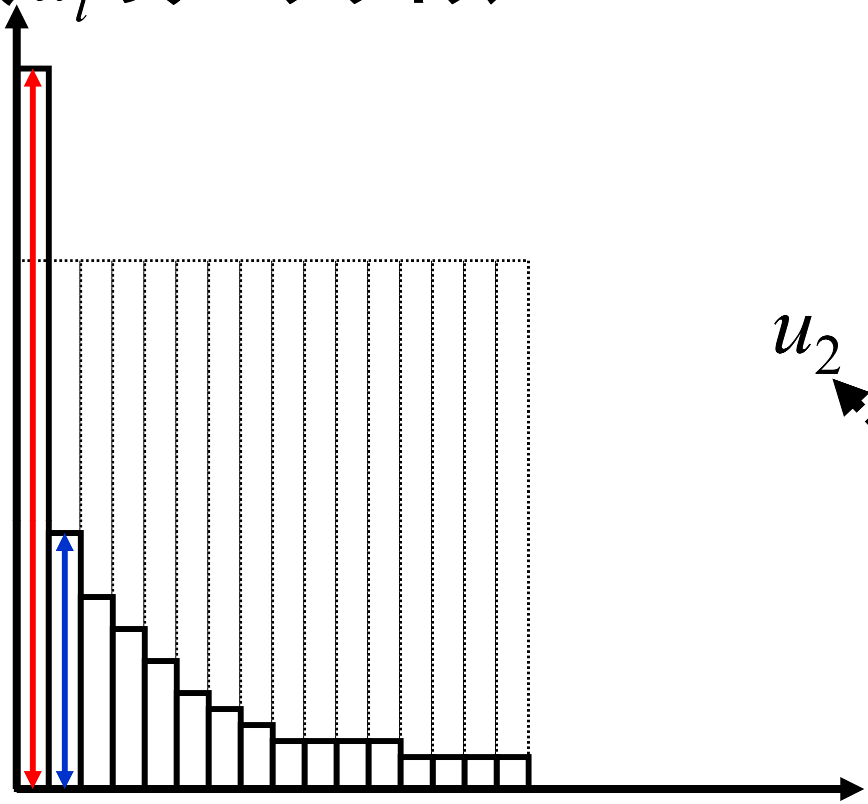
$i = 1, 2, \ldots., 16$



直交変換

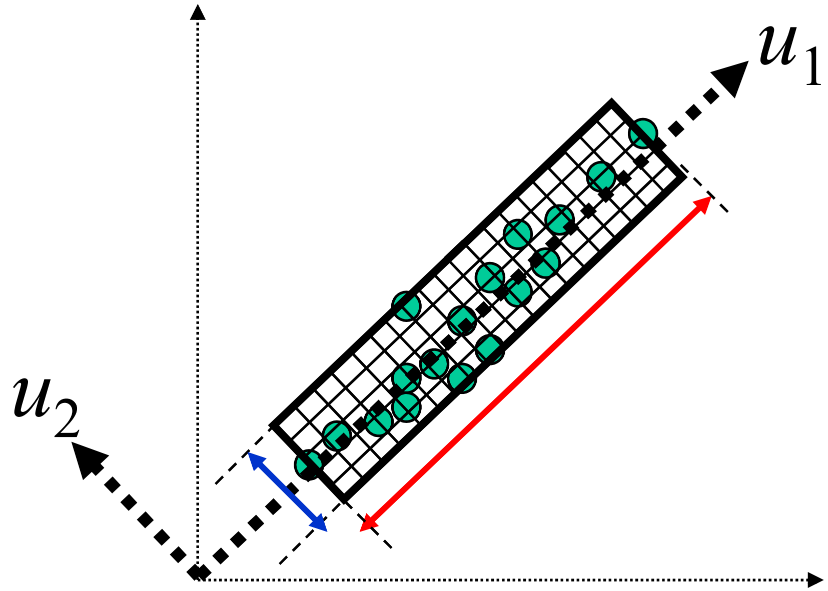
- 直交変換後　１６変数　（１６次元の直交変換）

各変数 u_i のデータサイズ

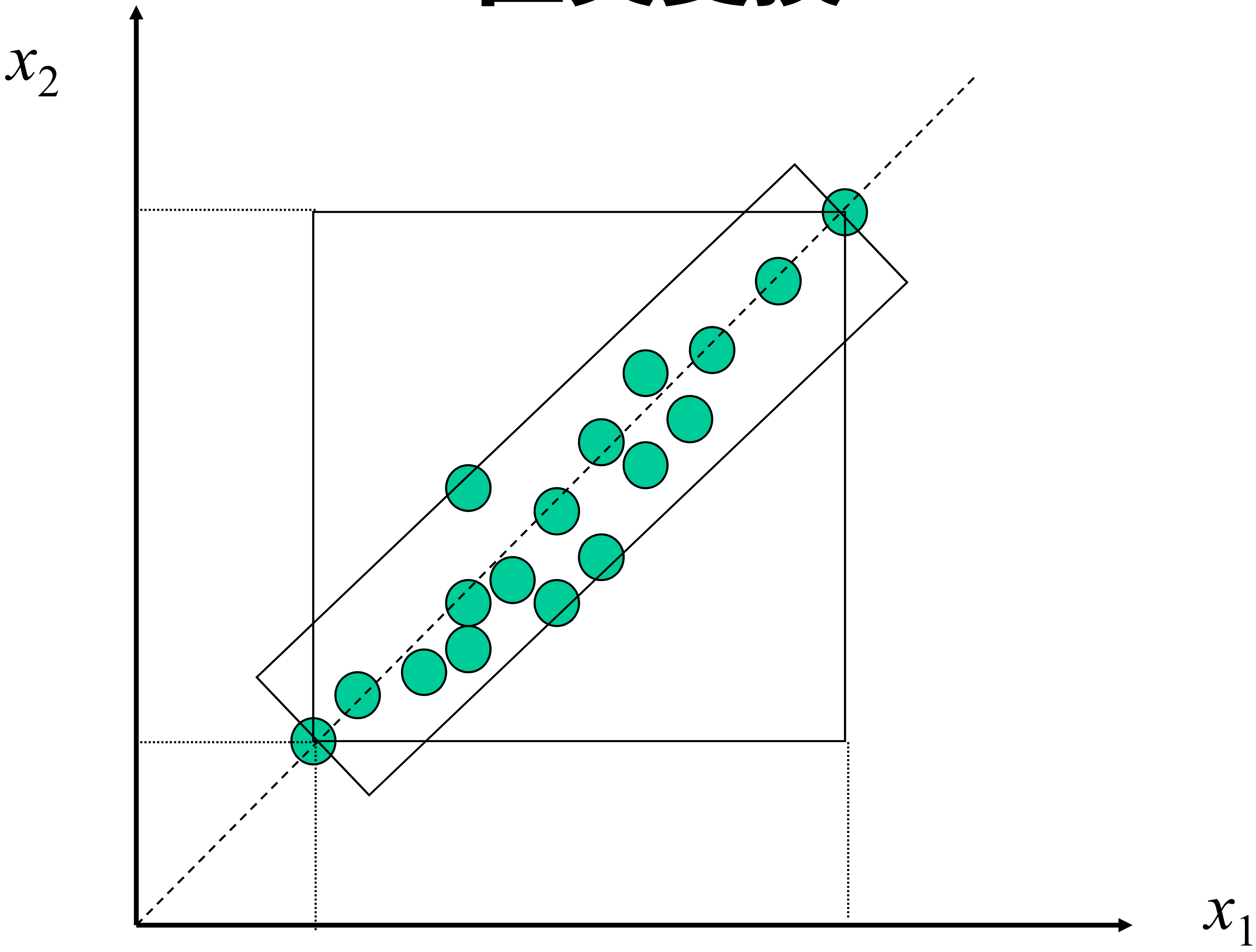


直交変換後の各変数 u_i

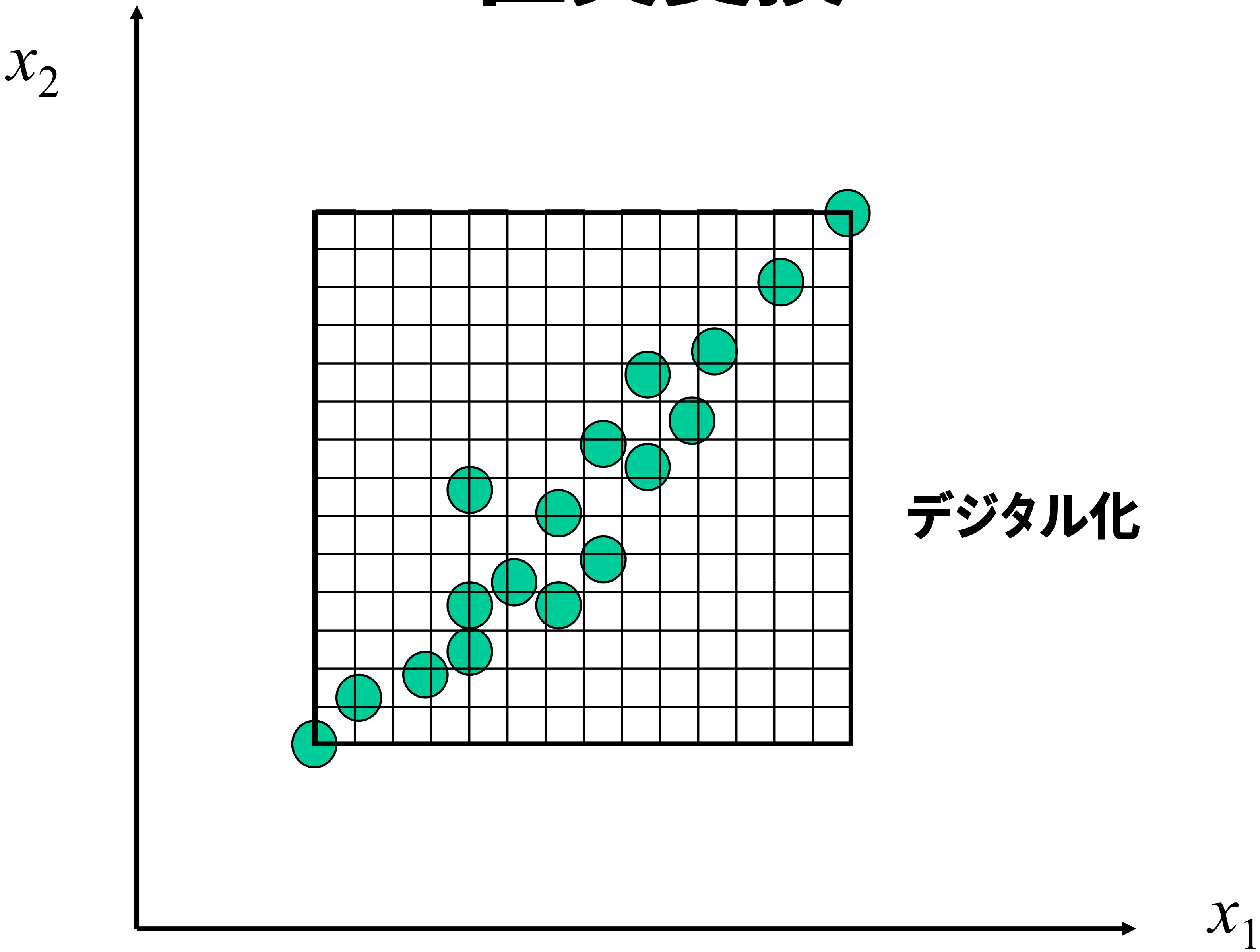
$i = 1, 2, \ldots., 16$



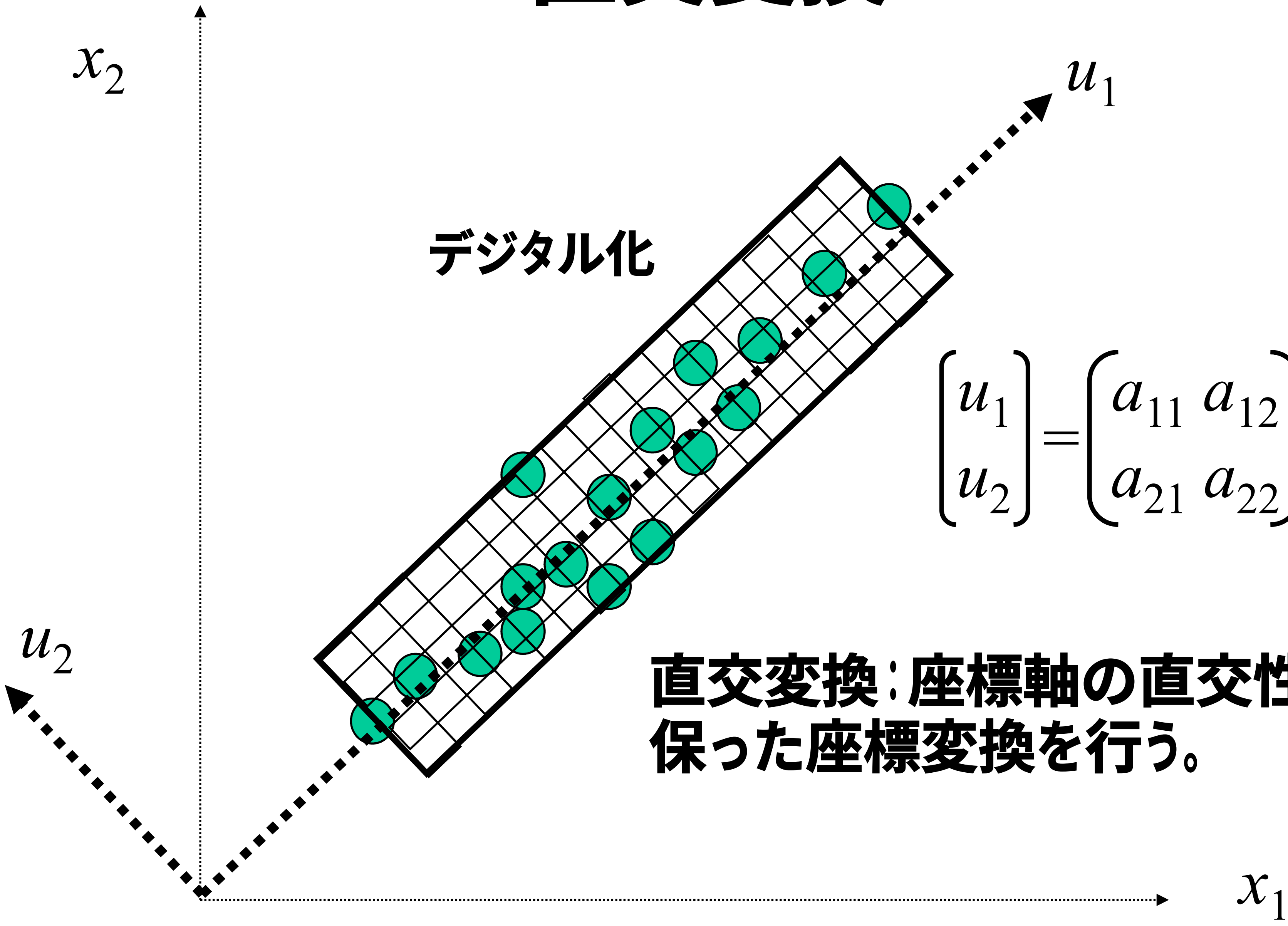
直交変換



直交変換



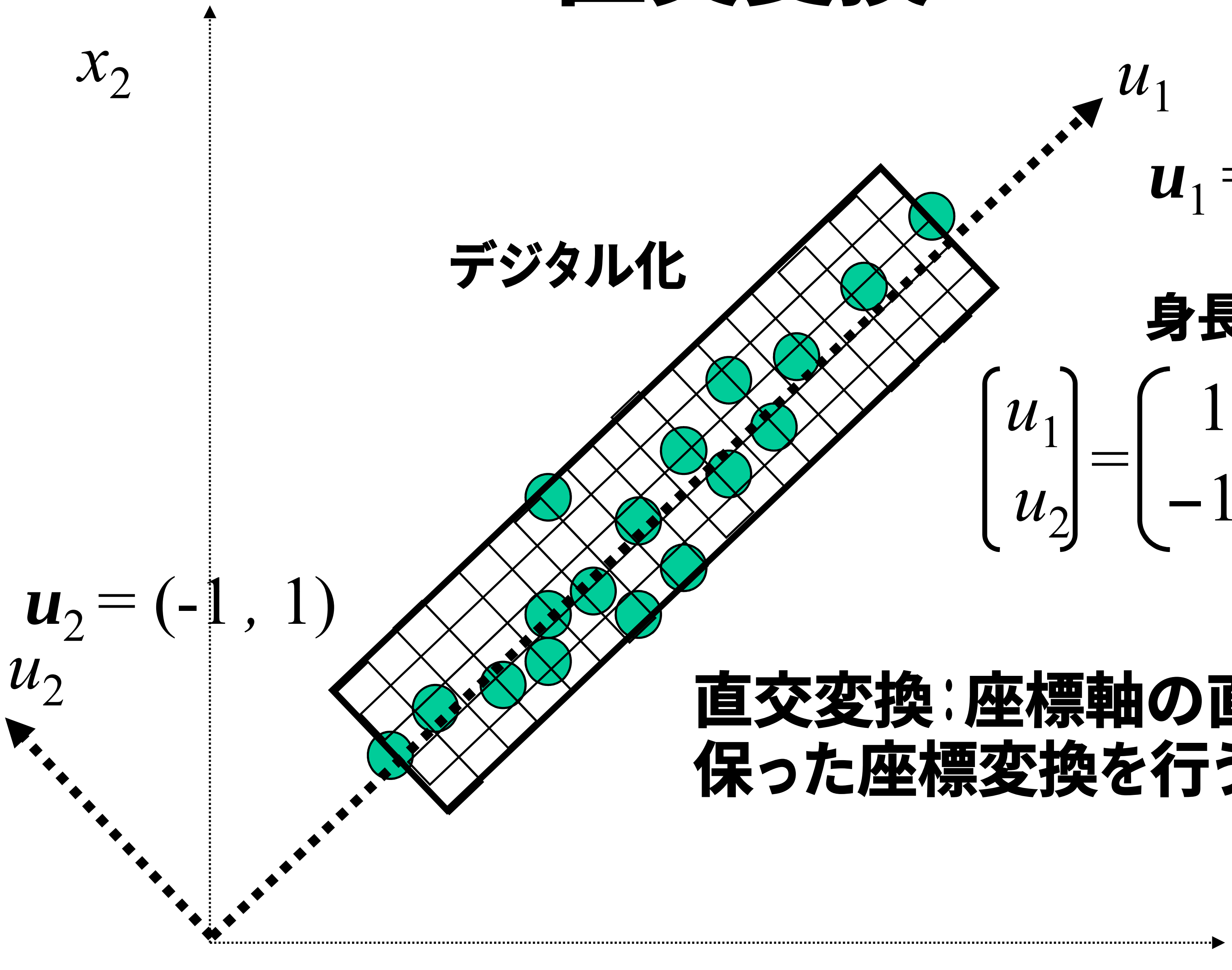
直交変換



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性を保った座標変換を行う。

直交変換

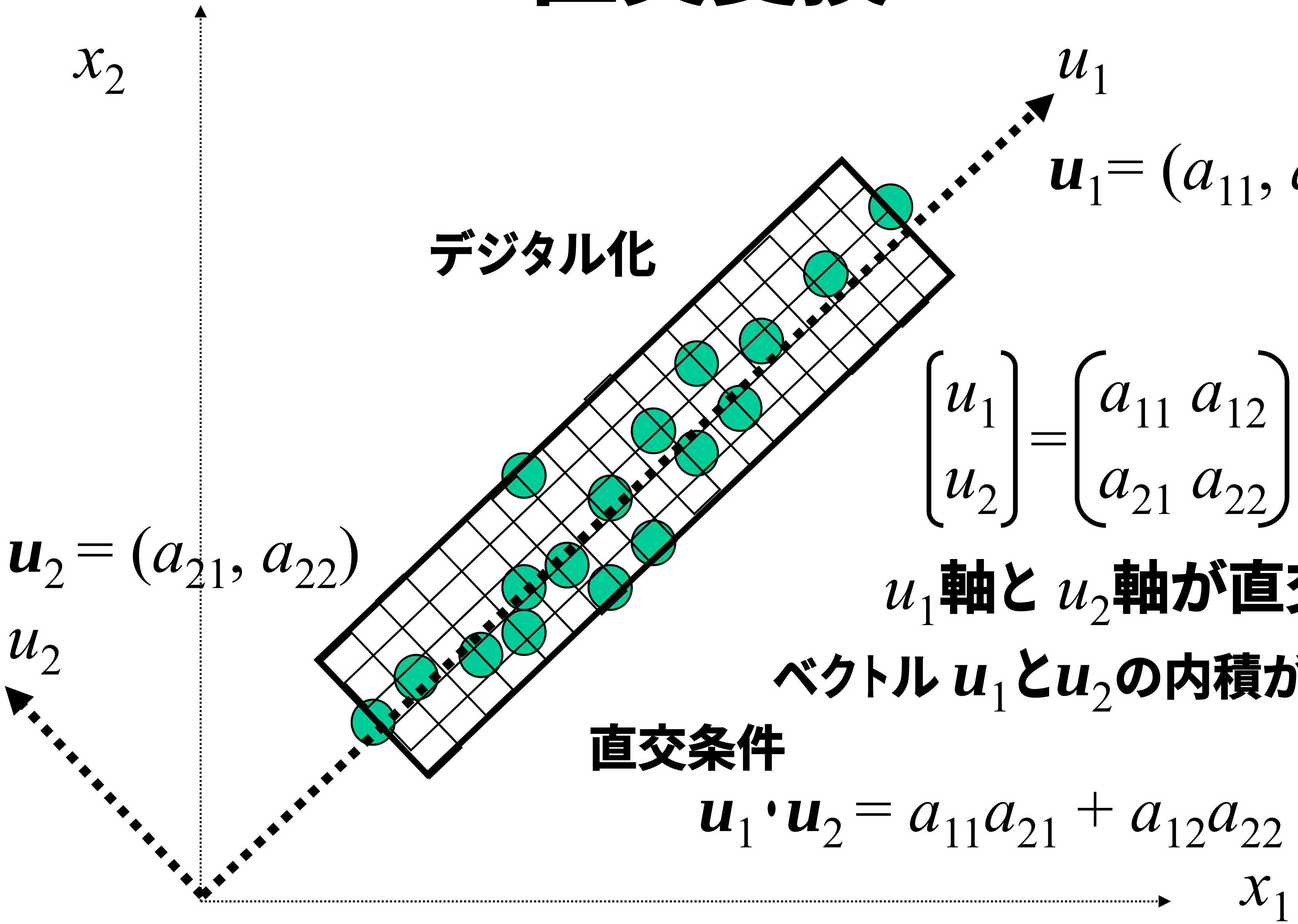


身長、体重

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性を保った座標変換を行う。

直交変換



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

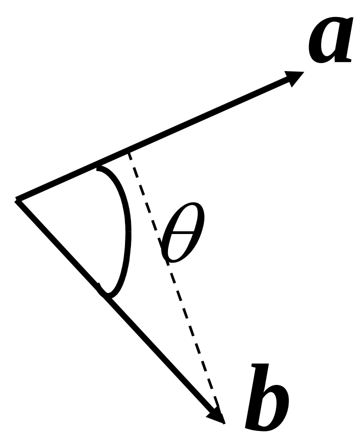
u_1軸と u_2軸が直交

ベクトル $\boldsymbol{u}_1$と$\boldsymbol{u}_2$の内積がゼロ。

直交条件

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

ベクトルの直交条件



- ２次元ベクトルの場合

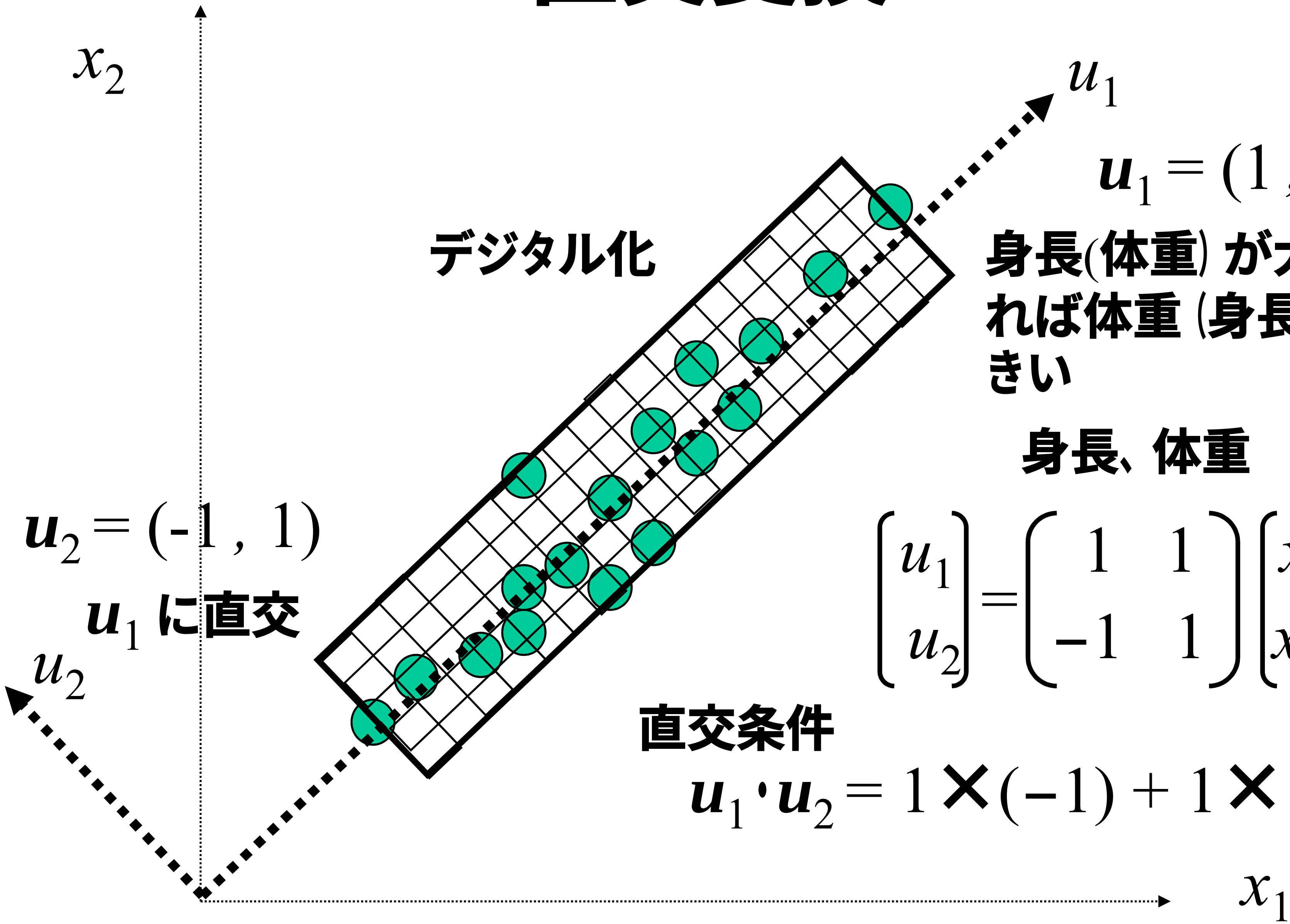
$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$$

直交条件　＝　内積がゼロ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

直交変換



$\boldsymbol{u}_1 = (1\,,\ 1)$

身長(体重) が大きければ体重 (身長) も大きい

$\boldsymbol{u}_2 = (\text{-}1\,,\ 1)$

$\boldsymbol{u}_1$ **に直交**

身長、体重

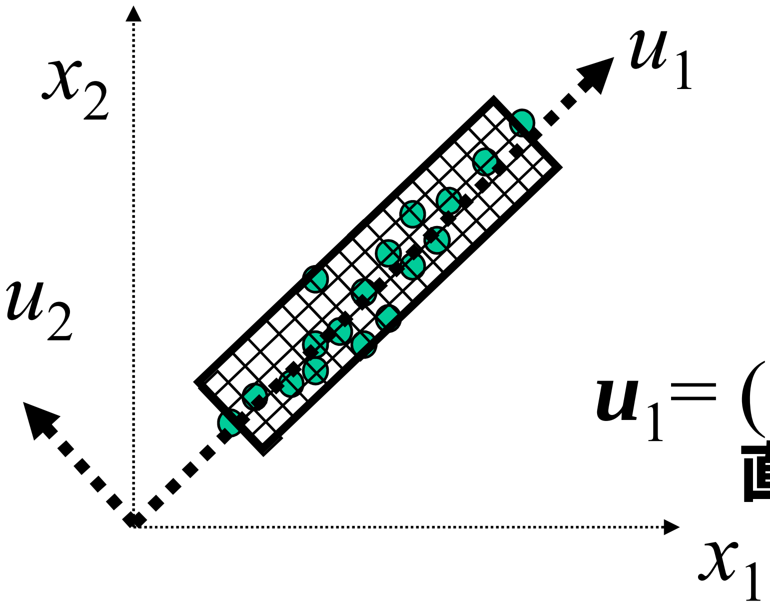
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交条件

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$

直交変換

座標軸の直交性を保った座標変換。3変数の場合は？



身長、体重、胸囲

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)$　$\boldsymbol{u}_2 = (1,0,-1)$　$\boldsymbol{u}_3 = (1,-2,1)$

直交条件

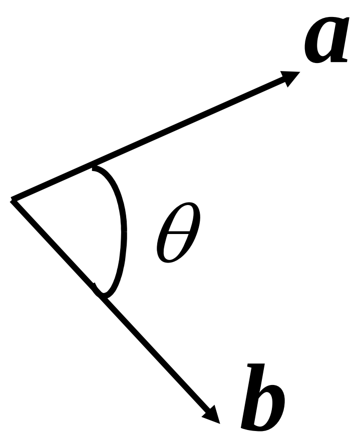
$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$$
$$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 1 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 1 = 0$$
$$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$\boldsymbol{u}_1$：身長、体重、胸囲の中で、1つが大きくなれば他の2つも大きくなる。

$\boldsymbol{u}_2$：$\boldsymbol{u}_1$に直交する。体重が同じ場合、身長が大きくなれば、胸囲は小さくなる。

$\boldsymbol{u}_3$：$\boldsymbol{u}_1$と$\boldsymbol{u}_2$に両方に直交する。

ベクトルの直交条件



- n次元ベクトルの場合

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)$$

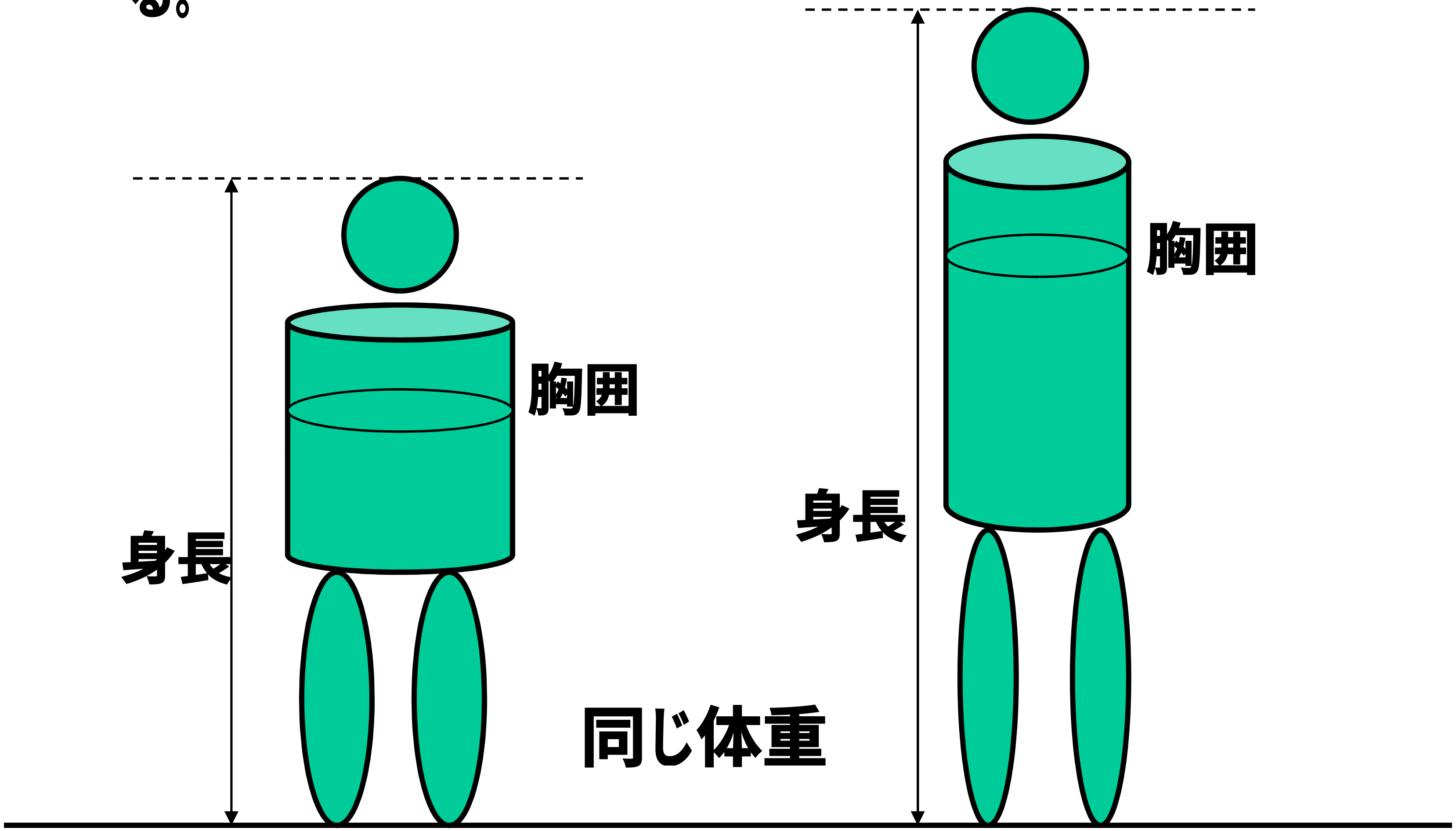
直交条件 ＝ 内積がゼロ

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_i b_i + \ldots + a_n b_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta = 0$$

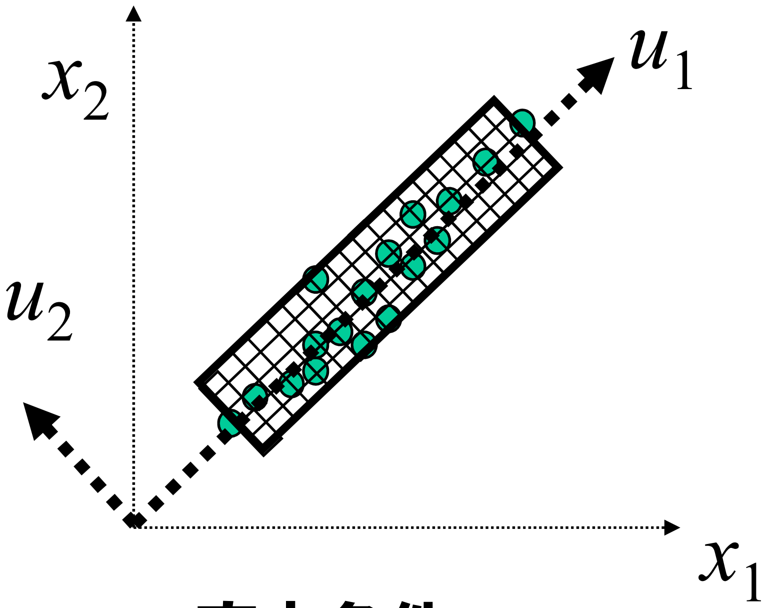
直交変換：2番目の軸

- 体重が同じ場合、身長が大きくなれば、胸囲は小さくなる。



直交変換 （アダマール変換）

座標軸の直交性を保った座標変換。4変数の場合は？



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,1)$　$\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,1,-1)$

$\boldsymbol{u}_3 = (1,1,-1,-1)$　$\boldsymbol{u}_4 = (1,-1,-1,1)$

直交条件

$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$　$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$　$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0$

$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$　$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0$

$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0$

直交条件を満たしているかどうかを確かめよ。

正規直交変換

- 座標軸の直交性を保ち、かつ、座標軸のスケールが変わらない座標変換。
- 4変数の場合
  - 直交： $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0,\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0,\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0,\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0,\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0,\ \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_4 = 0$
  - 正規化： $|\boldsymbol{u}_1| = 1,\ |\boldsymbol{u}_2| = 1,\ |\boldsymbol{u}_3| = 1,\ |\boldsymbol{u}_4| = 1$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u'}_1 / |\boldsymbol{u'}_1|$$

$$|\boldsymbol{u'}_1|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

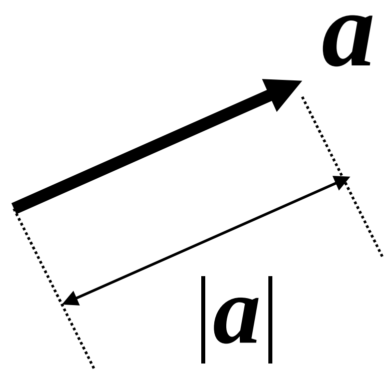
$$= 4 = 2^2$$

$$|\boldsymbol{u'}_1| = 2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

ベクトルの大きさ

- 2次元ベクトルの場合



$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$$

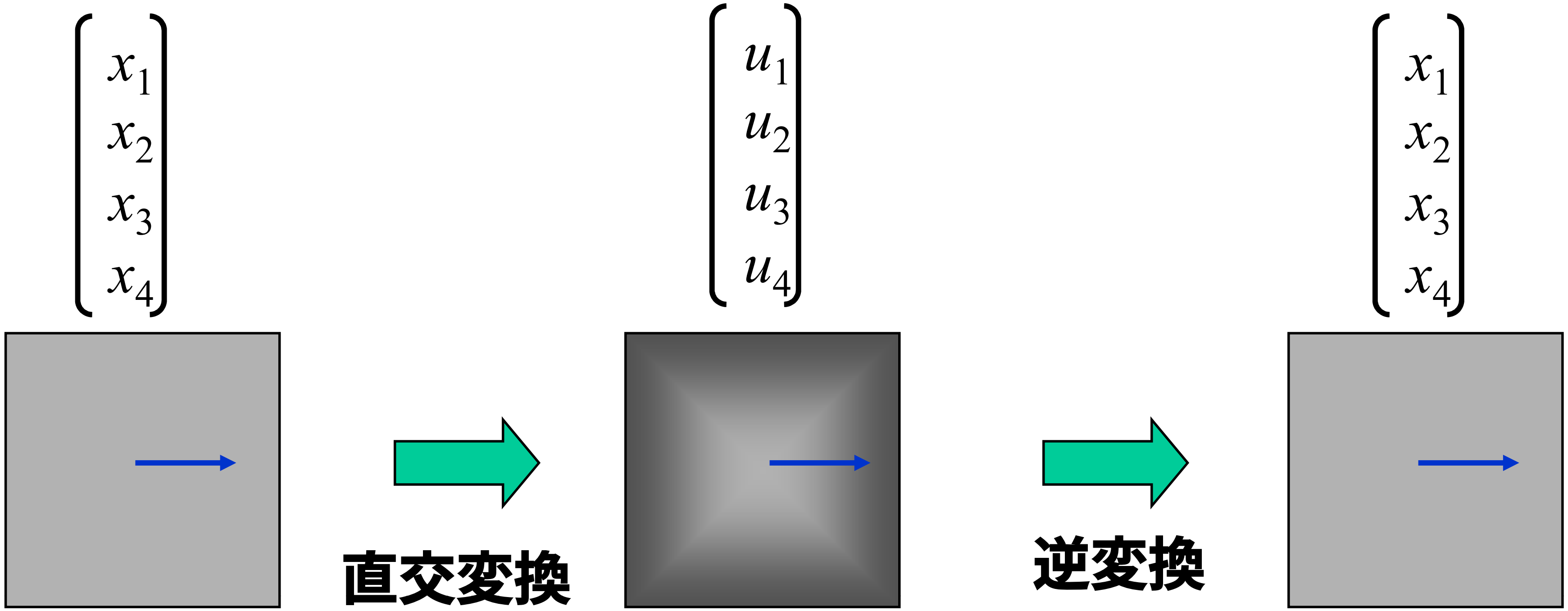
$$|\boldsymbol{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$$

- n次元ベクトルの場合

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \ \ldots + {a_i}^2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2$$

逆变换



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

正規直交変換：演習問題

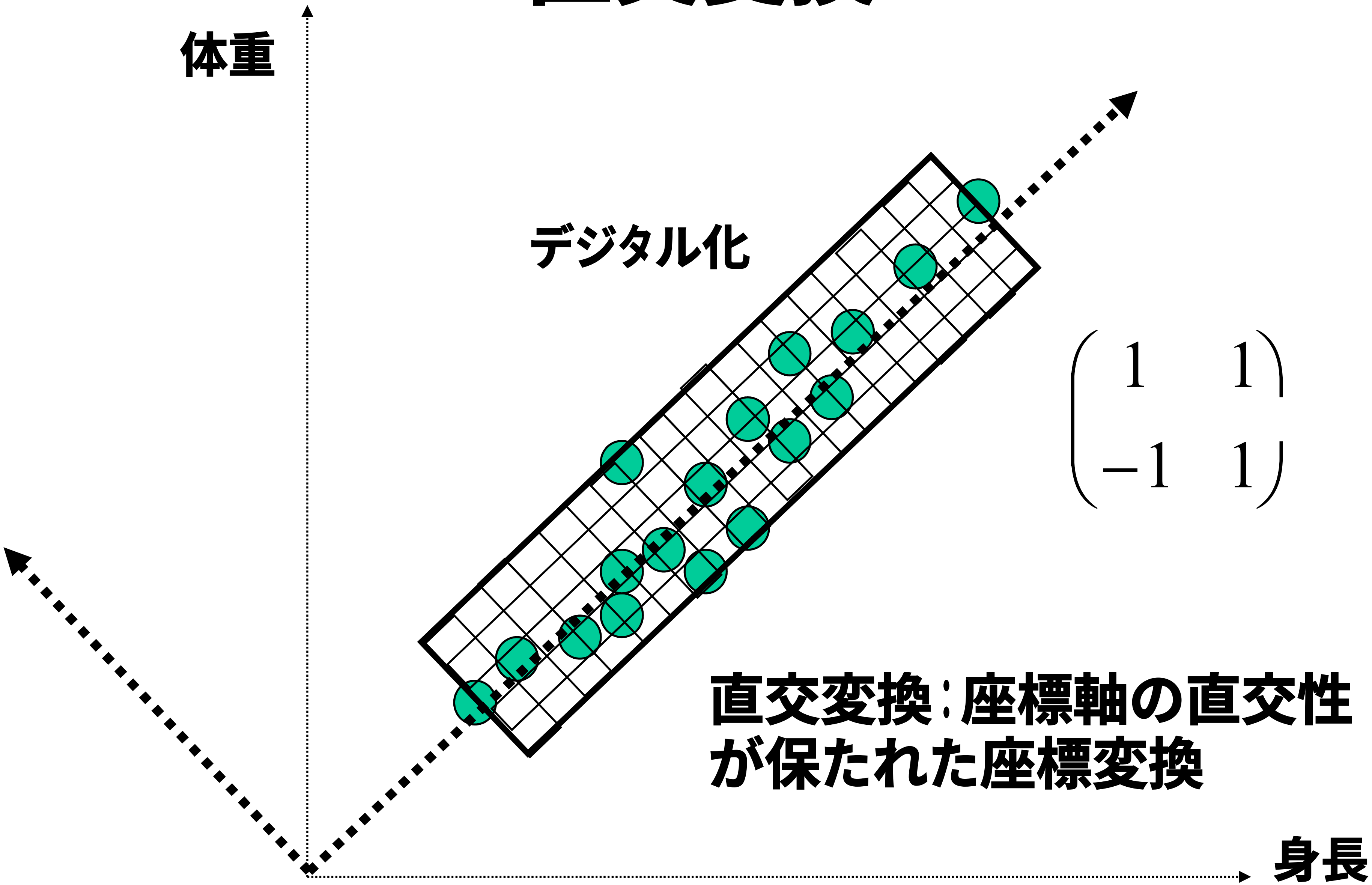
1. 以下の直交変換について、直交条件を満たしているかどうかチェックせよ。さらに、正規直交変換に修正せよ。

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. ３変数の直交変換を考えよ。（これまで示したもの以外のものを考えよ。直交条件を満たしているかどうかチェックせよ。） さらに、正規直交変換になるように修正せよ。

3. 320×240（画素）の画像を直交変換する場合、変数の数は、いくらか？

直交変換

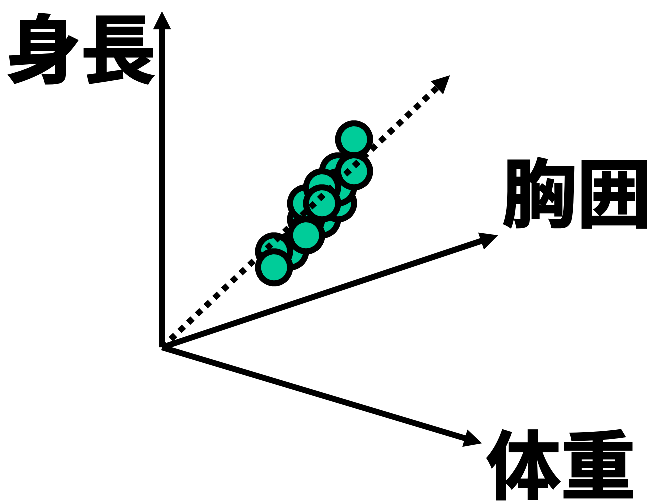


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性が保たれた座標変換

データ空間について

- （身長、体重、胸囲）という3変数を考える場合、各データは、３次元空間中の点と考えることができる。
- ３２０×２４０画素の画像を考える場合、変数の数は３２０×２４０＝７６８００画素であり、各画像は、３２０×２４０＝７６８００次元空間中の点と考えることができる。



画像データ

- 320✕240画素、各画素256階調：256＝2^8 (8 bit = 1 byte)

データ量：320 ✕ 240 = 76800 byte

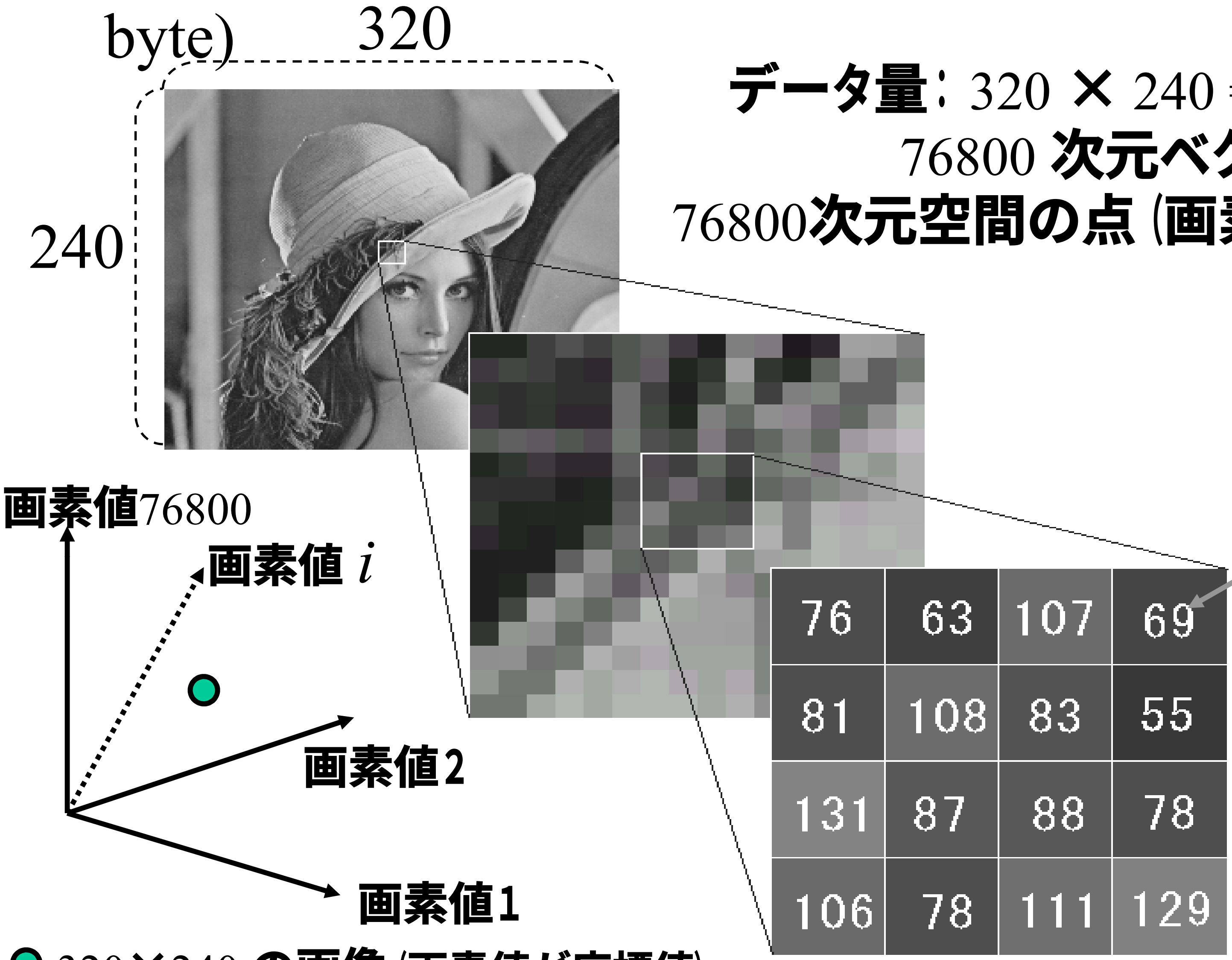
76800 次元ベクトル

76800次元空間の点（画素値が座標値）

各画素

256階調

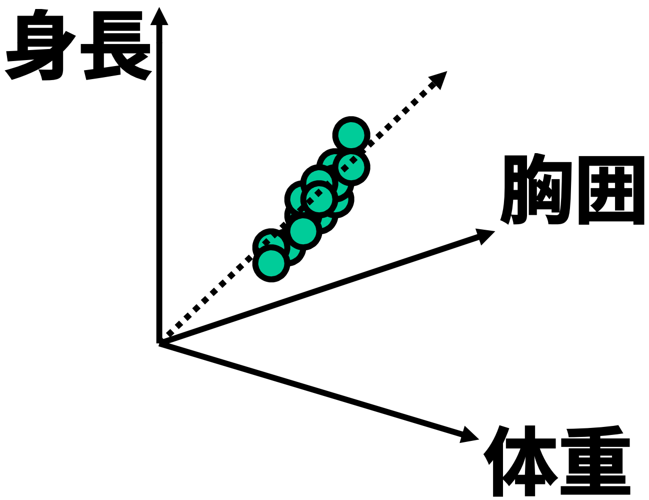
0 ~ 255

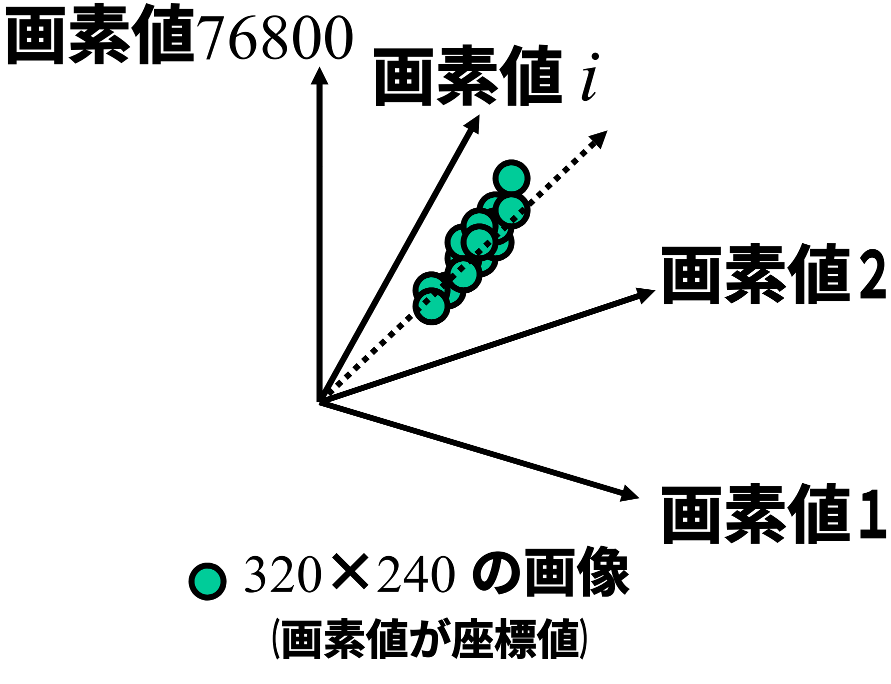


● 320✕240 の画像（画素値が座標値）

データ空間について

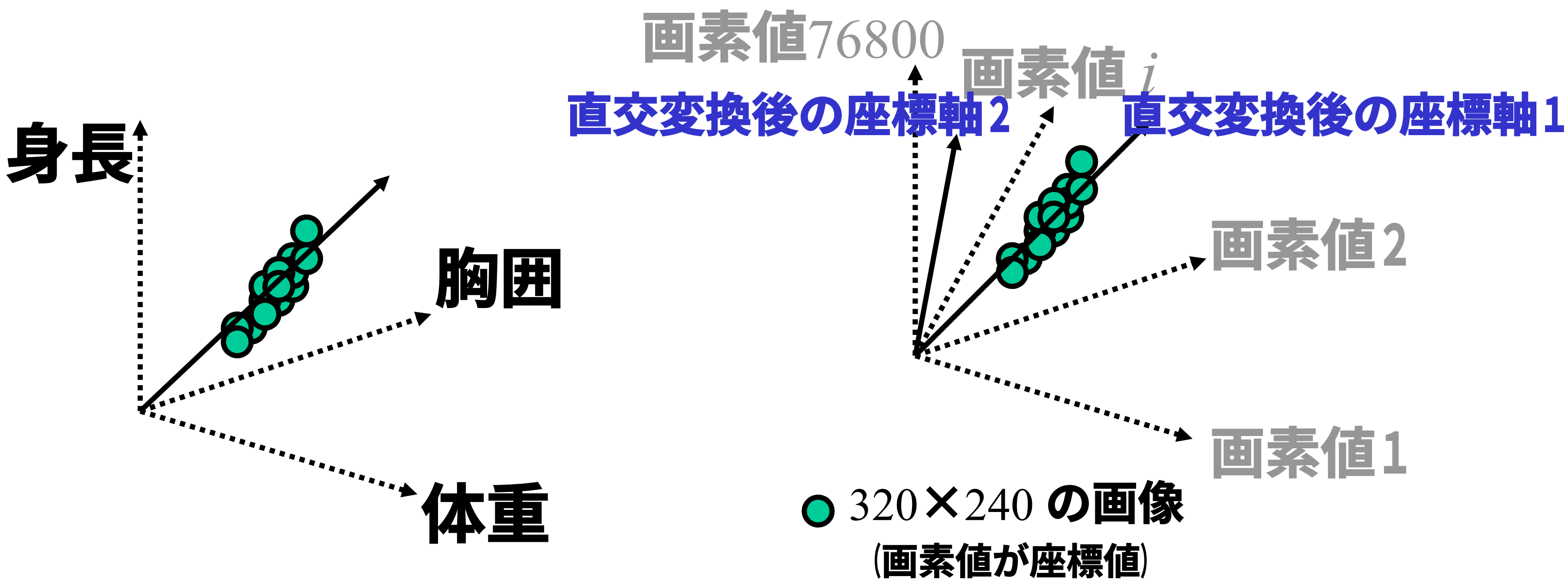
- 各画像は、３２０×２４０＝７６８００次元空間中の点と考えることができるが、７６８００次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。





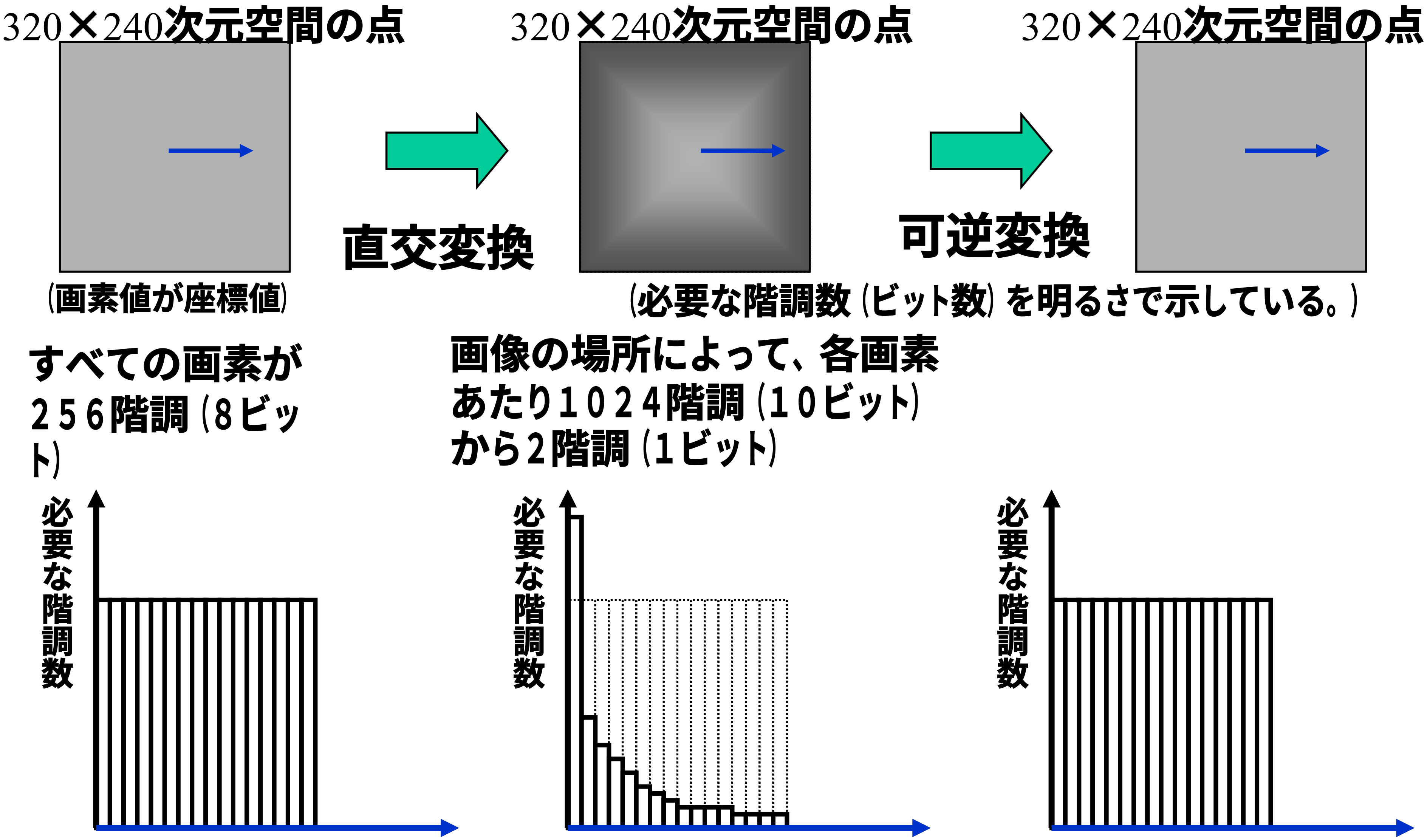
データ空間について

- 各画像は、３２０×２４０＝７６８００次元空間中の点と考えることができるが、７６８００次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。



直交変換とは何か？　何の役に立つのか？

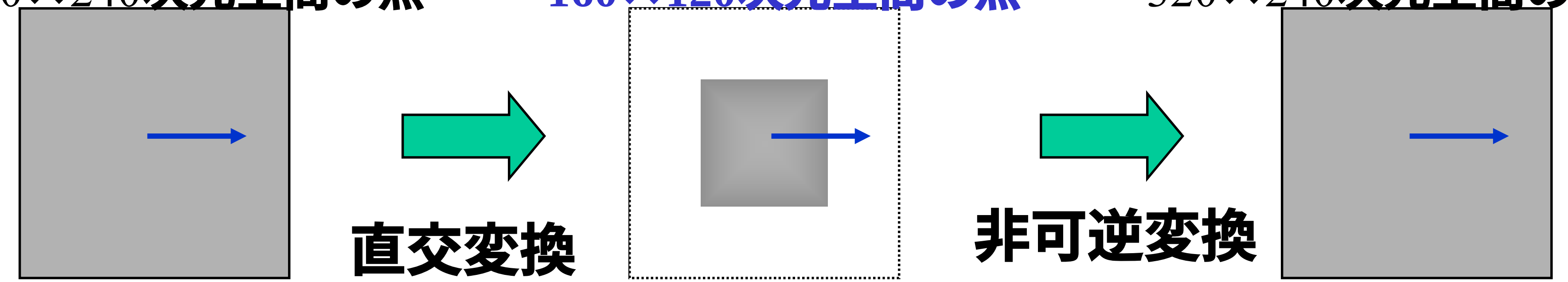
・画像データの圧縮（ＪＰＥＧなど）



直交変換とは何か？　何の役に立つのか？

・画像データの圧縮（ＪＰＥＧなど）

320×240次元空間の点　　160×120次元空間の点　　320×240次元空間の点

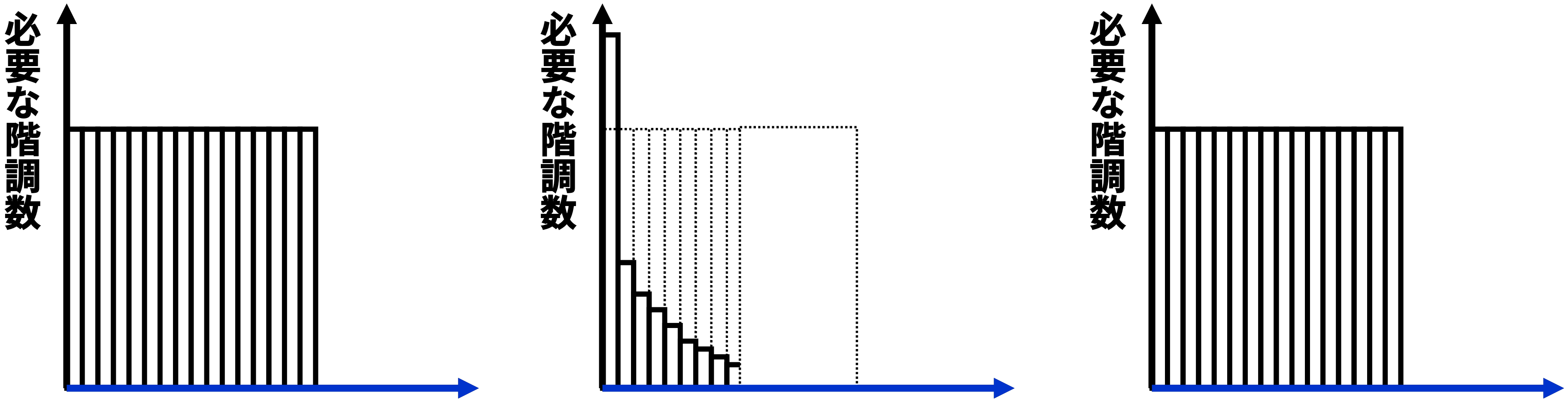


（画素値が座標値）

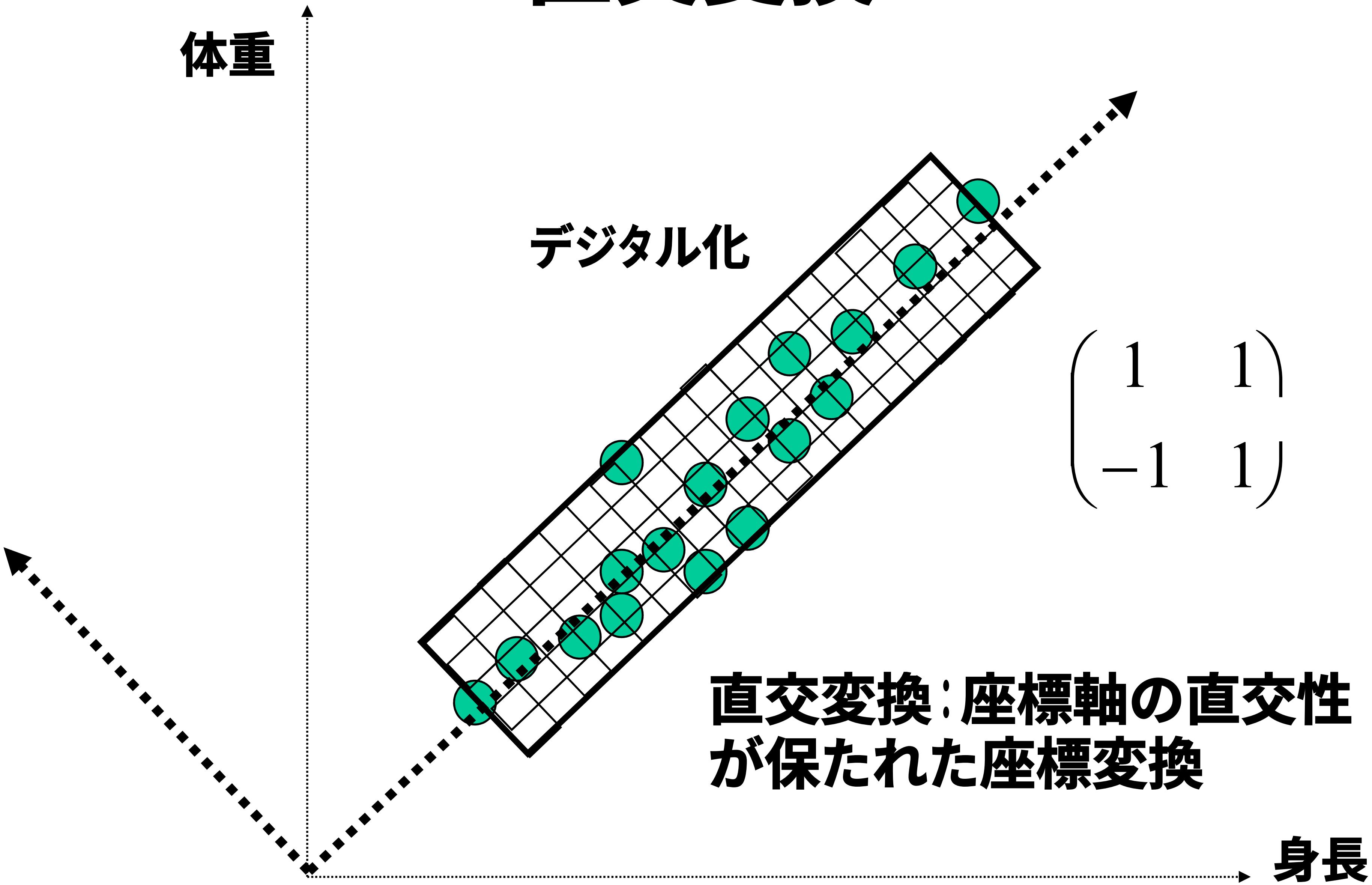
（必要な階調数（ビット数）を明るさで示している。）

すべての画素が２５６階調（８ビット）

画像の場所によって、各画素あたり１０２４階調（１０ビット）から２階調（１ビット）



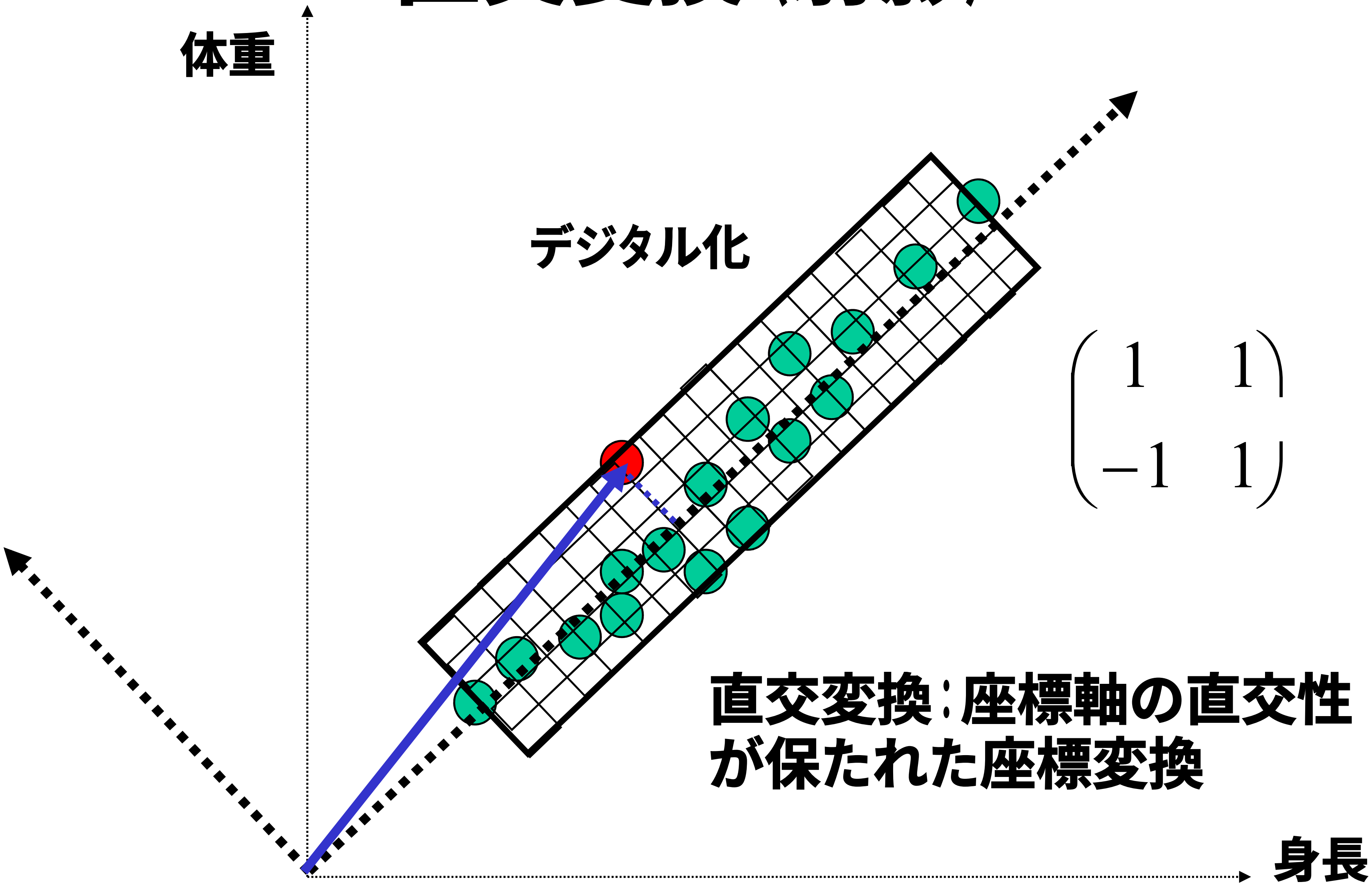
直交変換



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性が保たれた座標変換

直交変換 (射影)



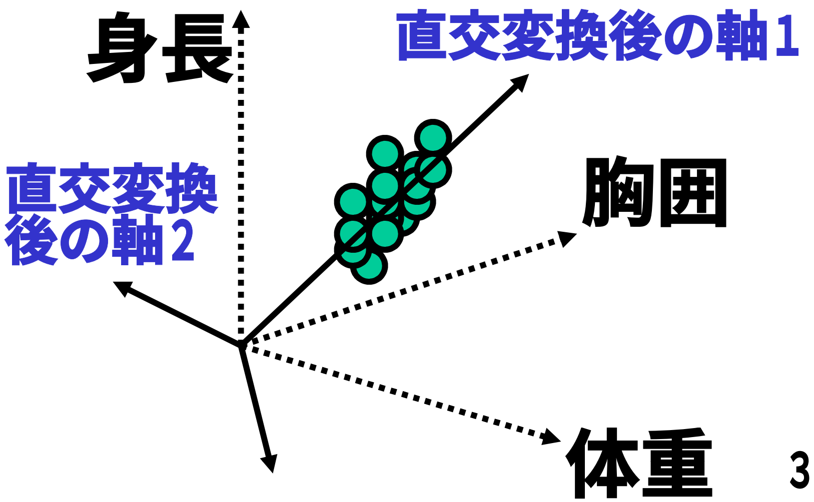
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

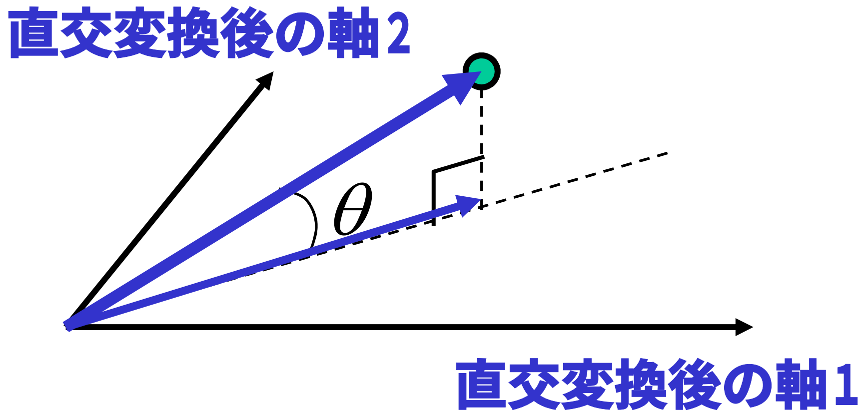
直交変換：座標軸の直交性が保たれた座標変換

直交変換：部分空間への射影

- 直交変換後、寄与の小さい軸を省略することで、データ次元数を減らして、データ量を削減する。

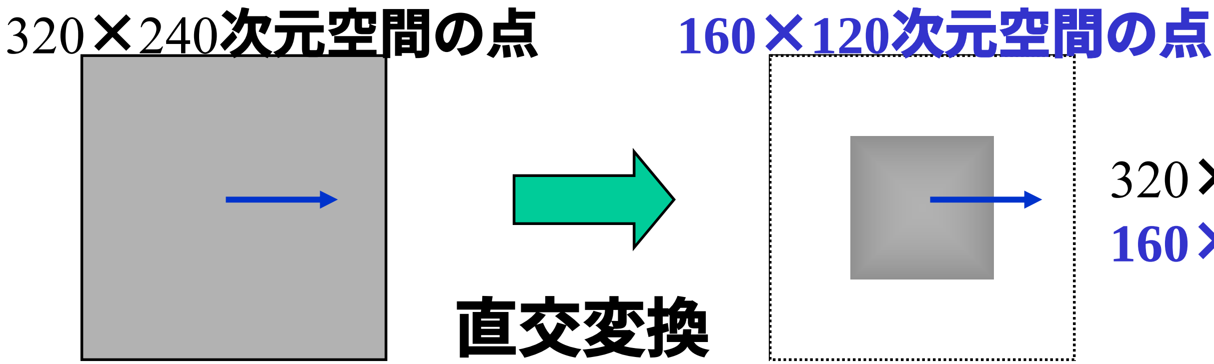
3次元空間の点を軸1と軸2で定まる2次元平面に射影





3次元空間中の点を2次元平面に射影する。

N次元空間中の点をM次元超平面に射影する。(N>M)

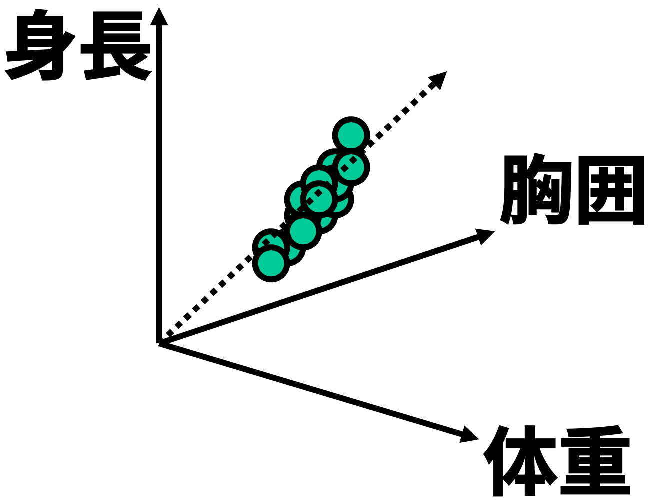


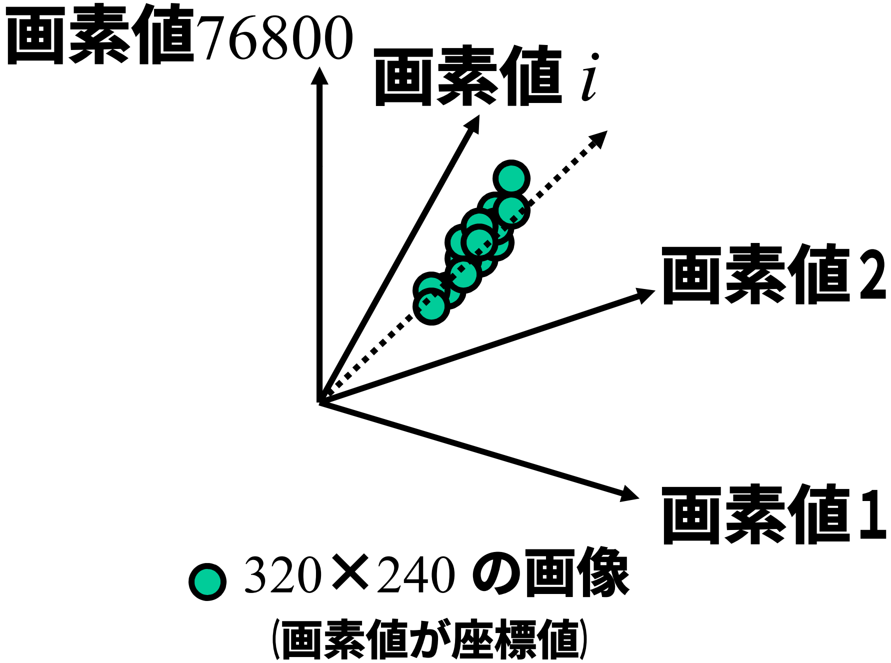
320×240次元空間の点を

160×120次元超平面に射影

データ空間について

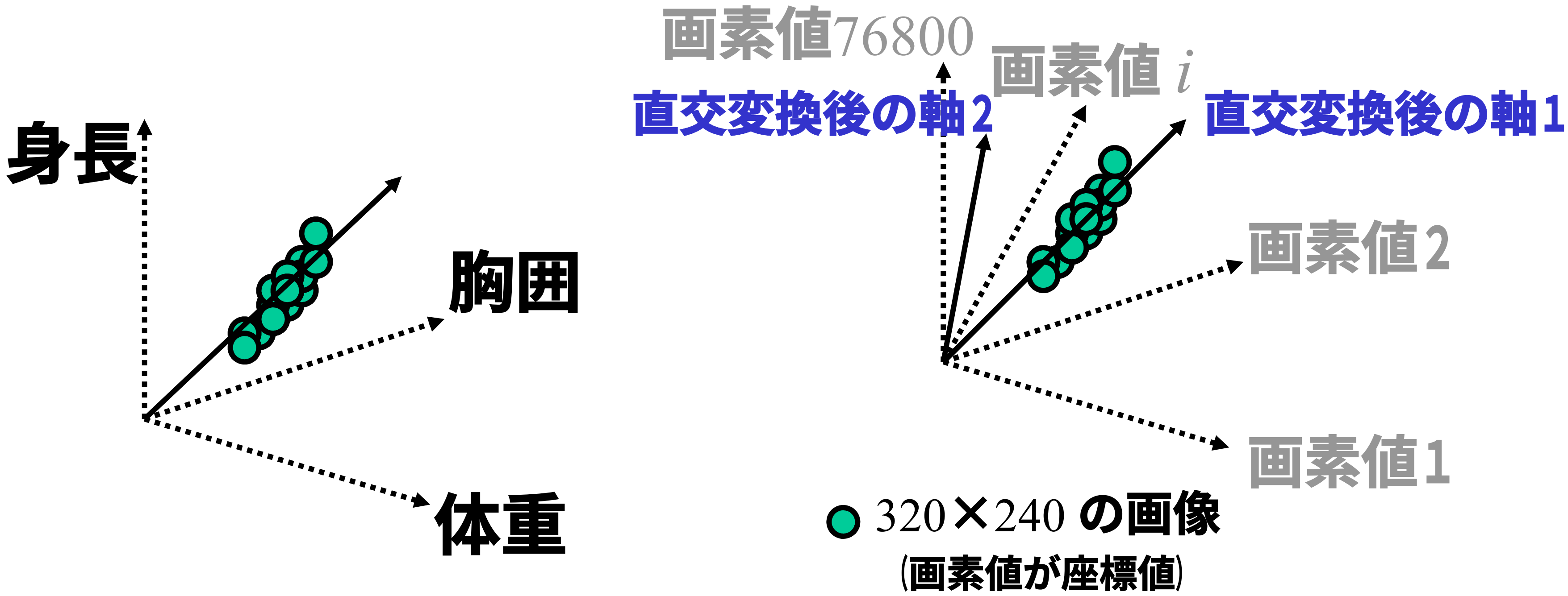
- 各画像は、３２０×２４０＝７６８００次元空間中の点と考えることができるが、７６８００次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。
- データを表現する（座標）軸の選び方が重要になる。適切な軸を選ぶことにより、データ圧縮が可能になる。直交変換は、適切な軸を選ぶ（適切な軸に変換する）ための道具である。





データ空間について

- 各画像は、３２０×２４０＝７６８００次元空間中の点と考えることができるが、７６８００次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。
- データを表現する（座標）軸の選び方が重要になる。適切な軸を選ぶことにより、データ圧縮が可能になる。直交変換は、適切な軸を選ぶ（適切な軸に変換する）ための道具である。



データ空間について

- データ空間の各座標軸は、「基底ベクトル」と呼ばれる。
- 例えば、色（光）の場合、（赤、緑、青），あるいは，（明るさ，色相，彩度）が基底ベクトルである。
- 基底ベクトルが互いに直交する場合、「直交基底」と呼ばれる。
- さらに、各ベクトルが単位ベクトルの場合、「正規直交基底」と呼ばれる。

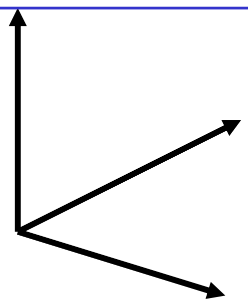
正規直交基底の例：列（縦）ベクトルで表現している

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

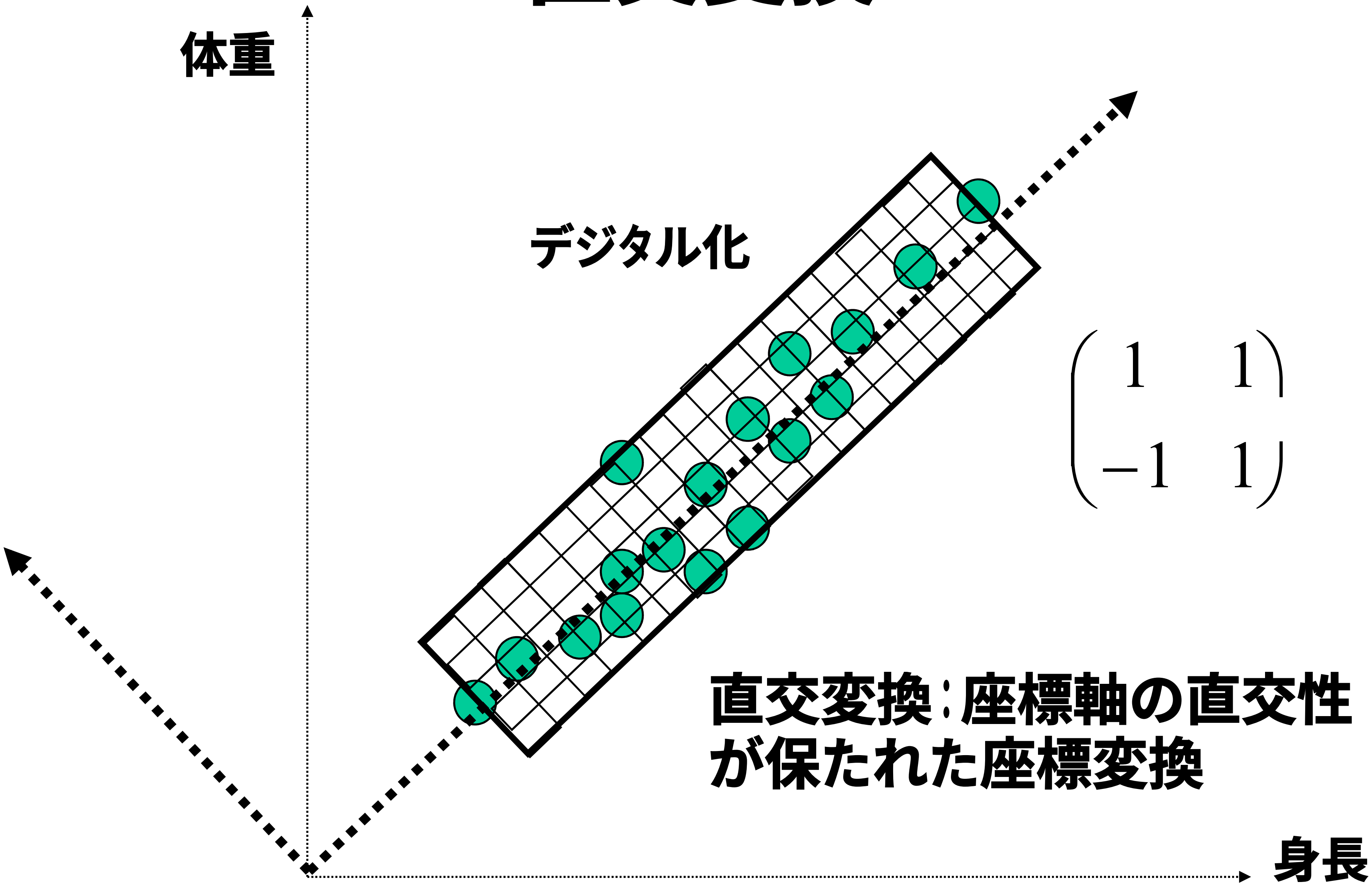
$$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$



演習：それぞれが、正規直交基底であることを確認せよ。

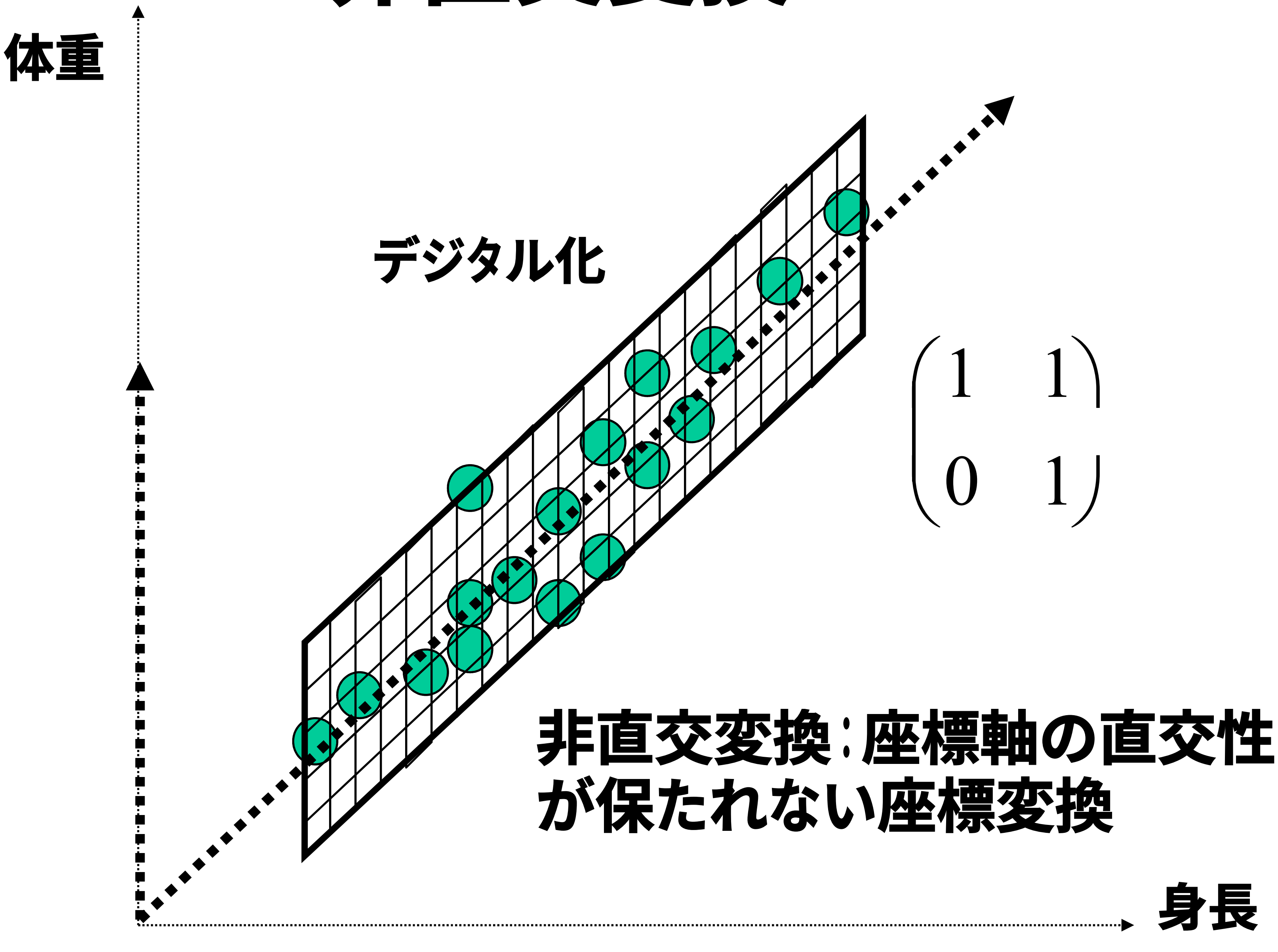
直交変換



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性が保たれた座標変換

非直交変換

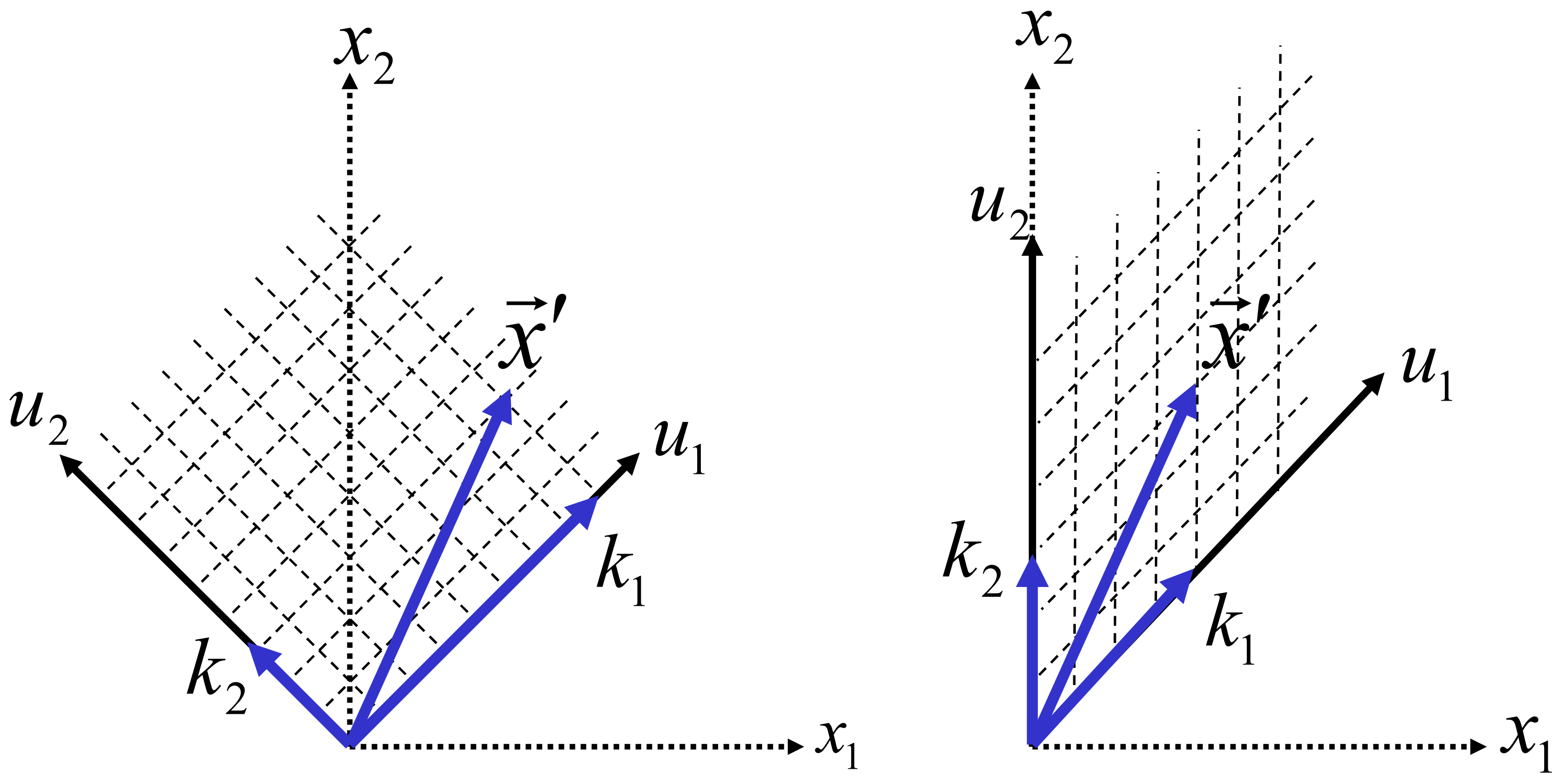


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

非直交変換：座標軸の直交性が保たれない座標変換

なぜ直交変換か？

$$\vec{x}' = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \qquad \|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$$



$$k_1 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$

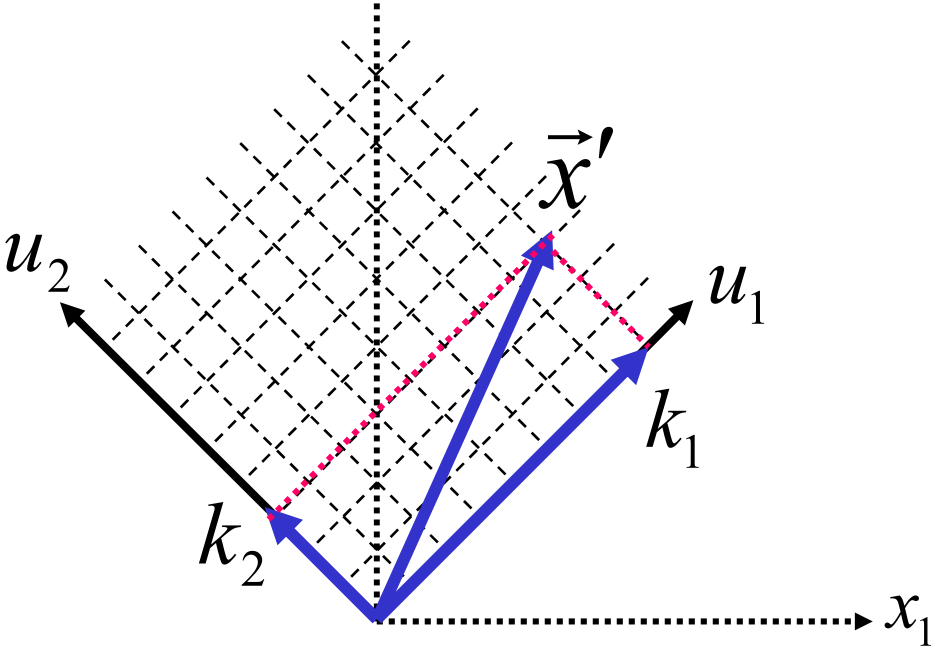
$$k_1 + k_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 + k_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$

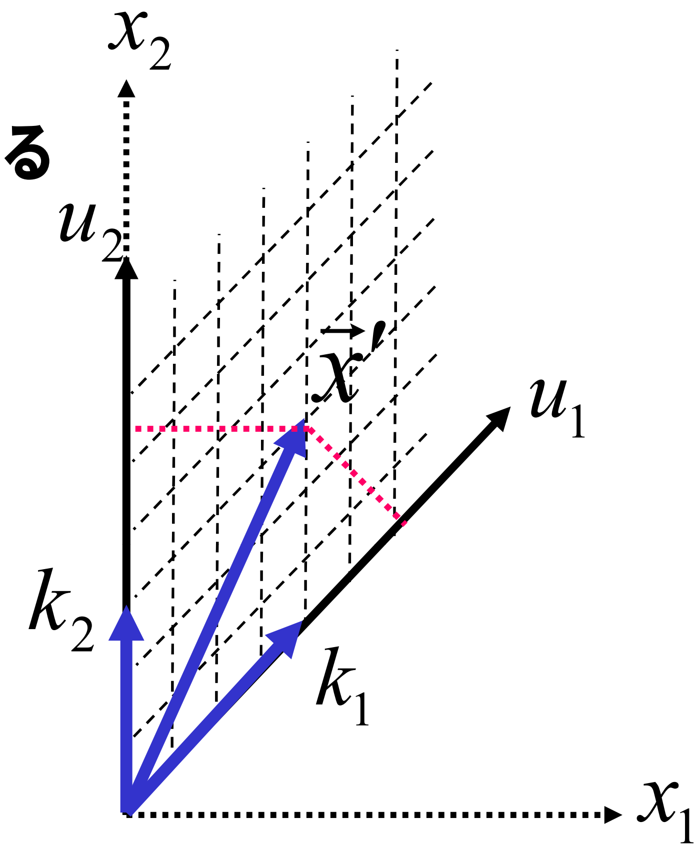
なぜ直交変換か？

$$\vec{x}' = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \qquad \|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$$

$\vec{x}' \cdot \vec{u}_1 \quad \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$

は簡単に計算できる





$$k_1 = \boxed{\vec{x}' \cdot \vec{u}_2}$$

$$k_2 = \boxed{\vec{x}' \cdot \vec{u}_2}$$

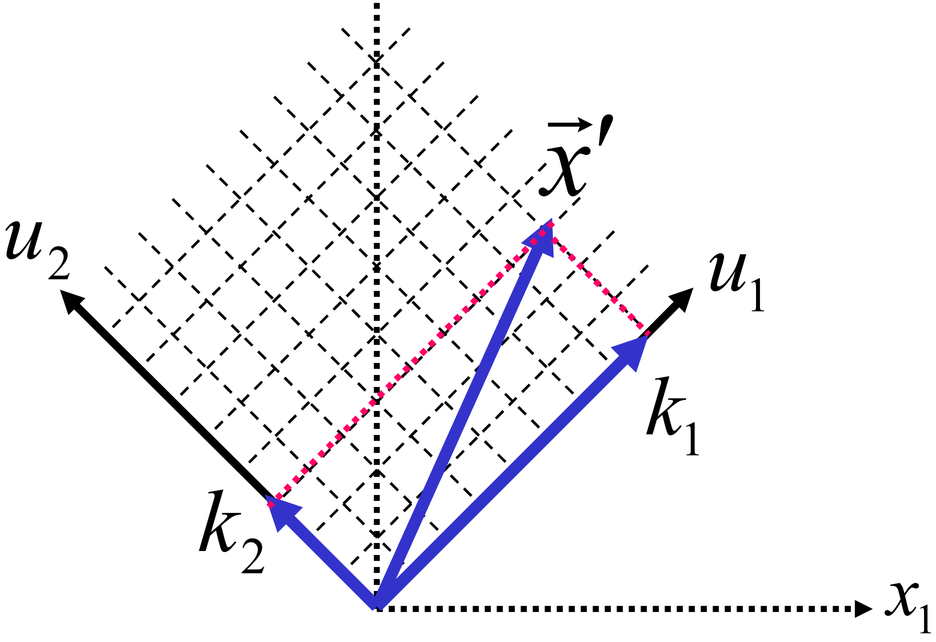
$$k_1 + k_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) = \boxed{\vec{x}' \cdot \vec{u}_1}$$

$$k_2 + k_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \boxed{\vec{x}' \cdot \vec{u}_2}$$

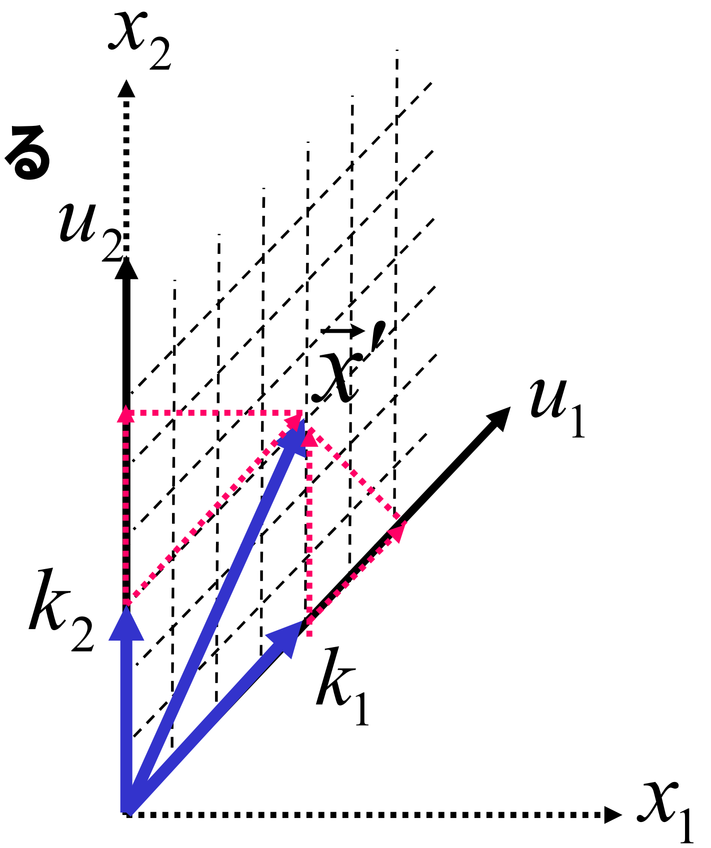
なぜ直交変換か？

$$\vec{x}' = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \qquad \|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$$

$\vec{x}' \cdot \vec{u}_1$　$\vec{x}' \cdot \vec{u}_2$
は簡単に計算できる



$$k_1 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$



$$k_1 + k_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 + k_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$

なぜ直交変換か？

- 直交変換の場合、変換後の座標値k_1, k_2は、元のベクトルと座標軸（基底ベクトル）の内積をとるだけで、計算できる。

$$k_1 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$

- 直交変換でない場合、変換後の座標値k_1, k_2を求めるためには、連立方程式を解かなければならない。

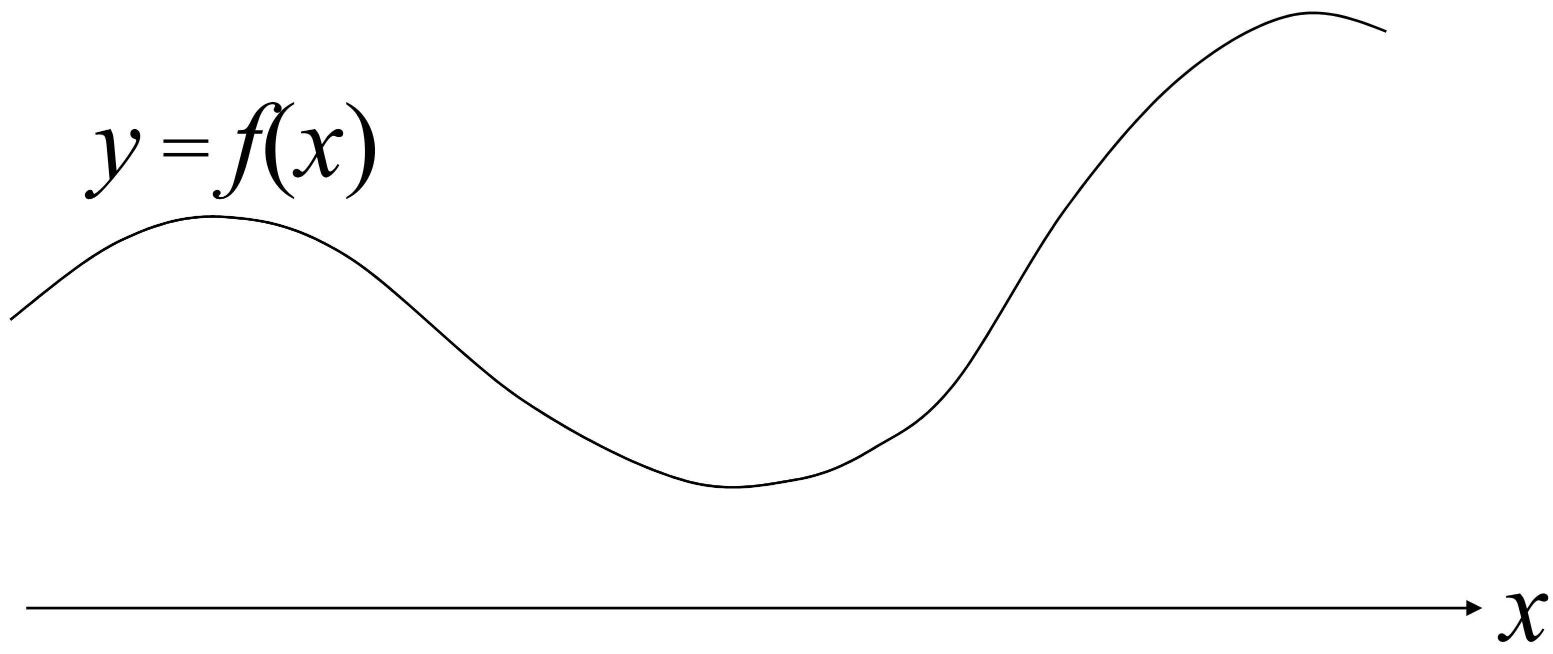
$$k_1 + k_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_1$$
$$k_2 + k_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \vec{x}' \cdot \vec{u}_2$$

- 320×240=76800、160×120=19200などの大量の座標値を求める場合には、大量の未知数の連立方程式を解くのは、計算機でも非常に手間がかかる。

ベクトルから関数へ

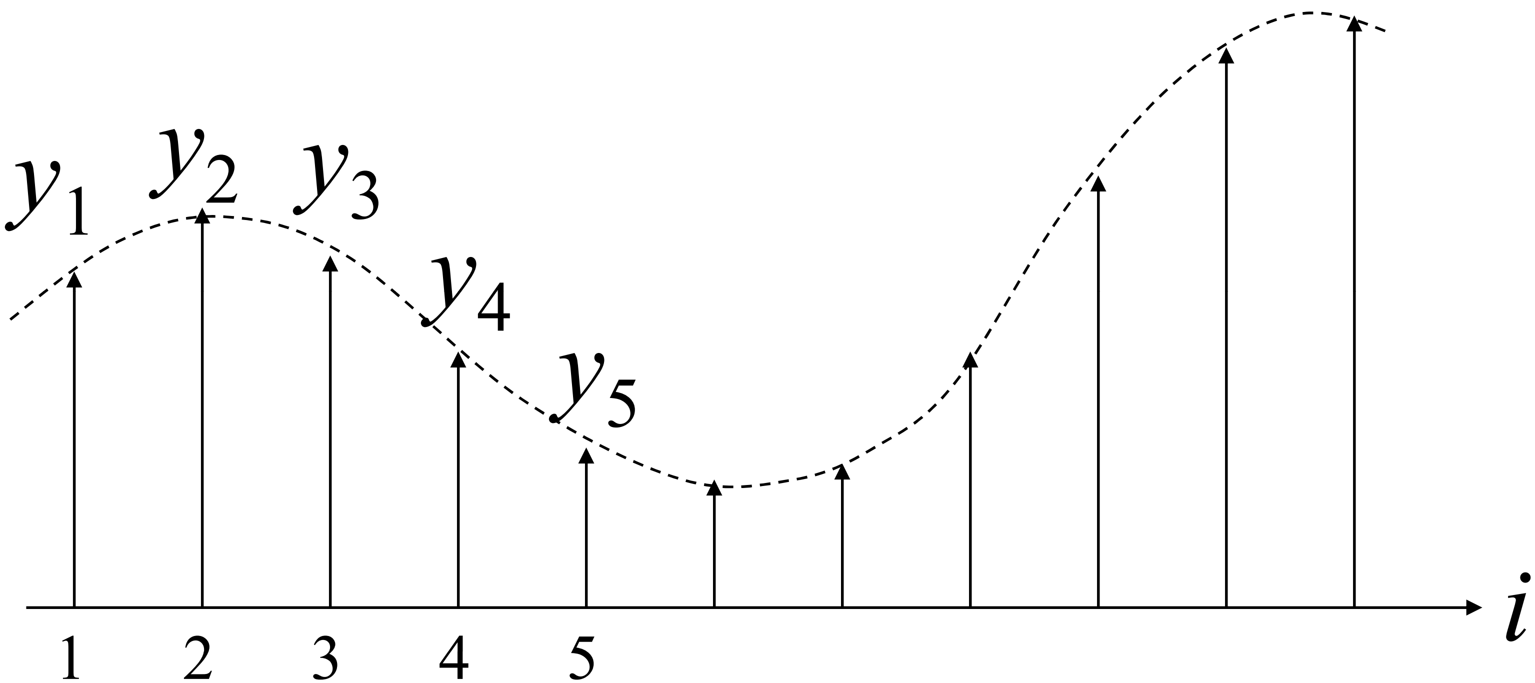
関数はベクトルである

- **関数**：$y = f(x)$
- **ベクトル**：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$



関数はベクトルである

- **関数**：$y = f(x)$
- **ベクトル**：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$

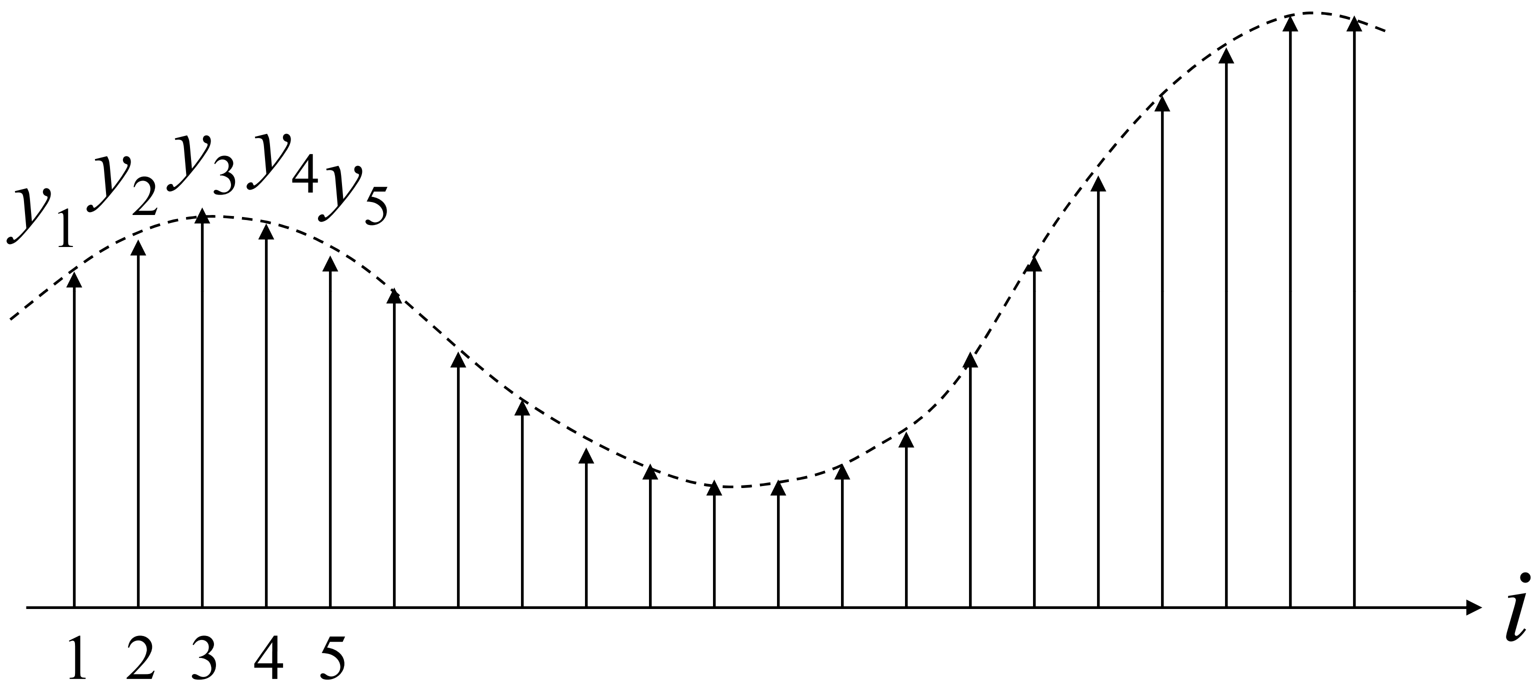


ある飲食店にいる客の数を1時間おきに調べてみる。

関数はベクトルである

- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{2n})$

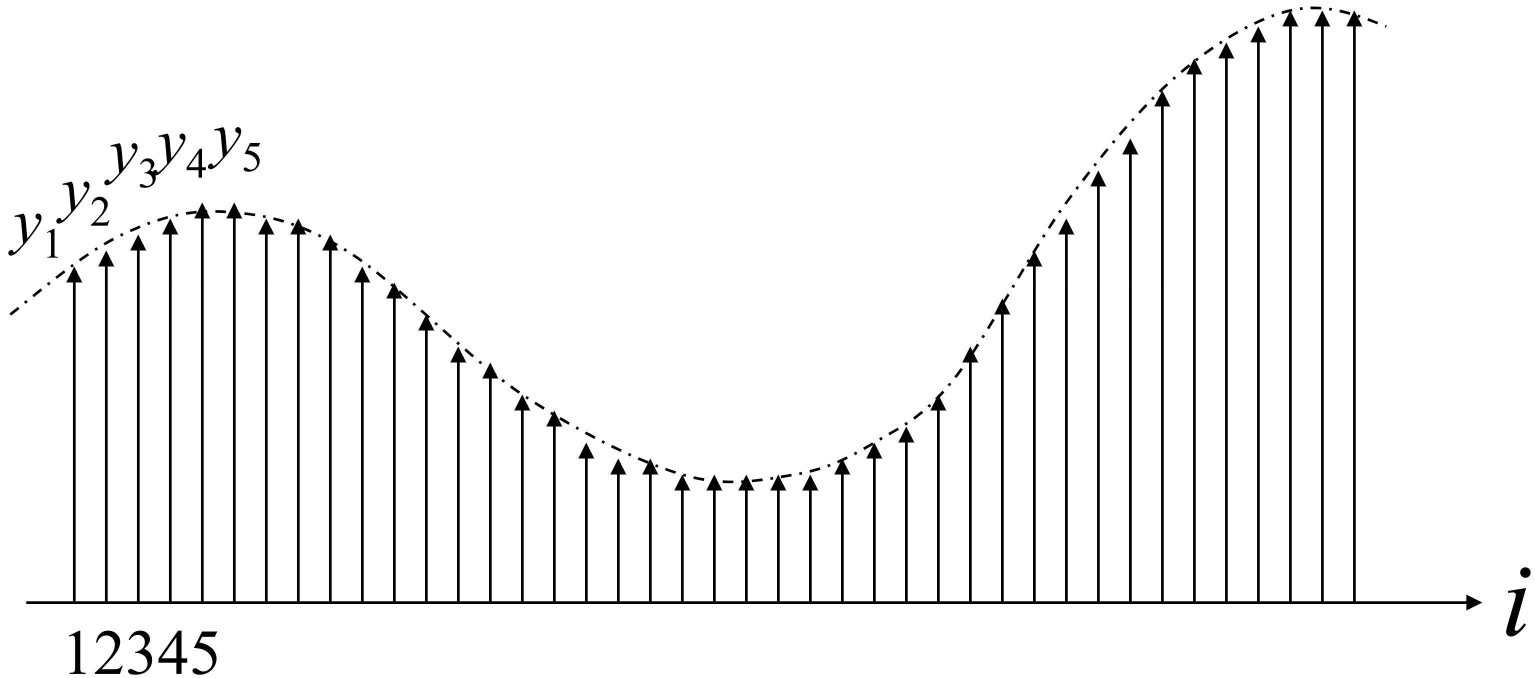
nを2nにする



ある飲食店にいる客の数を３０分おきに調べてみる。

関数はベクトルである

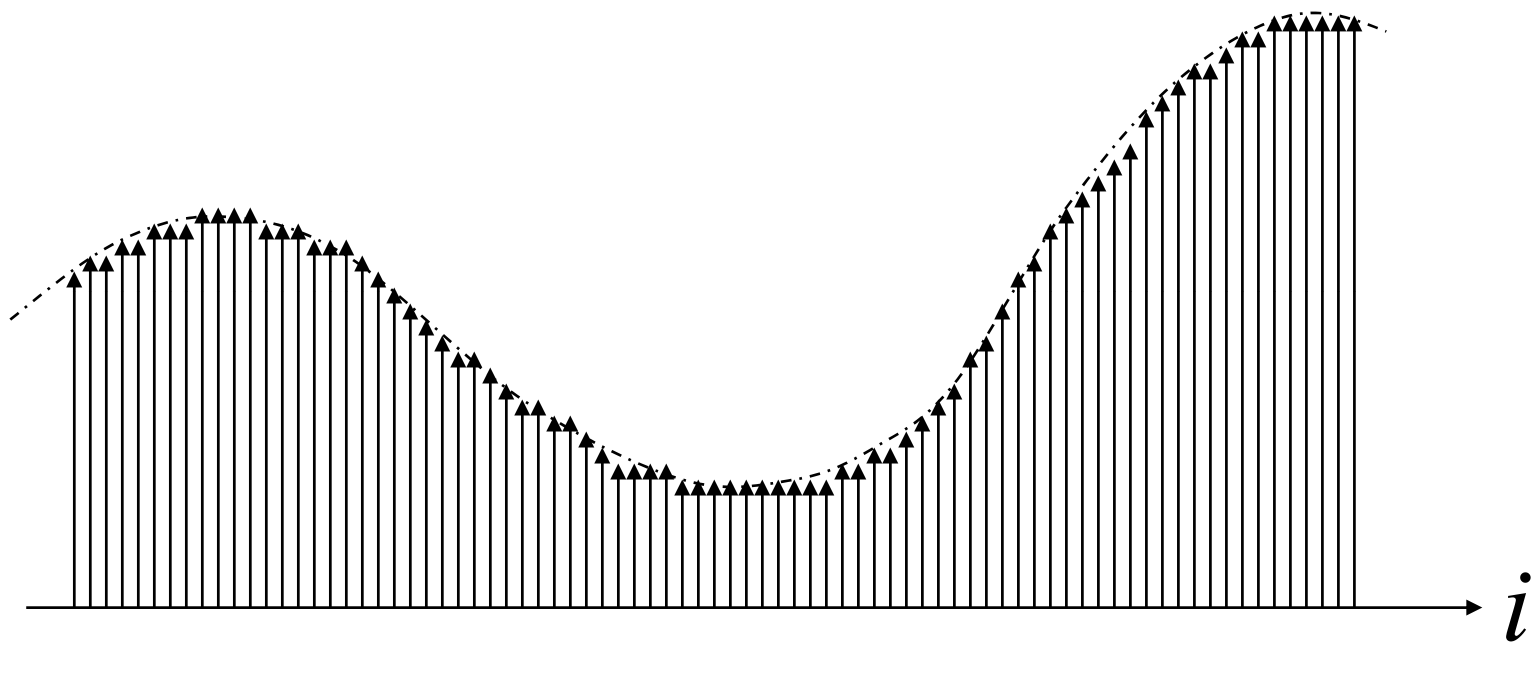
- **関数**：$y = f(x)$
- **ベクトル**：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{4n})$



ある飲食店にいる客の数を１５分おきに調べてみる。

関数はベクトルである

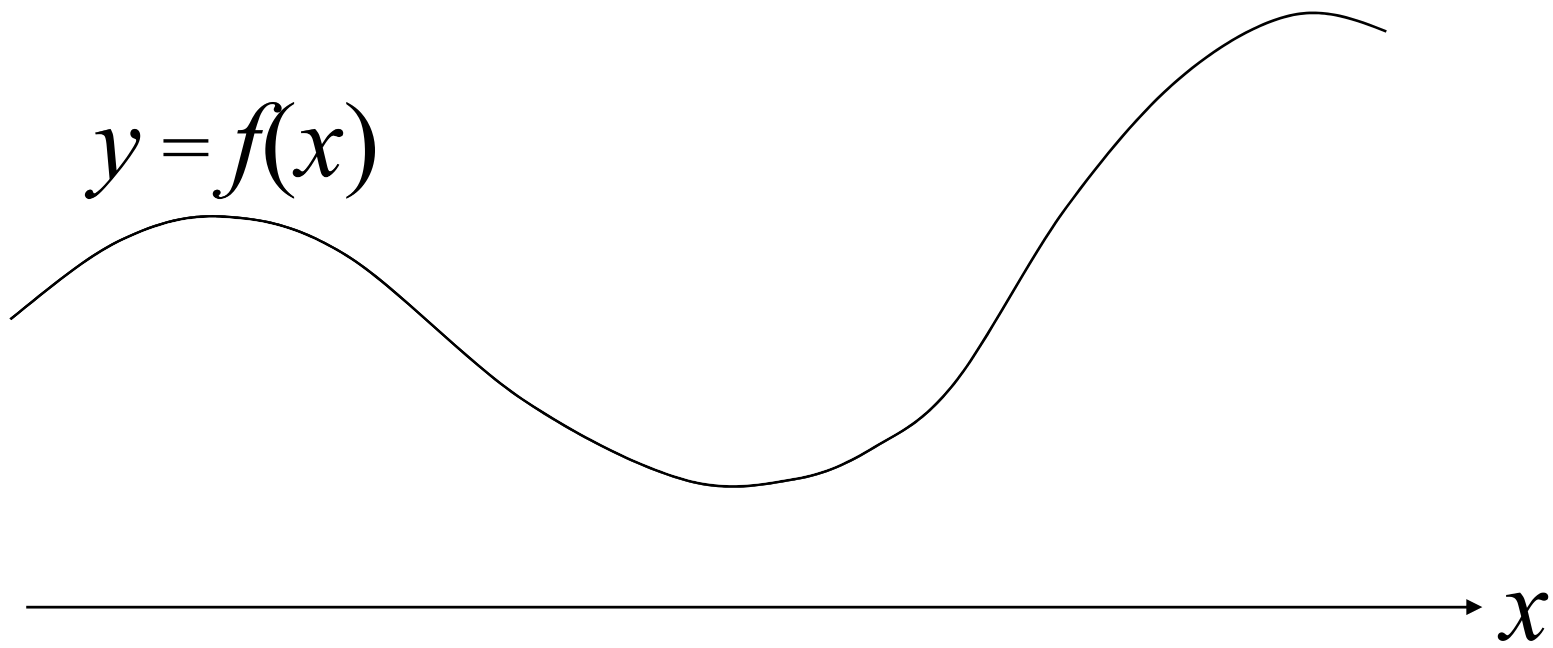
- **関数**：$y = f(x)$
- **ベクトル**：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_{8n})$



ある飲食店にいる客の数を7.5分おきに調べてみる。

関数は（無限次元）ベクトルである

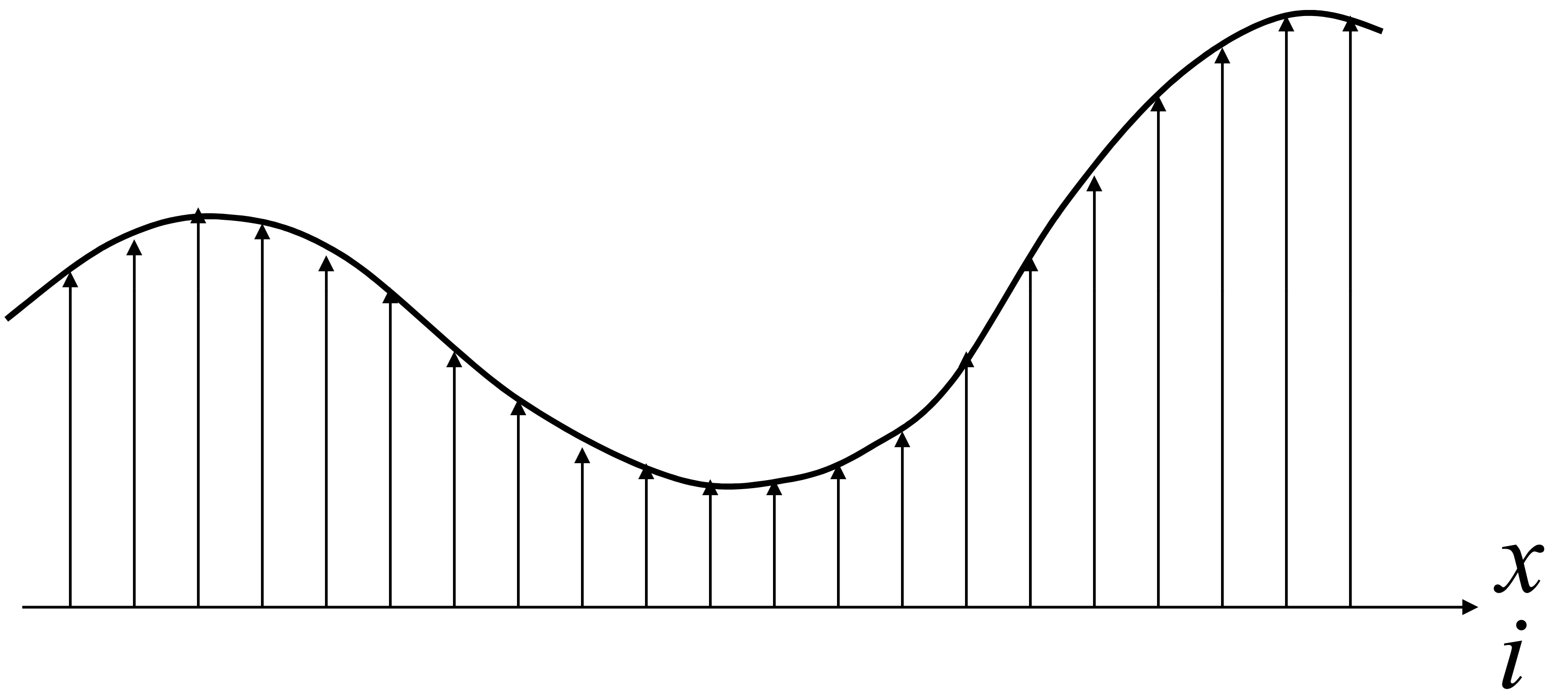
- **関数**：$y = f(x)$
- **ベクトル**：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_\infty)$



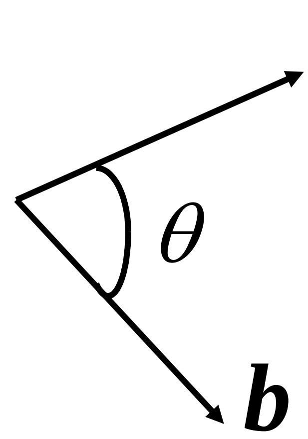
ある飲食店にいる客の数を常時調べる。

関数は (無限次元) ベクトルである

- 関数：$y = f(x)$　連続的
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$　離散的



ベクトルの直交条件



- ２次元ベクトルの場合

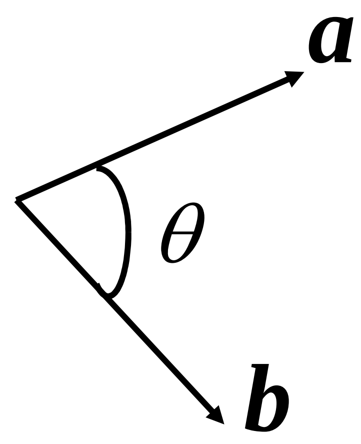
$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$$

直交条件　＝　内積がゼロ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

ベクトルの直交条件



- n次元ベクトルの場合

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

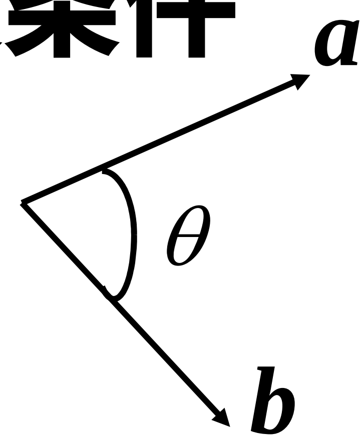
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)$$

直交条件 ＝ 内積がゼロ

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_i b_i + \ldots + a_n b_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta = 0$$

無限次元ベクトルの直交条件



- n次元ベクトルの場合

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_\infty)$$

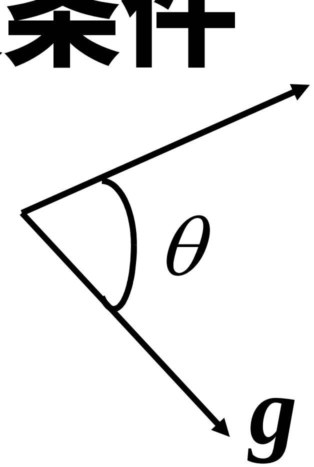
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_\infty)$$

直交条件　＝　内積がゼロ

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_i b_i + \ldots + a_\infty b_\infty$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta = 0$$

無限次元ベクトルの直交条件



- n次元ベクトルの場合

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_\infty)$$

$$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_\infty)$$

直交条件　＝　内積がゼロ

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_i g_i + \ldots + f_\infty g_\infty$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{g}| \cos\theta = 0$$

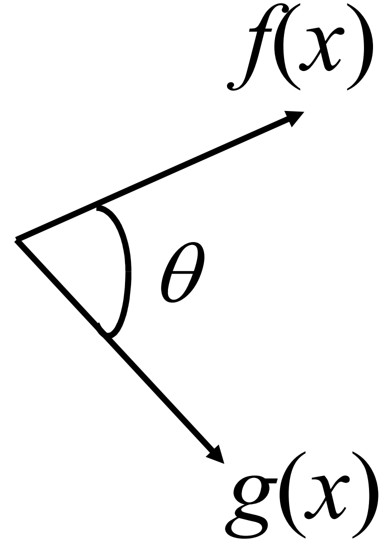
（ただし，f_iとf_{i+1}の（隣同士の）間隔は，無限小）

関数（無限次元ベクトル）の直交条件

- **関数の場合**

$$y = f(x)$$

$$y = g(x)$$



直交条件　＝　内積がゼロ

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$= \int f(x) g(x) dx$$

$$= |f(x)| \cdot |g(x)| \cos\theta$$

直交ベクトル系（直交基底ベクトル）

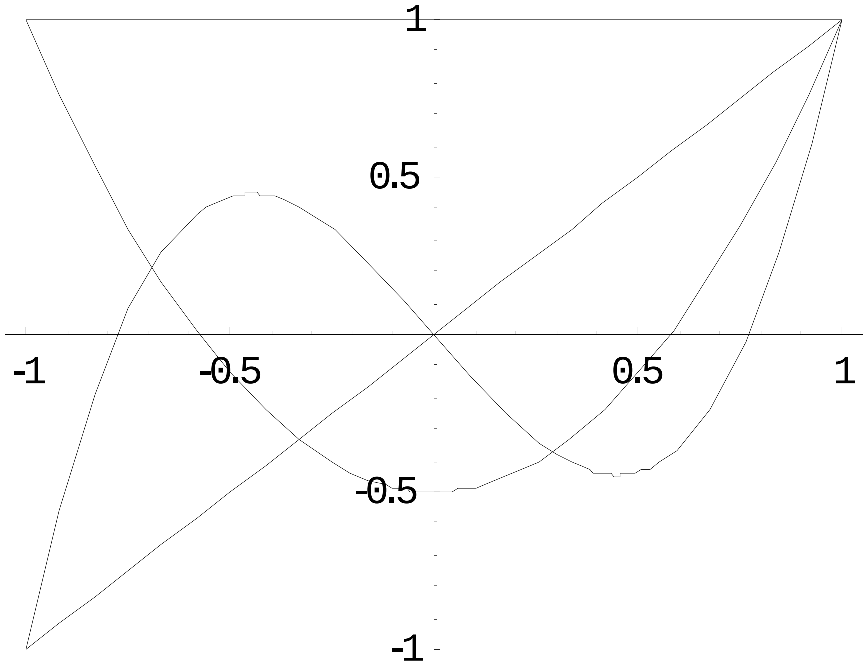
	3次元空間	n次元空間
• X軸	(1,0,0)	(1,0,0,0…..)
• Y軸	(0,1,0)	(0,1,0,0…..)
• Z軸	(0,0,1)	(0,0,1,0,…..)
•		(0,0,0,1,…..)
•		(0,0,0,0…..,1)

互いに直交する一連のベクトルの集合

直交関数系

- ルジャンドルの多項式

$$P_n(x), n = 1,2,3,\ldots.(-1 \le x \le 1)$$



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

互いに直交する一連の関数の集合

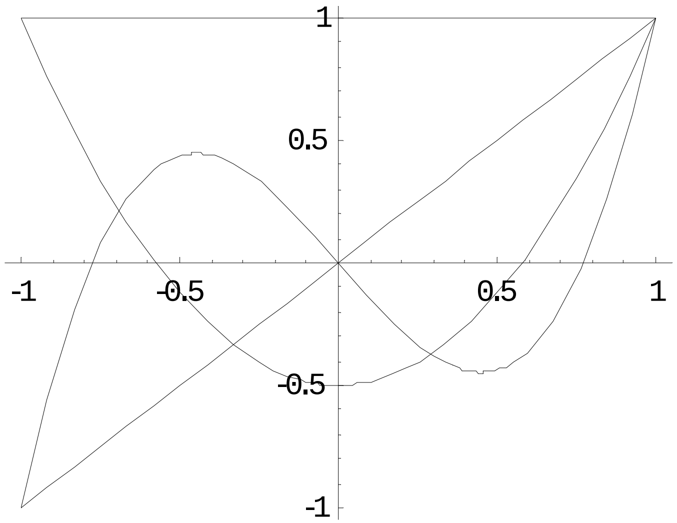
参考文献

- ネット検索
  - キーワード
    - 金谷健一
    - 応用数学教室

- これなら分かる応用数学教室
  - 最小二乗法からウェーブレットまで
- 金谷健一著
- 共立出版
- ３０４５円

直交関数系

- ルジャンドルの多項式　$P_n(x), n = 1,2,3,....(-1 \le x \le 1)$



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

問題：Mathematica を使ってルジャンンドル多項式をグラフとしてプロットし、さらにそれらが直交関数系であることを確かめよ。

$$\int_1^{-1} P_0(x)P_1(x)dx = 0 \qquad \int_1^{-1} P_1(x)P_2(x)dx = 0 \qquad \int_1^{-1} P_2(x)P_3(x)dx = 0$$

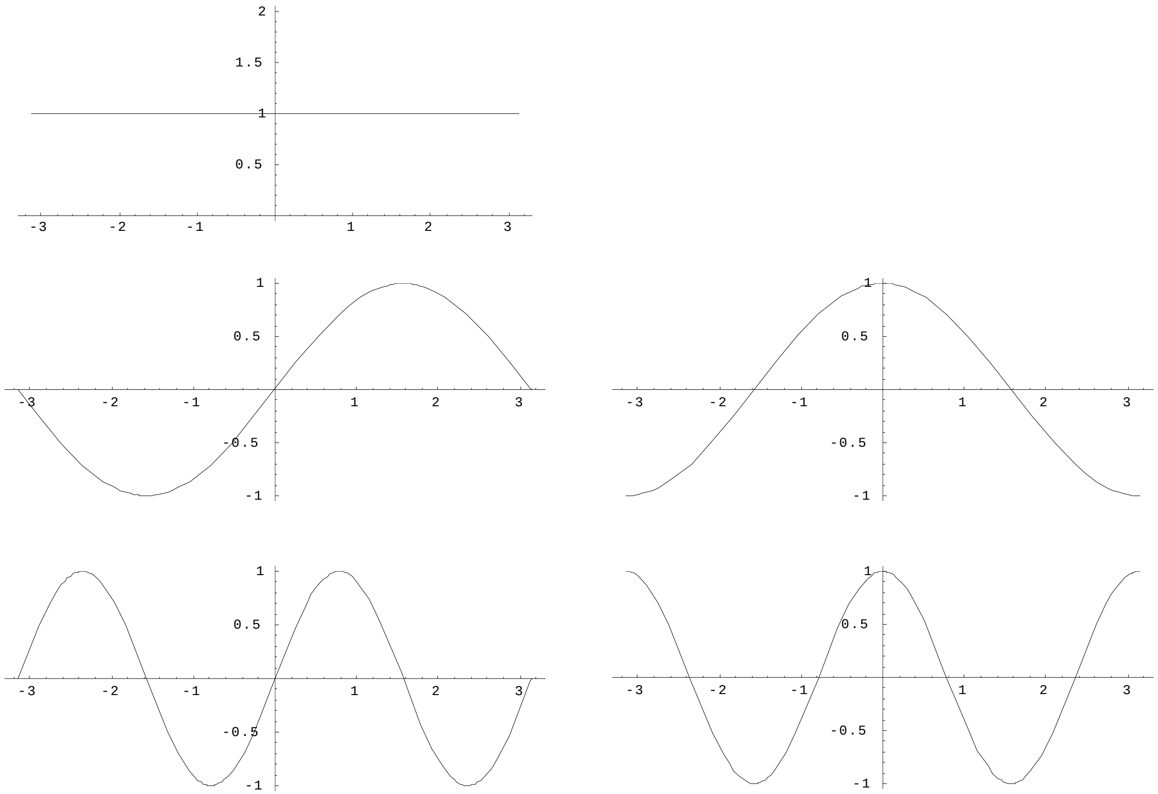
$$\int_1^{-1} P_0(x)P_2(x)dx = 0 \qquad \int_1^{-1} P_1(x)P_3(x)dx = 0$$

$$\int_1^{-1} P_0(x)P_3(x)dx = 0$$

Mathematica を使ってみよう！

直交関数系

- **三角関数系** $P_n(x), n = 0, s1, c1, s2, c2, \ldots.(-\pi \le x \le \pi)$



$$P_0(x) = 1/2$$

$$P_{s1}(x) = \sin x$$

$$P_{c1}(x) = \cos x$$

$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$

$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$

$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$

$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$

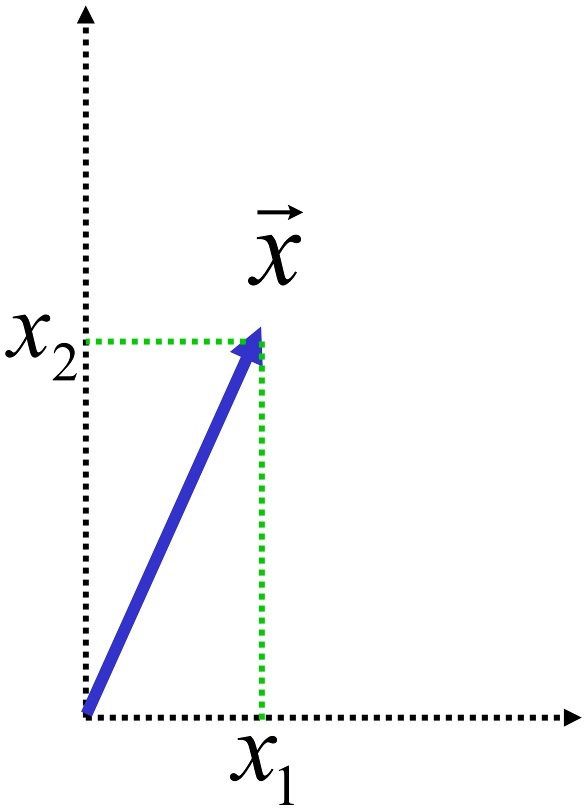
$$\vdots$$

問題：三角関数系が直交関数系であることを Mathematica**を使って確かめよ。グラフとしてプロットせよ。**

直交変換

- 直交変換したいベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{x}\cdot\ \boldsymbol{u}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}\cdot\ \boldsymbol{u}_n)$$



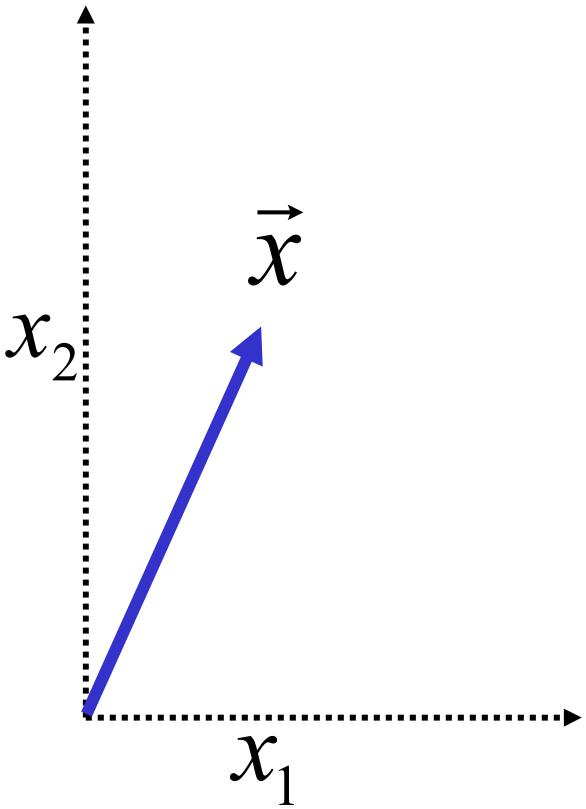
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{x}\cdot\ \boldsymbol{u}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}\cdot\ \boldsymbol{u}_n)$$



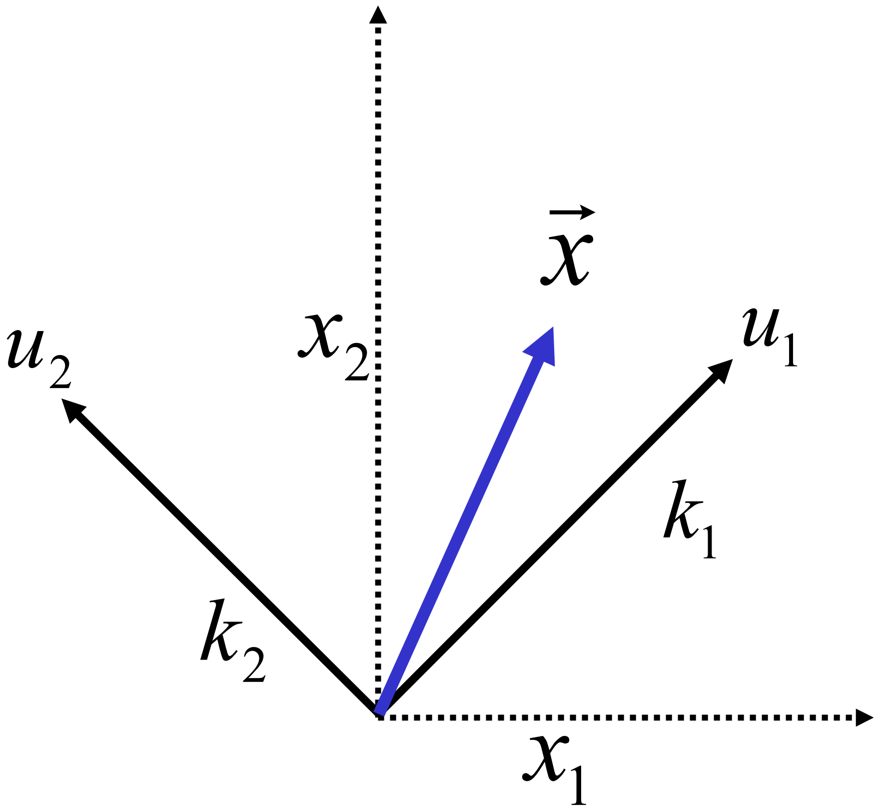
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換

- 直交変換したいベクトル x=(x_1,x_2,…,x_n) と直交基底 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,….$\boldsymbol{u}_n$の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル

$$\boldsymbol{x}' = (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2, \ldots,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$$



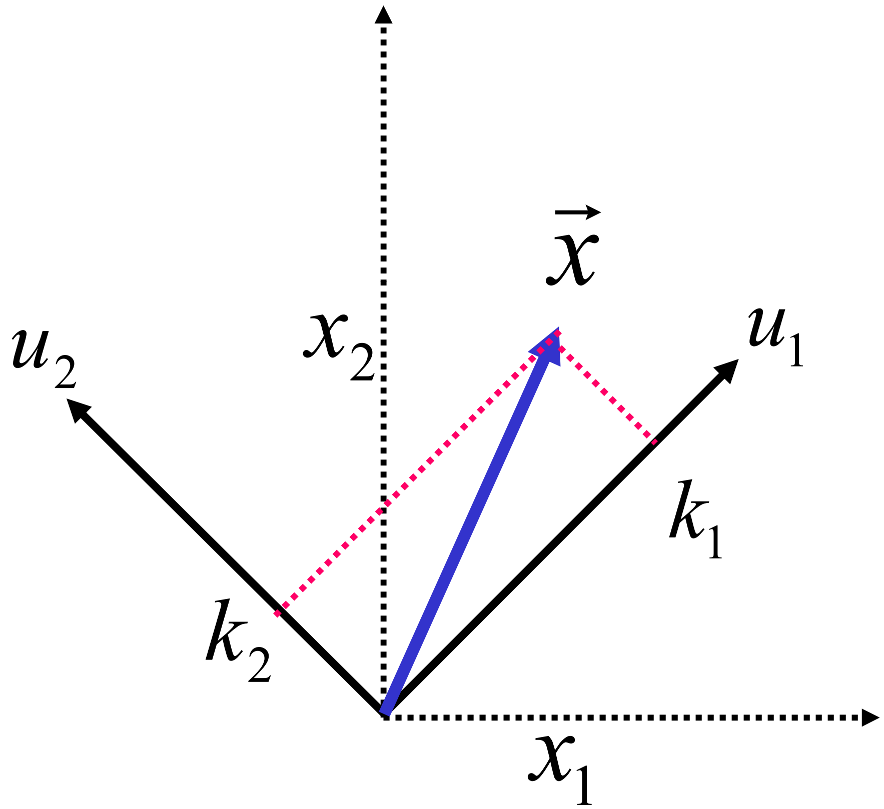
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換

- **直交変換したいベクトル** x=(x_1,x_2,…,x_n) **と直交基底** $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,….$\boldsymbol{u}_n$**の内積をとる。**
- **直交変換後のベクトル**

$$\boldsymbol{x}' = (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_n)$$



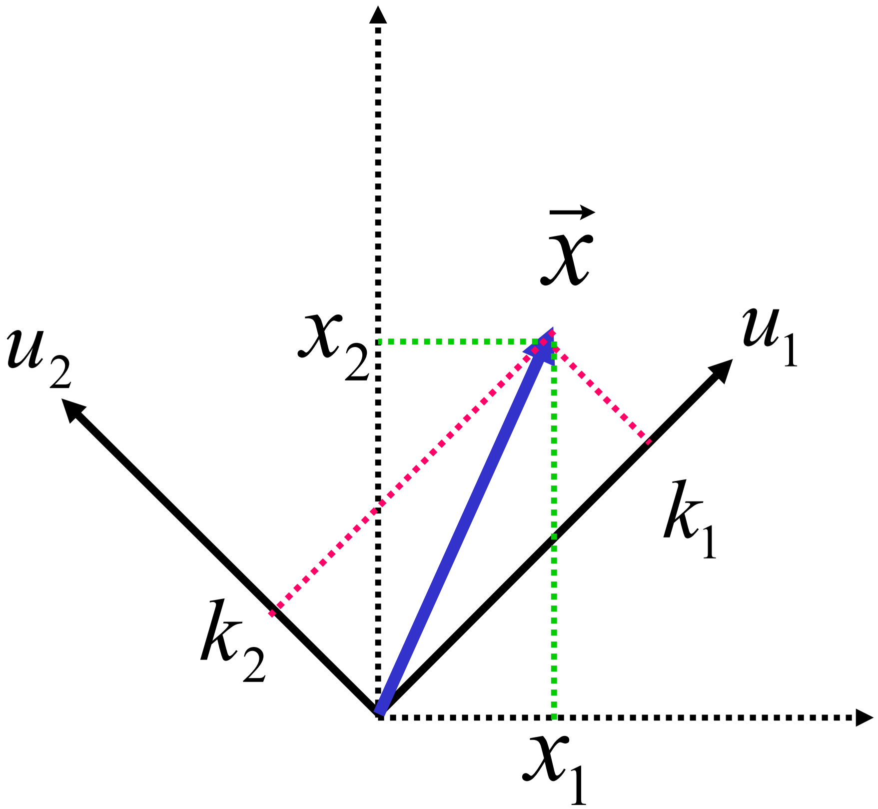
$$k_1 = \vec{x} \cdot \vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x} \cdot \vec{u}_2$$

直交変換

- **直交変換したいベクトル** x=(x_1,x_2,…,x_n) **と直交基底** $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,….$\boldsymbol{u}_n$**の内積をとる。**
- **直交変換後のベクトル**

$$\boldsymbol{x}' = (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$$



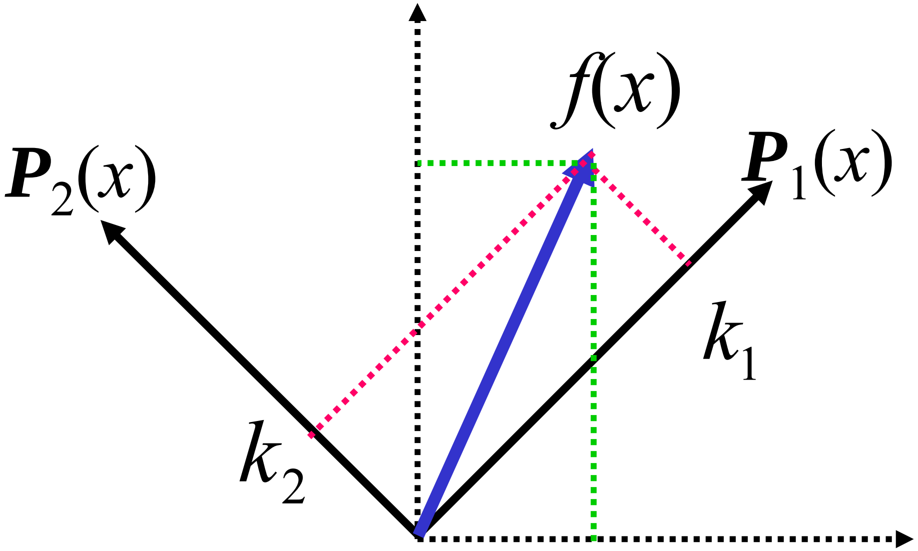
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $\boldsymbol{P}_0(x)$, $\boldsymbol{P}_1(x)$, $\boldsymbol{P}_2(x)$,… , $\boldsymbol{P}_i(x)$ ….の内積をとる。
- 直交関数展開後の係数

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$$
$$= (f(x)\cdot \boldsymbol{P}_0(x),\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_1(x),\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_2(x),\ \ldots.,\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_i(x), \ldots)$$
$$= \left(\int f(x)P_0(x)dx, \int f(x)P_1(x)dx, \int f(x)P_2(x)dx, \ldots., \int f(x)P_i(x)dx, \ldots..\right)$$



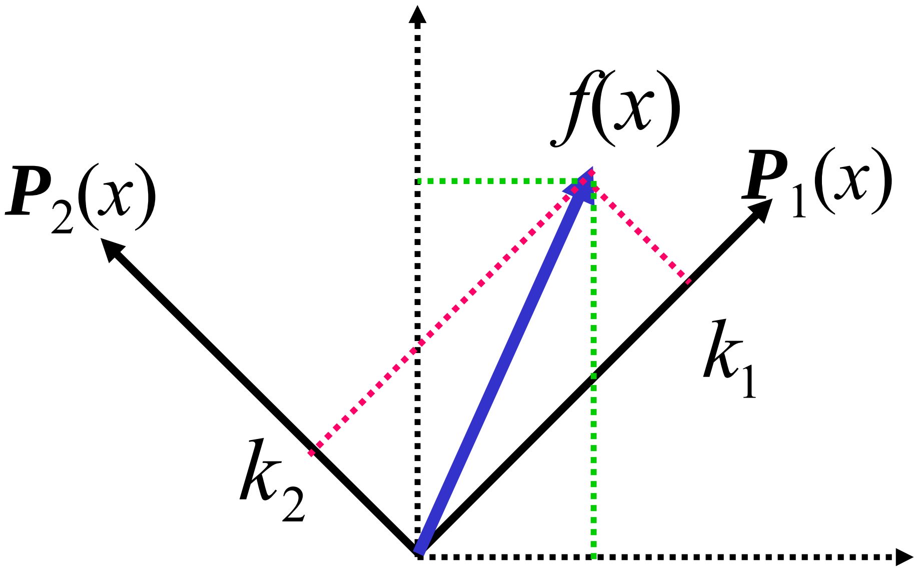
$$k_0 = \int f(x)P_0(x)dx$$
$$k_1 = \int f(x)P_1(x)dx$$
$$k_2 = \int f(x)P_2(x)dx$$

直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $\boldsymbol{P}_0(x)$, $\boldsymbol{P}_1(x)$, $\boldsymbol{P}_2(x)$,… , $\boldsymbol{P}_i(x)$ ….の内積をとる。
- 直交関数展開

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_1 P_1(x) + k_2 P_2(x) + \ldots\ldots k_i P_i(x) + \ldots\ldots$$

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$$
$$= (f(x)\cdot \boldsymbol{P}_0(x),\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_1(x),\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_2(x),\ \ldots,\ f(x)\cdot \boldsymbol{P}_i(x), \ldots)$$



$$k_0 = \int f(x) P_0(x)\,dx$$

$$k_1 = \int f(x) P_1(x)\,dx$$

$$k_2 = \int f(x) P_2(x)\,dx$$