デジタル情報処理

フーリエ解析

佐藤　嘉伸

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

日本語ページ　→　授業の資料　→　デジタル情報処理

デジタル情報処理：授業の予定

- 最小二乗法
  - 多変数の微分の基礎
  - 線形代数の基礎
- 直交関数展開
- フーリエ解析
- 標本化定理
- （主成分分析）

高校 数II のレベルを前提とする。
重要な数理手法をわかりやすく説明する。
重要項目に重点を絞る。

参考文献

- ネット検索
  - キーワード
    - 金谷健一
    - 応用数学教室

- これなら分かる応用数学教室
  - 最小二乗法からウェーブレットまで
  - 金谷健一著　共立出版　３０４５円

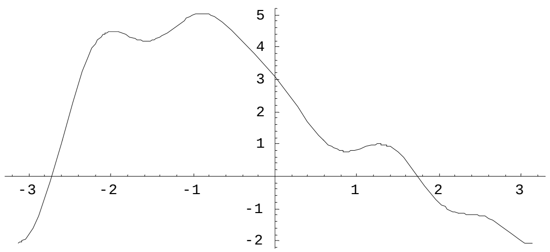
- フーリエの冒険
  - ヒッポファミリークラブ著
  - 言語交流研究所ヒッポファミリークラブ　発行
  - ３６０５円

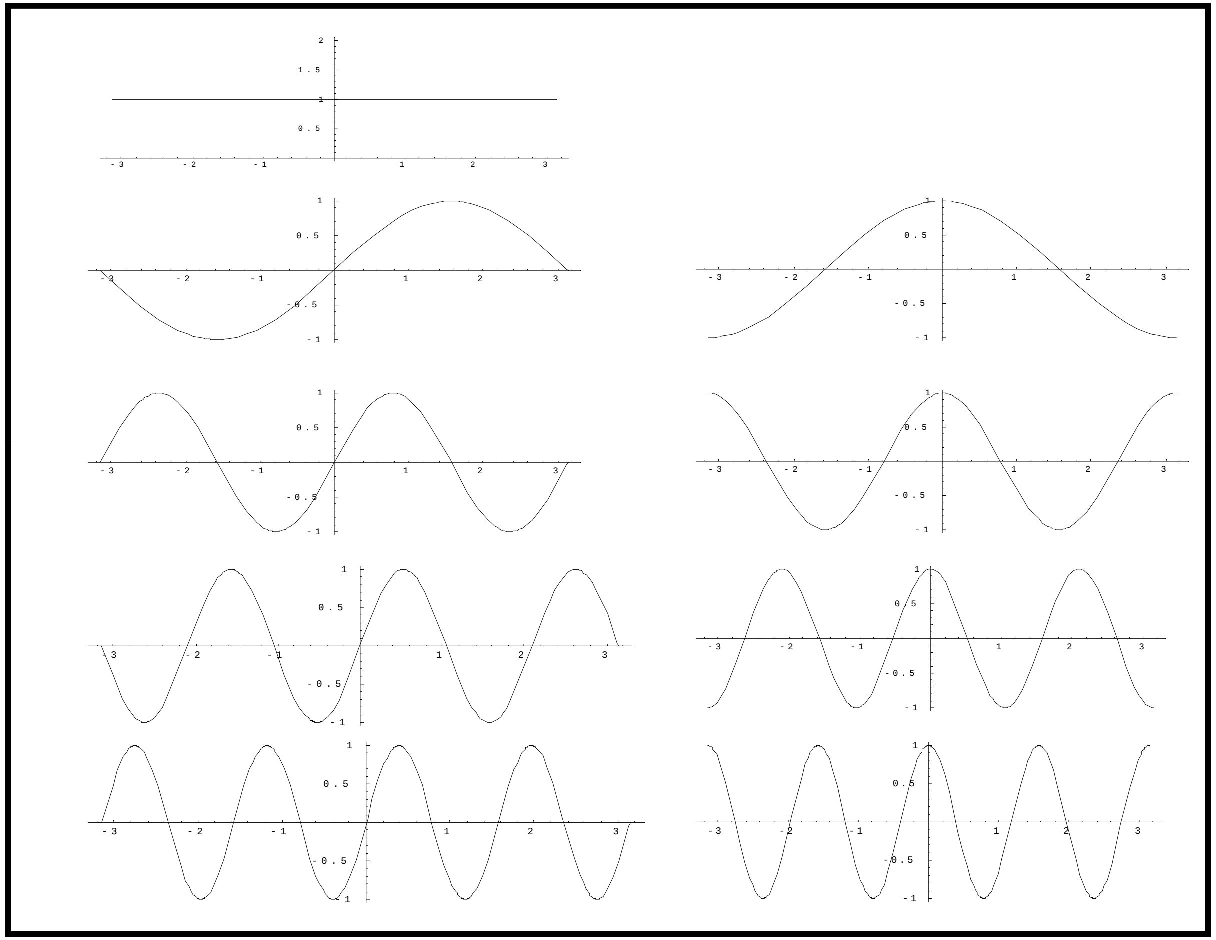
フーリエ解析

- 波形を三角関数（正弦波）に分解する。

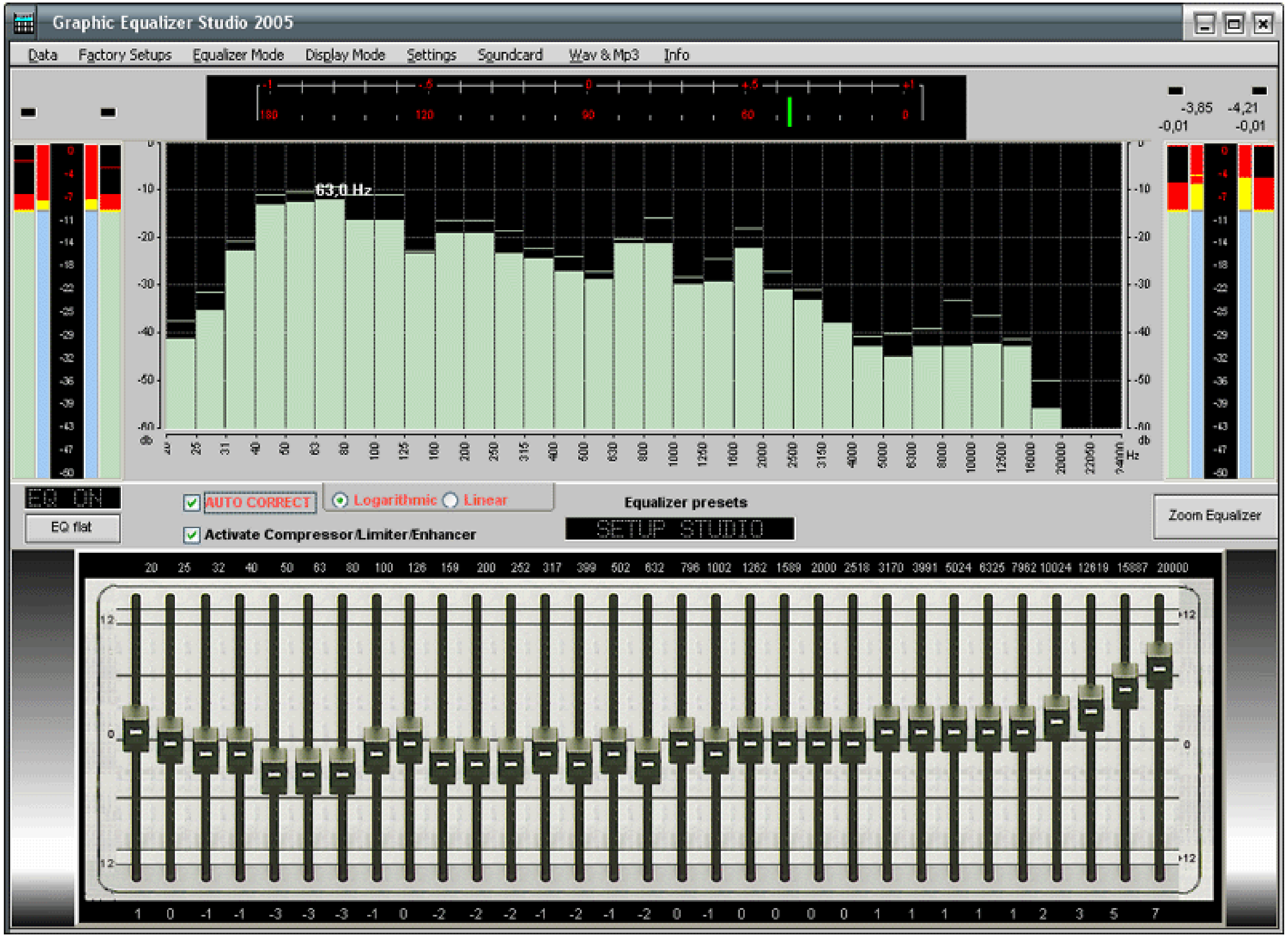
正弦波

波形





What is this?



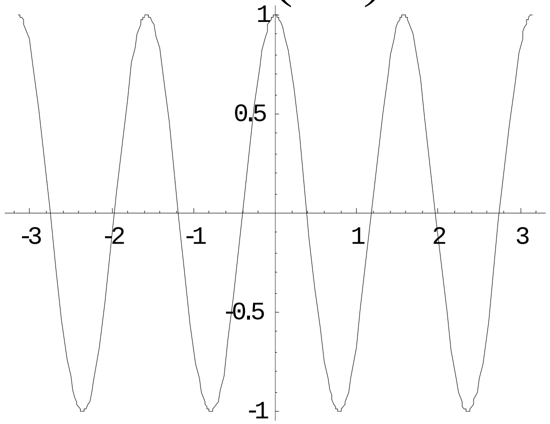
Graphic Equalizer Studio 2005
Data
Factory Setups
Equalizer Mode
Display Mode
Settings
Soundcard
Wav & Mp3
Info
63,0 Hz
EQ ON
EQ flat
AUTO CORRECT
Logarithmic
Linear
Activate Compressor/Limiter/Enhancer
Equalizer presets
SETUP STUDIO
Zoom Equalizer

音楽の波形を考える

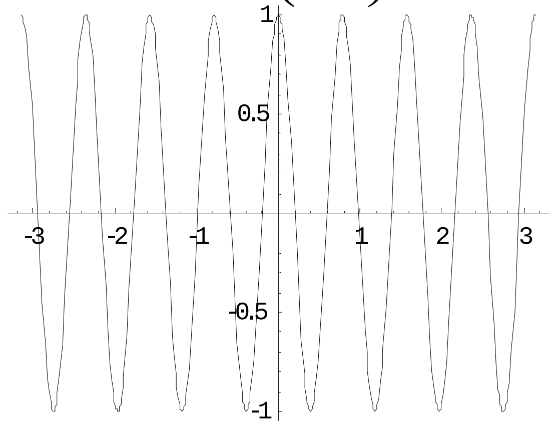
- 音の高さ＝周波数

低周波 → 高周波

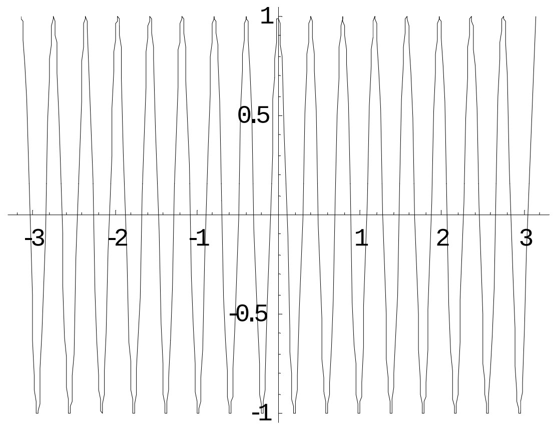
Sin(4*x*)



Sin(8*x*)



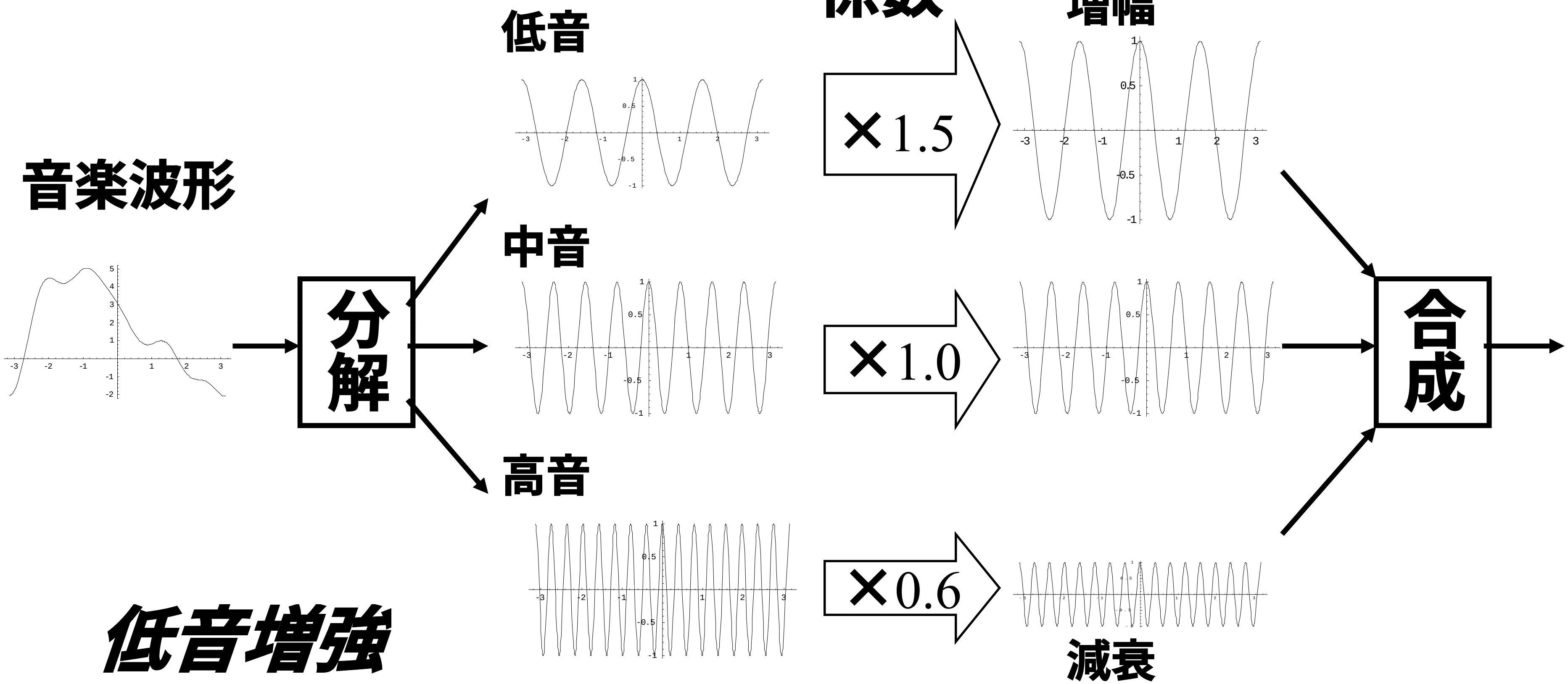
Sin(16*x*)



低い音 → 高い音

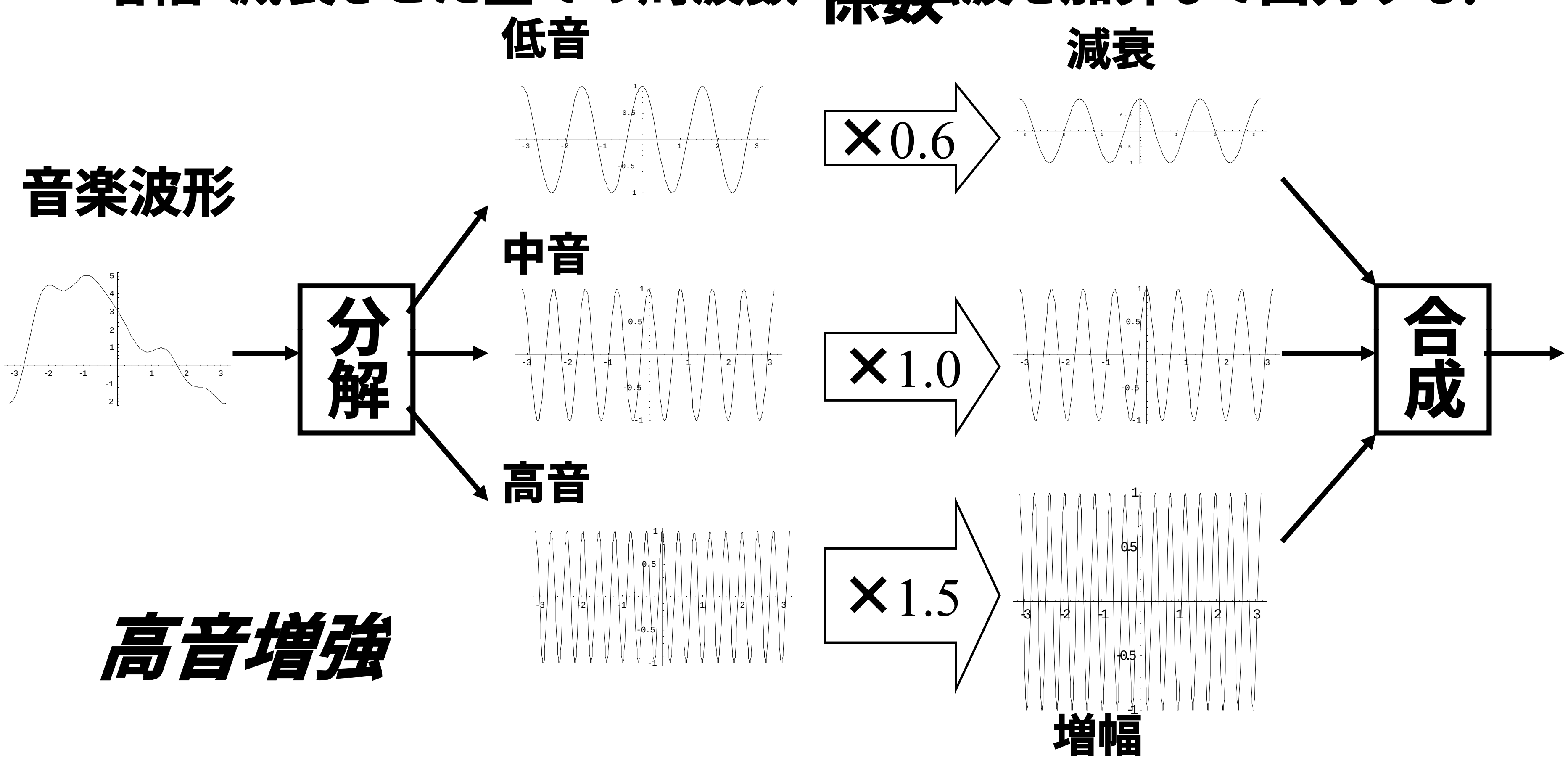
グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



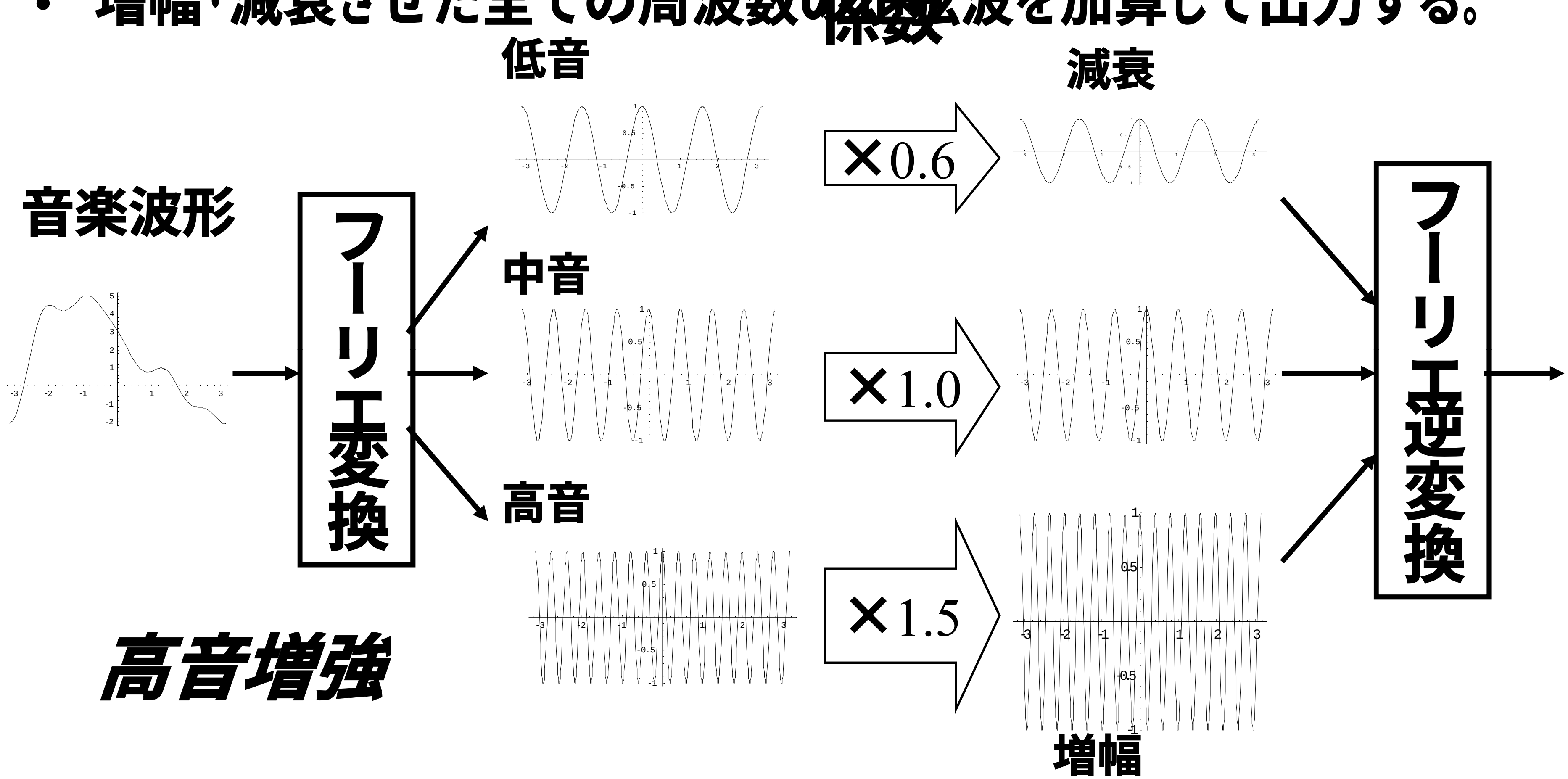
グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



グラフィックイコライザー

- 音楽の波形を正弦波に分解する。
- 各周波数の正弦波を予め設定した係数により増幅・減衰させる。
- 増幅・減衰させた全ての周波数の正弦波を加算して出力する。



グラフィックイコライザー

- グラフィックイコライザーの表示は、まさしくフーリエ変換である。
- グラフィックイコライザーは、各周波数毎に増幅（減衰）率を変えることにより、音質を変化させている。
- このような機能は、「周波数フィルタ」と呼ばれる。

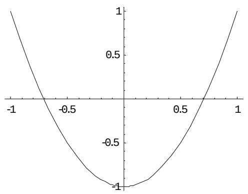
フーリエ変換

- フーリエ変換により、波形を正弦波に分解し、各周波数毎の正弦波の振幅（波の高さ）と位相（波の位置）を求めることができる。
- ただし、位相を理解するのは、やや難しいので、当面、振幅のみを考える。

周波数 ω

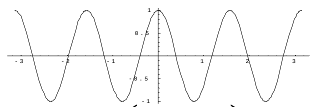
$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積

波形 $f(x)$



フーリエ変換

低周波 ω_1

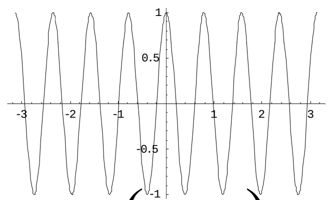


$\cos(\omega_1 x)$

振幅

$$F(\omega_1) = \int f(x)\cos(\omega_1 x)dx$$

中周波 ω_2

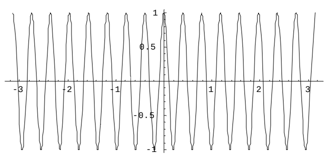


$\cos(\omega_2 x)$

振幅

$$F(\omega_2) = \int f(x)\cos(\omega_2 x)dx$$

高周波 ω_3

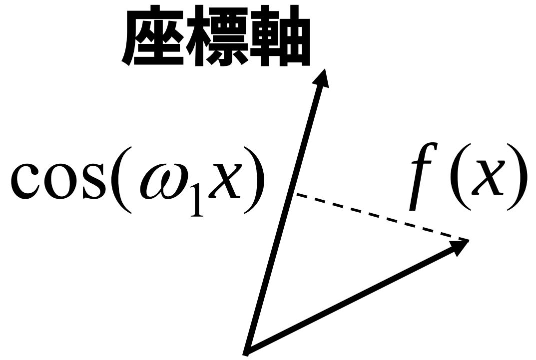


$\cos(\omega_3 x)$

振幅

$$F(\omega_3) = \int f(x)\cos(\omega_3 x)dx$$

内積の意味



座標値を求めることが内積をとることに相当する.

$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積

$$F(\omega_1) = \int f(x)\cos(\omega_1 x)dx$$ は、

$f(x)$ から $\cos(\omega_1 x)$ の成分 $F(\omega_1)$ のみを抽出する。

内積をとる ＝ 成分の分離

コーラと砂糖の内積 ＝ 砂糖成分の分離
コーラとカフェインの内積 ＝ カフェイン成分の分離

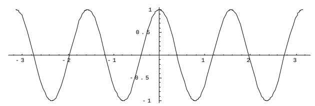
$f(x)$ と $\cos(\omega_1 x)$ の内積 ＝ $\cos(\omega_1 x)$ 成分の分離

フーリエ変換

- 偶関数 (原点を中心として対称な関数) のみを対象とすると、cos 成分のみを考えればよい。また、位相も考えなくて良い。

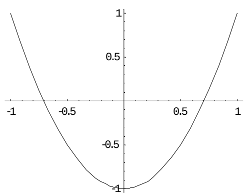
周波数 ω

低周波 ω_1



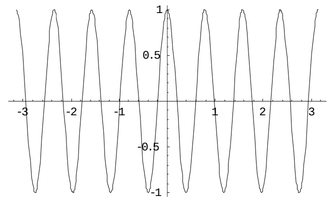
振幅

波形 $f(x)$



フーリエ変換

中周波 ω_2

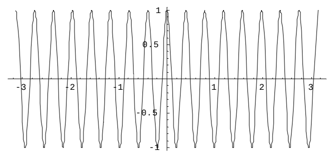


$$F(\omega) = \int f(x)\cos(\omega x)dx$$

波形の成分分析

$F(\omega)$ はω成分の量を表す

高周波 ω_3

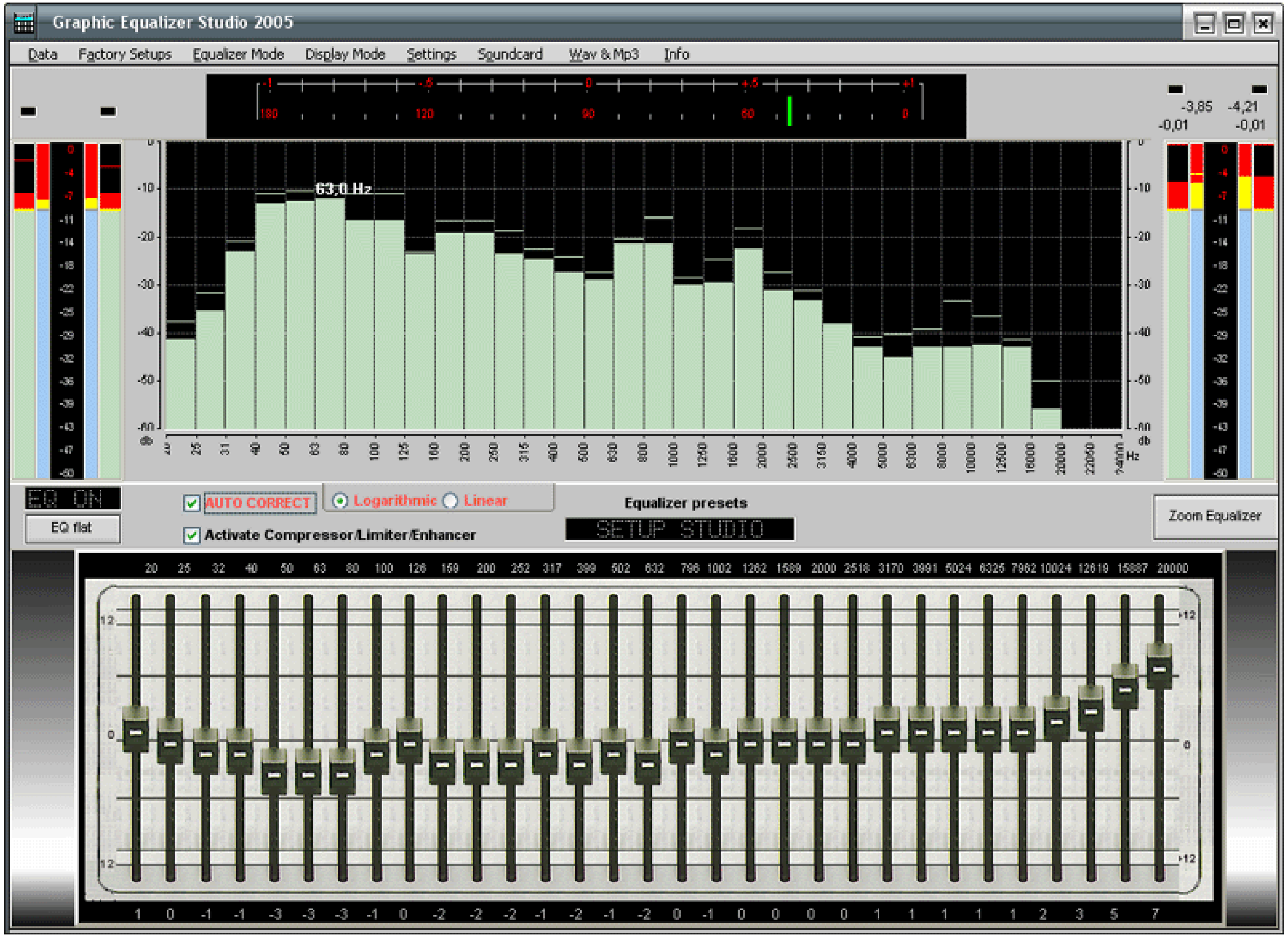


偶関数化：$f(x) + f(-x)$

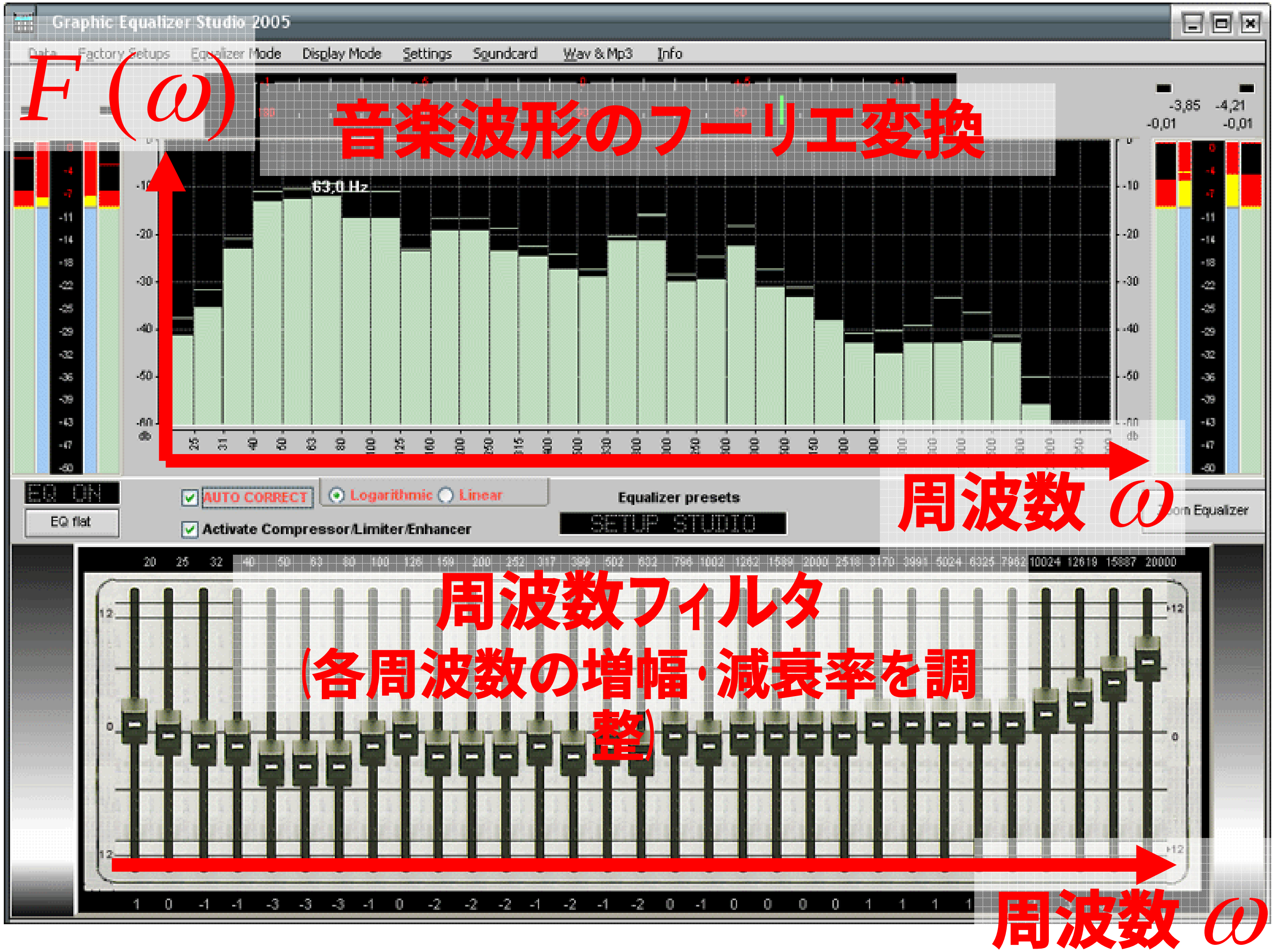
DCT jpeg

Discrete Cosine Transform

以下のグラフィックイコライザーで、さきほど勉強したことを確認せよ。



以下のグラフィックイコライザーで、さきほど勉強したことを確認せよ。

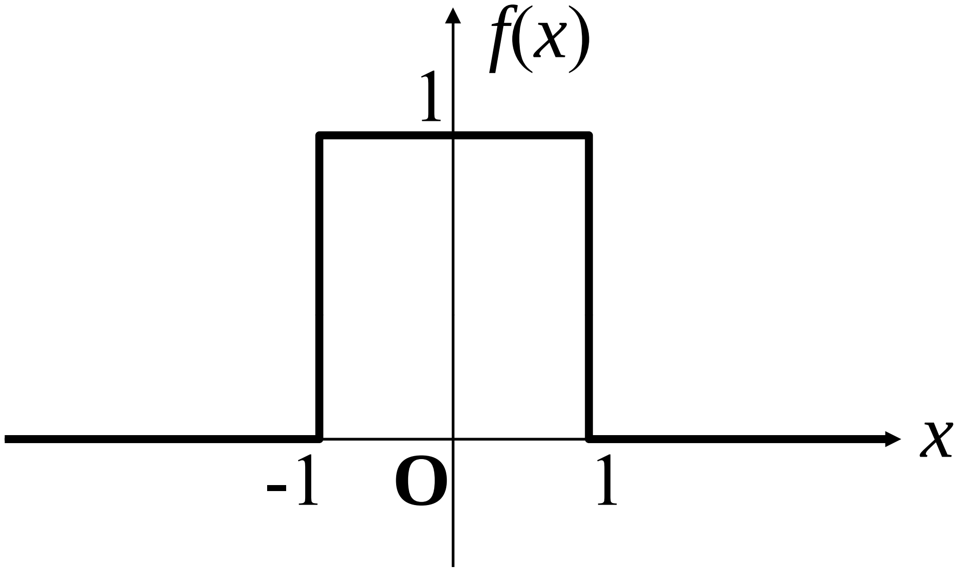


演習問題：Mathematicaを使った直交関数展開

- Mathematicaを用いて、以下の関数 $f(x)$ を三角関数系で直交関数展開をせよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1/2$$
$$P_{s1}(x) = \sin x$$
$$P_{c1}(x) = \cos x$$
$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$
$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$
$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$
$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$



$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_{s1} P_{s1}(x) + k_{c1} P_{c1}(x) + k_{s2} P_{s2}(x) + k_{c2} P_{c2}(x) + ...k_i P_i(x) + ...$$

$$k_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P_i(x) dx = \int_{-1}^{1} P_i(x) dx$$

演習問題：Mathematicaを使った直交関数展開

- k_i (i = 0, $s1$, $c1$, $s2$, $c2$, $s3$, $c3$, $s4$, $c4$, $s5$, $c5$) を計算せよ。

$$k_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_i(x)dx = \int_{-1}^{1} P_i(x)dx$$

- 以下をグラフとしてプロットせよ。

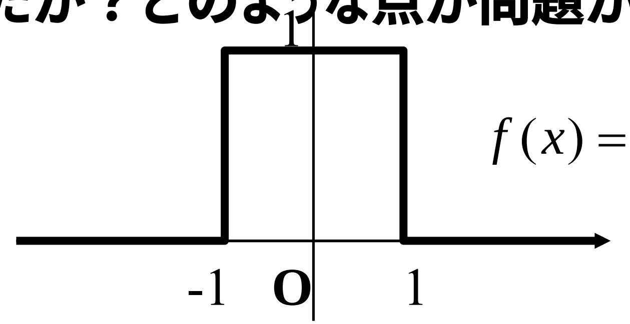
$$f(x) \approx k_0P_0(x) + k_{s1}P_{s1}(x) + k_{c1}P_{c1}(x) + ... + k_{s5}P_{s5}(x) + k_{c5}P_{c5}(x)$$

- k_iにはどのような法則性があるか？　それは、なぜか？
- k_{cj} (j = 1, 2, 3 , 4, …….)を j を変数とする数式でかけ。
- Mathematica において、以下の式を表現し、nをいろいろな値に設定してグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{sj}P_{sj}(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{cj}P_{cj}(x)$$

- $f(x)$は、三角関数系による直交関数展開により、うまく表現されたか？どのような点が問題か？

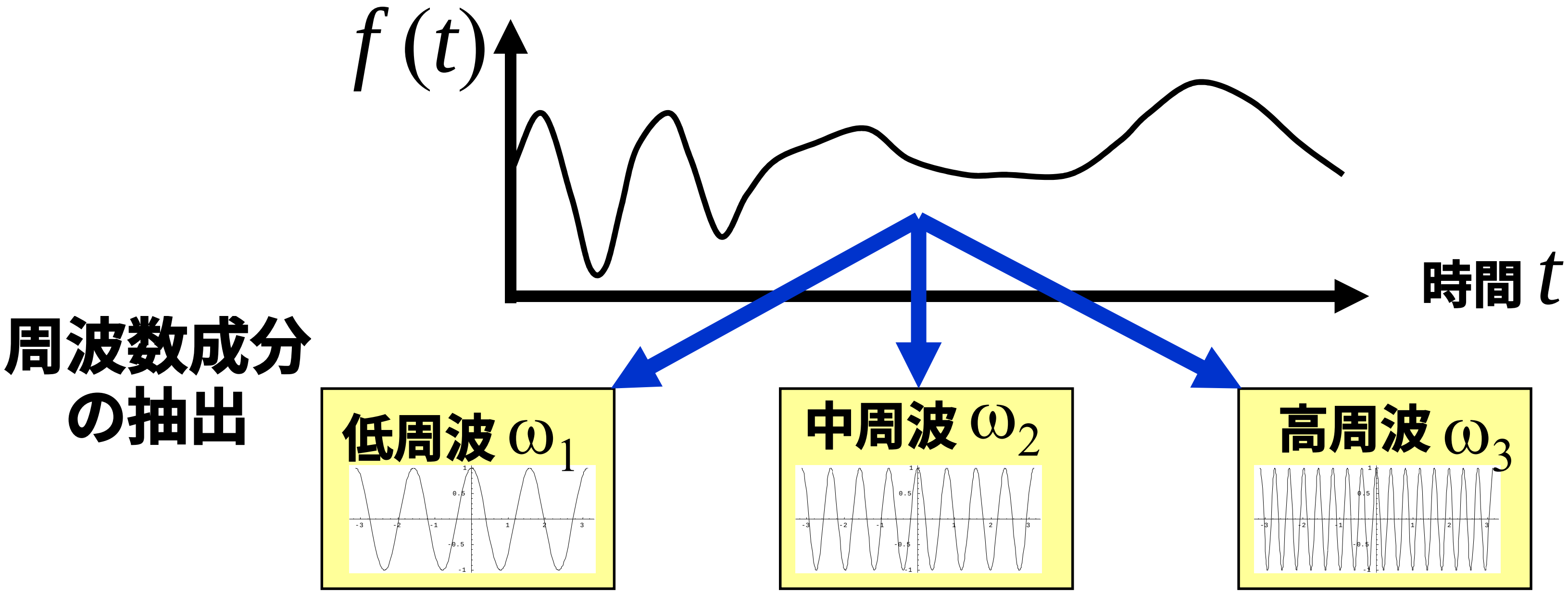
$$P_0(x) = 1/2$$
$$P_{s1}(x) = \sin x$$
$$P_{c1}(x) = \cos x$$
$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$
$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$
$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$
$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$



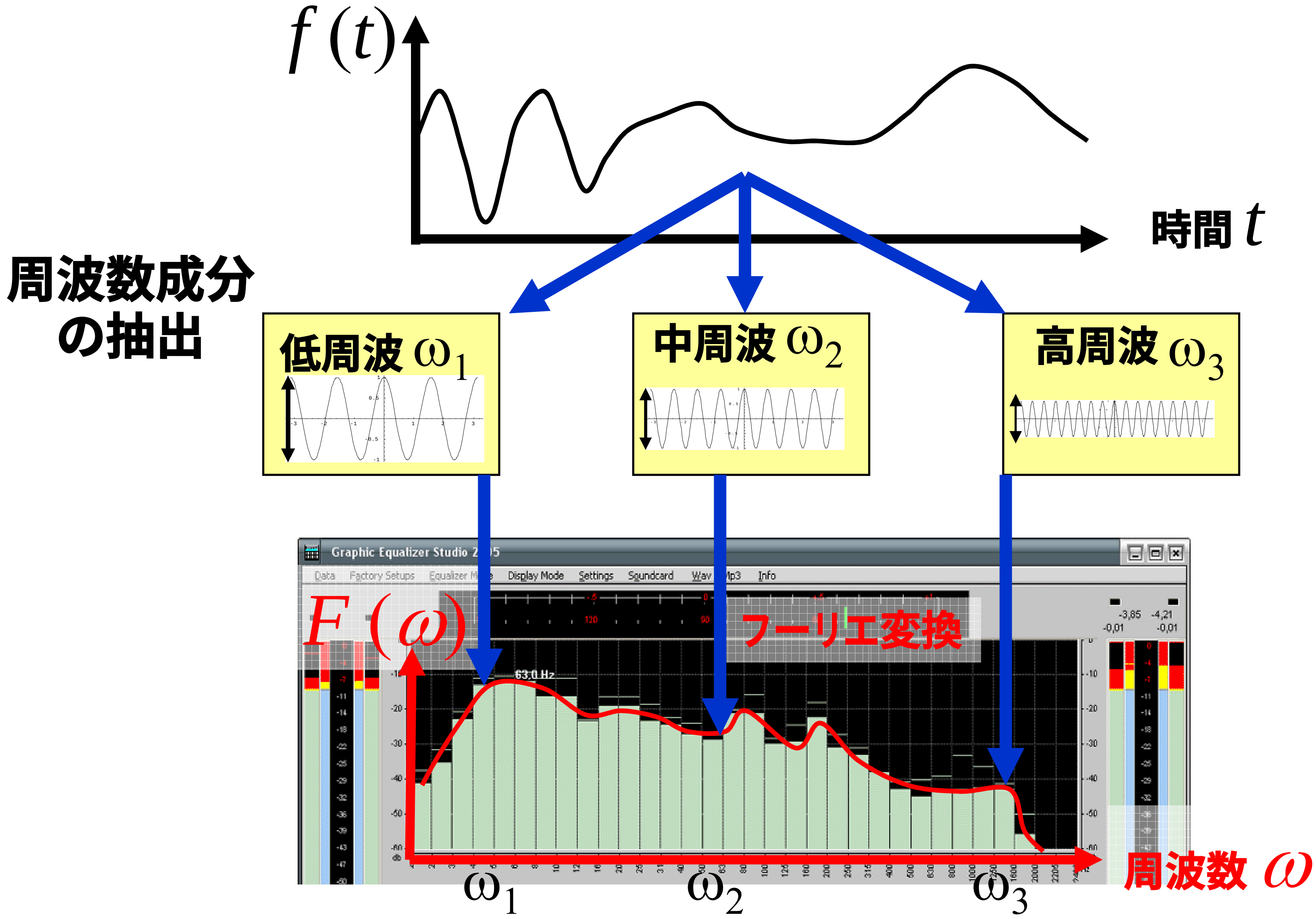
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

フーリエ変換

時間 t の関数



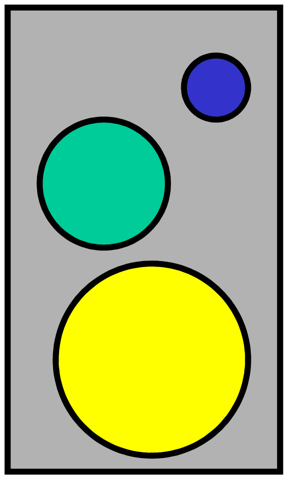
フーリエ変換

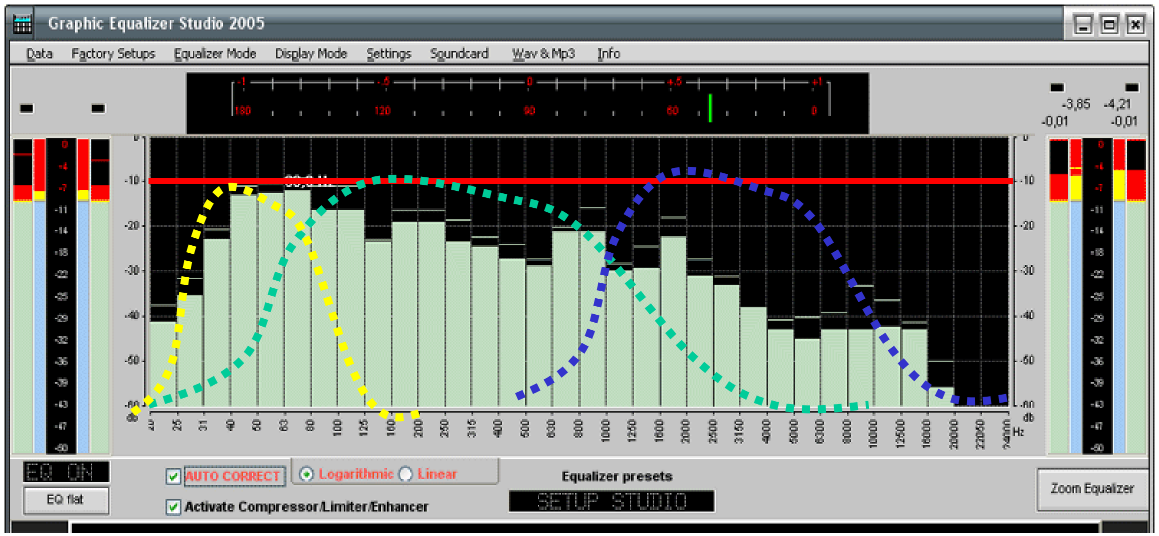


$f(t)$
時間 t
周波数成分
の抽出
低周波 ω_1
中周波 ω_2
高周波 ω_3
Graphic Equalizer Studio 2005
$F(\omega)$
フーリエ変換
63.0 Hz
周波数 ω
ω_1
ω_2
ω_3

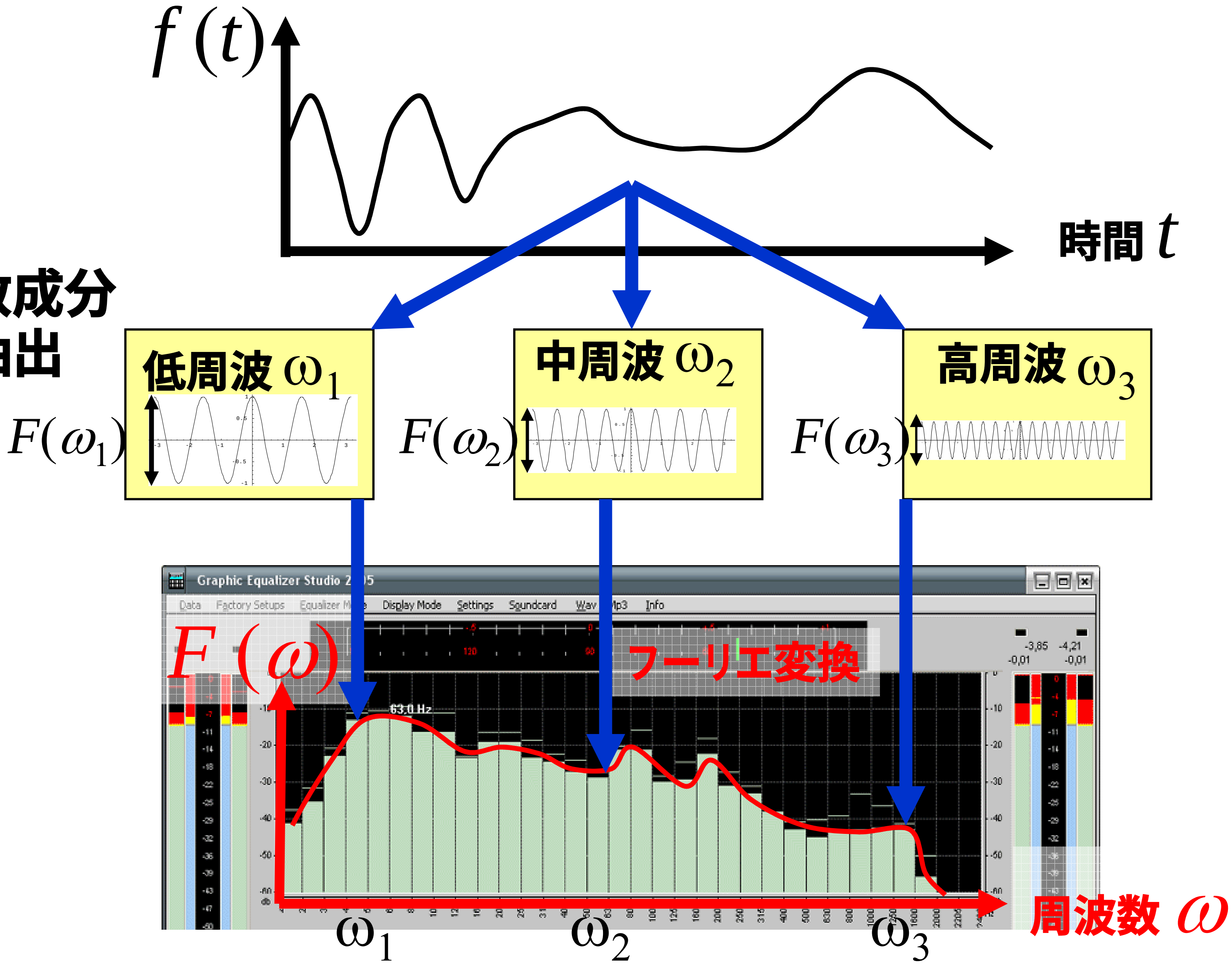
オーディオシステムの周波数特性

- 信号の取り出し (CDプレーヤー)
- 信号の増幅 (アンプ)
- 増幅された信号の出力 (スピーカー)



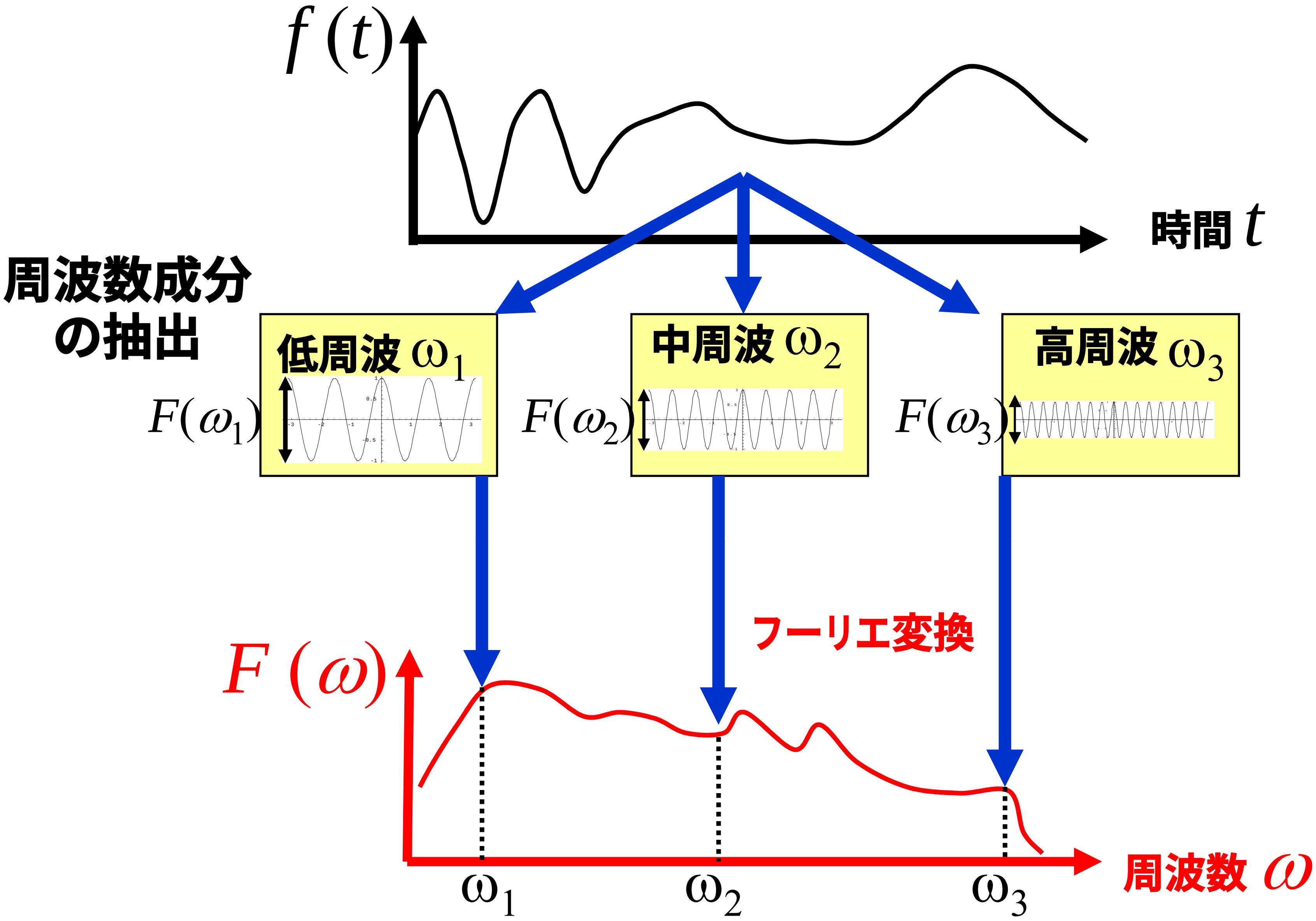


フーリエ変換



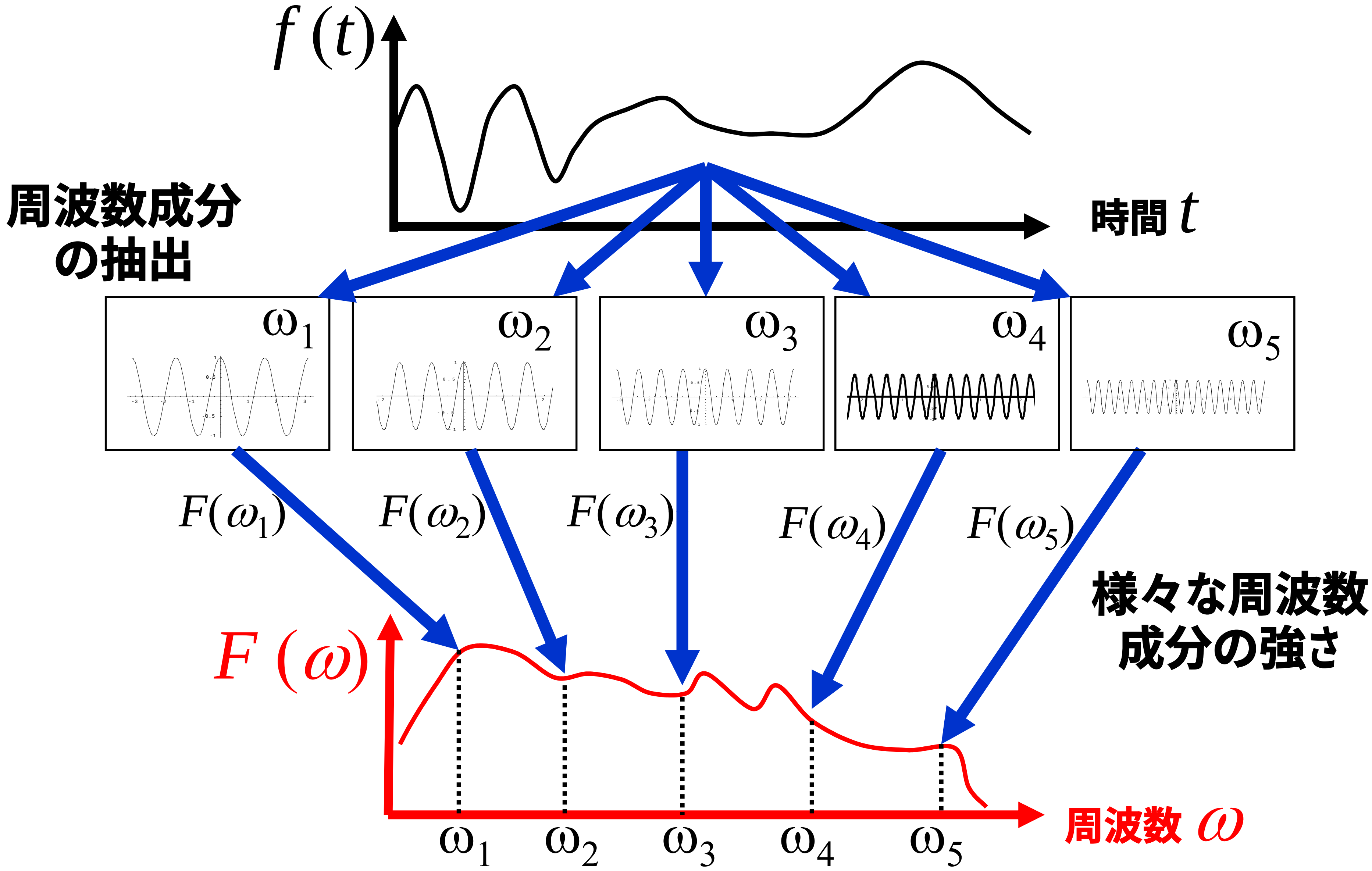
$f(t)$
時間 t
周波数成分
の抽出
低周波 ω_1
中周波 ω_2
高周波 ω_3
$F(\omega_1)$
$F(\omega_2)$
$F(\omega_3)$
Graphic Equalizer Studio
$F(\omega)$
フーリエ変換
63.0 Hz
周波数 ω
ω_1
ω_2
ω_3

フーリエ変換



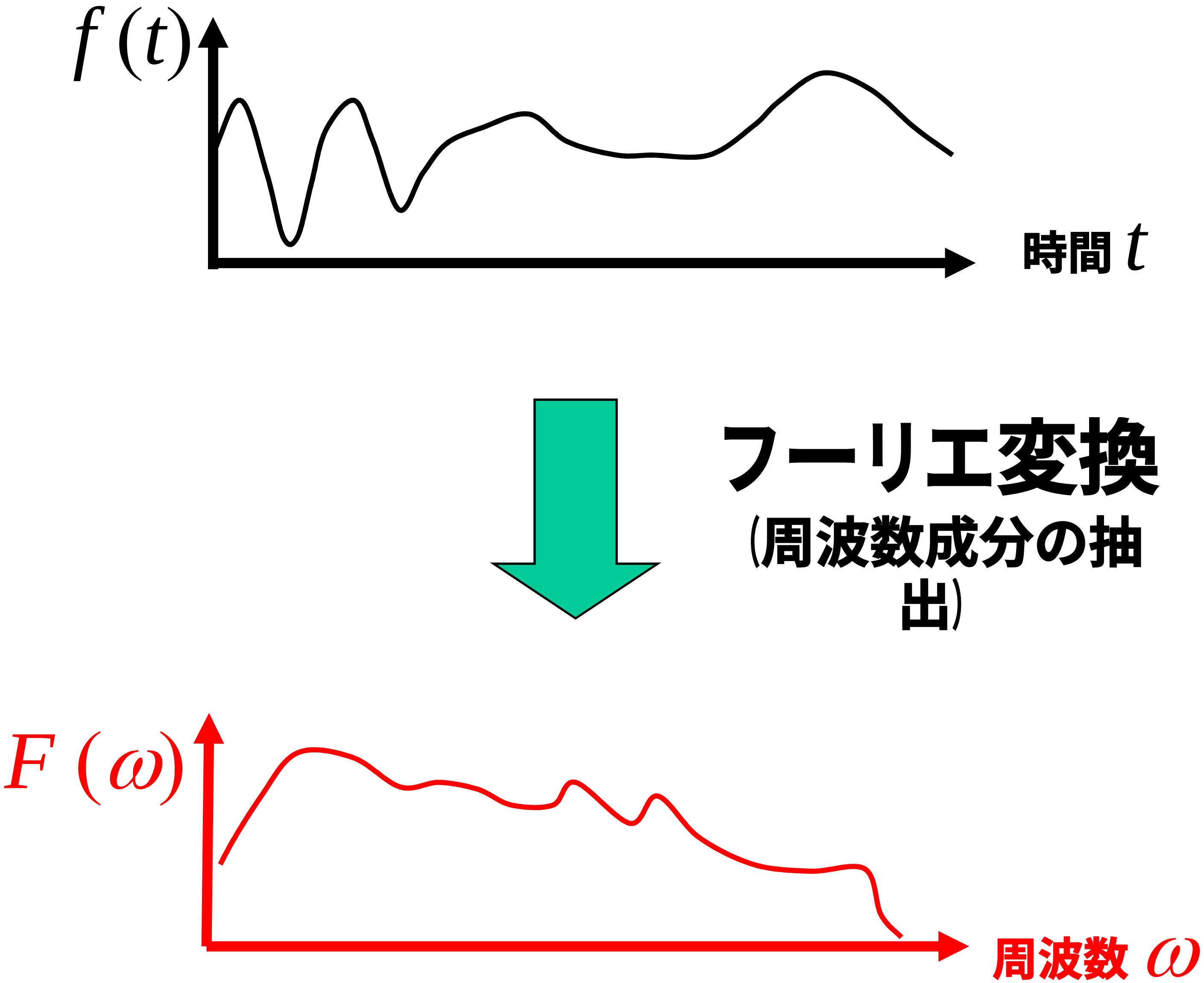
$f(t)$
時間 t
周波数成分の抽出
低周波 ω_1
中周波 ω_2
高周波 ω_3
$F(\omega_1)$
$F(\omega_2)$
$F(\omega_3)$
フーリエ変換
$F(\omega)$
周波数 ω
ω_1
ω_2
ω_3

フーリエ変換



f (t)
時間 t
周波数成分
の抽出
ω1
ω2
ω3
ω4
ω5
F(ω1)
F(ω2)
F(ω3)
F(ω4)
F(ω5)
様々な周波数
成分の強さ
F (ω)
周波数 ω
ω1
ω2
ω3
ω4
ω5

フーリエ変換

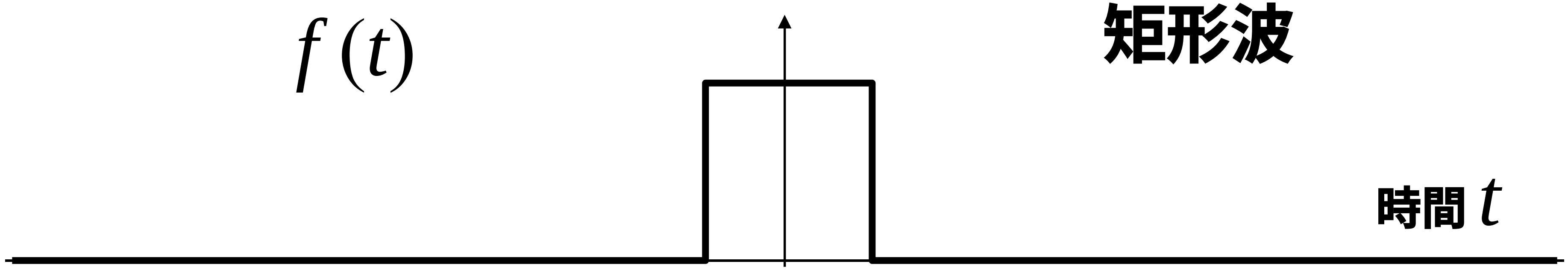


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



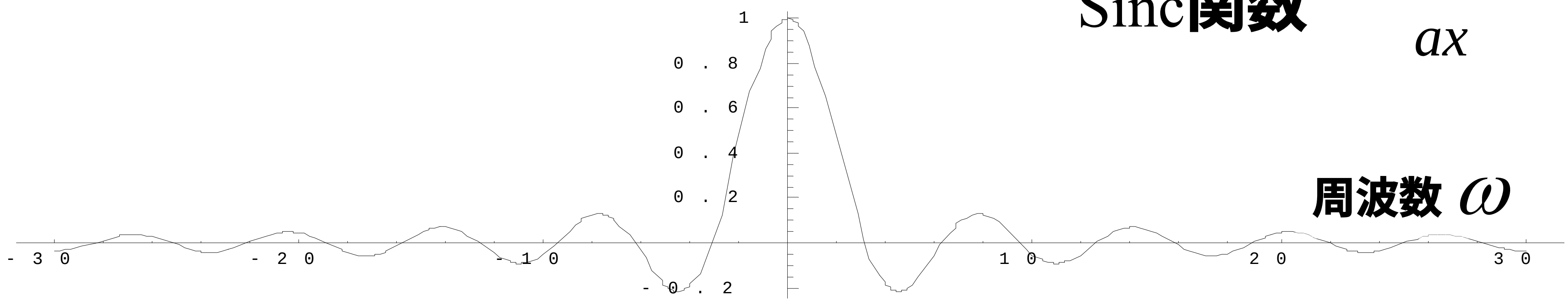
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

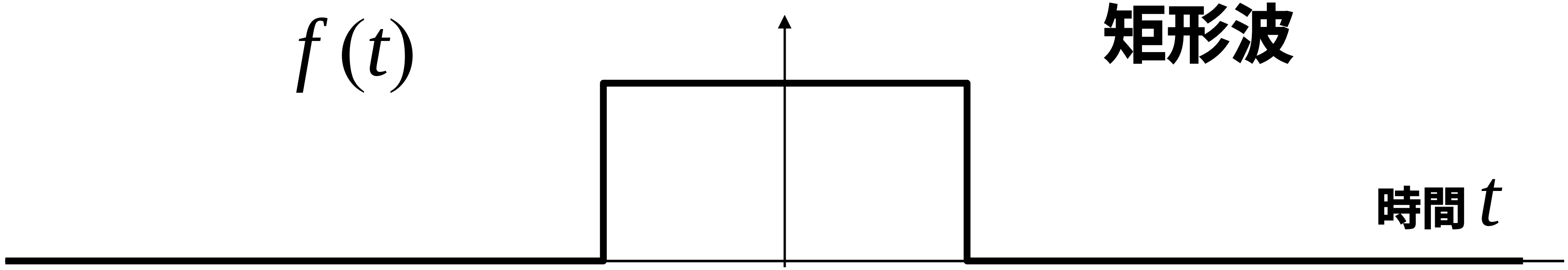


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



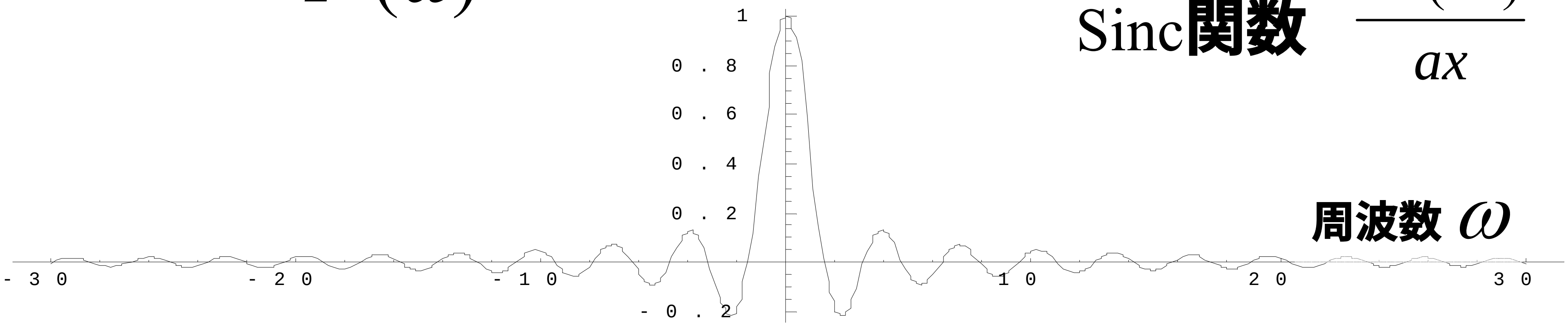
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\frac{\sin(ax)}{ax}$

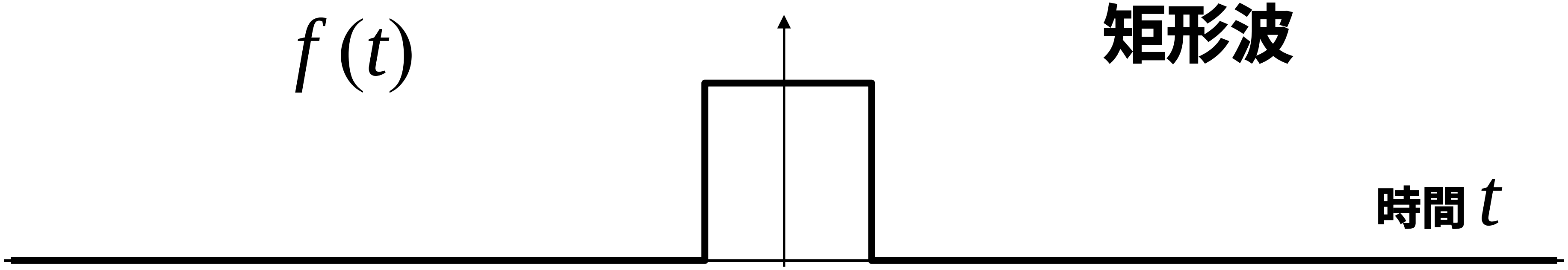


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



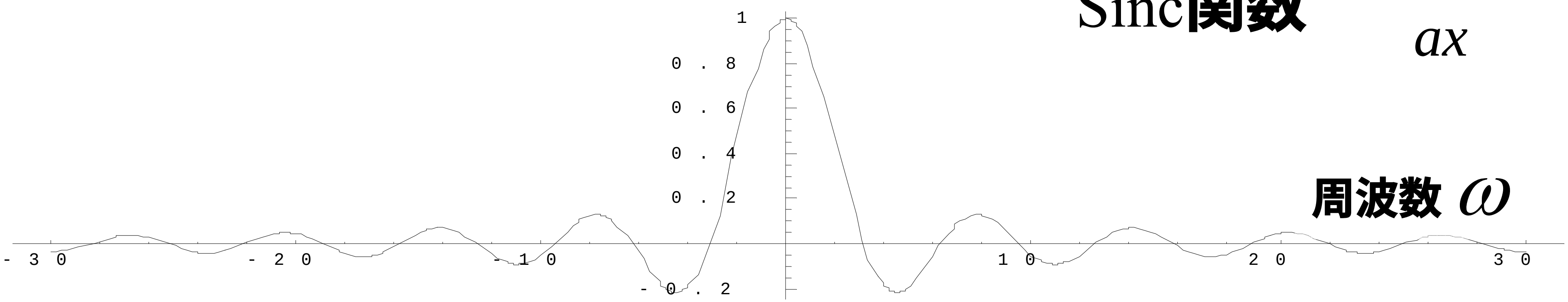
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

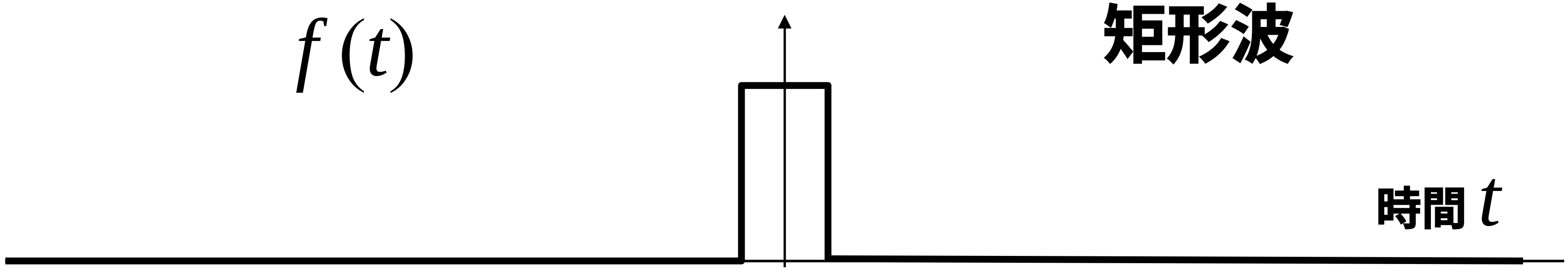


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波

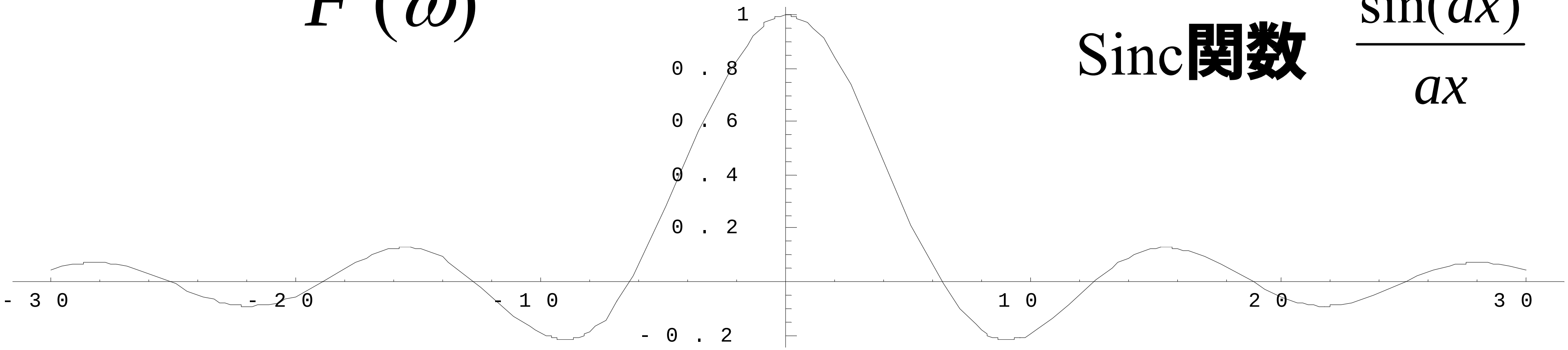


フーリエ変換
（周波数成分の抽出）

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc関数 $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

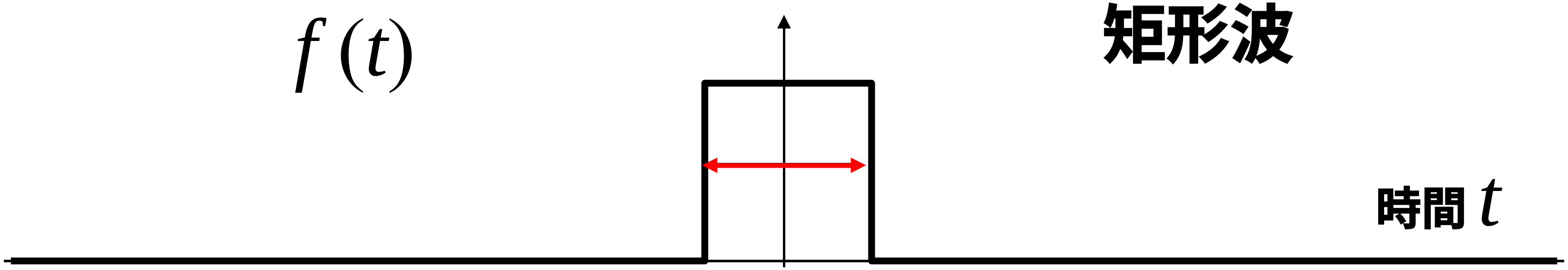


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



時間 t

$\frac{\sin(ax)}{ax}$

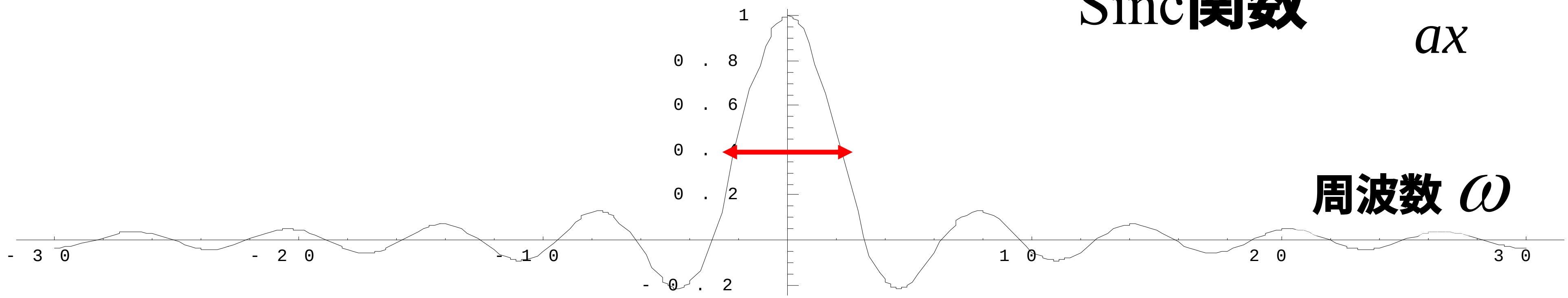
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\frac{\sin(ax)}{ax}$



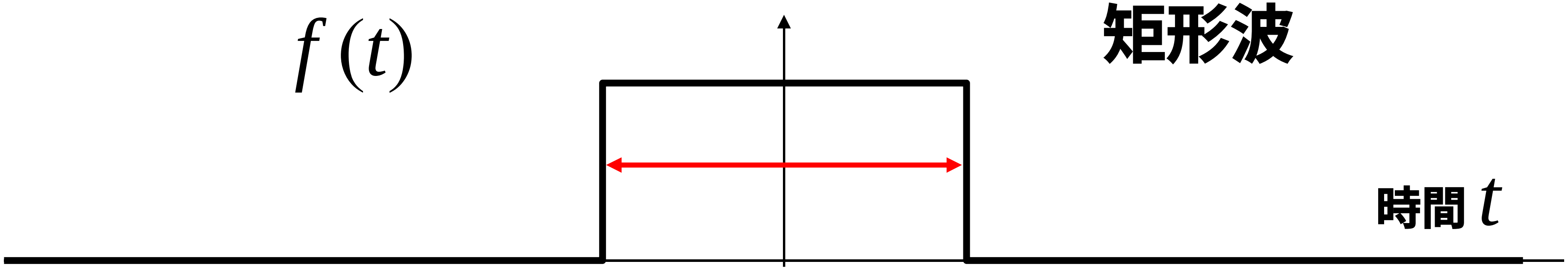
周波数 ω

フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



時間 t

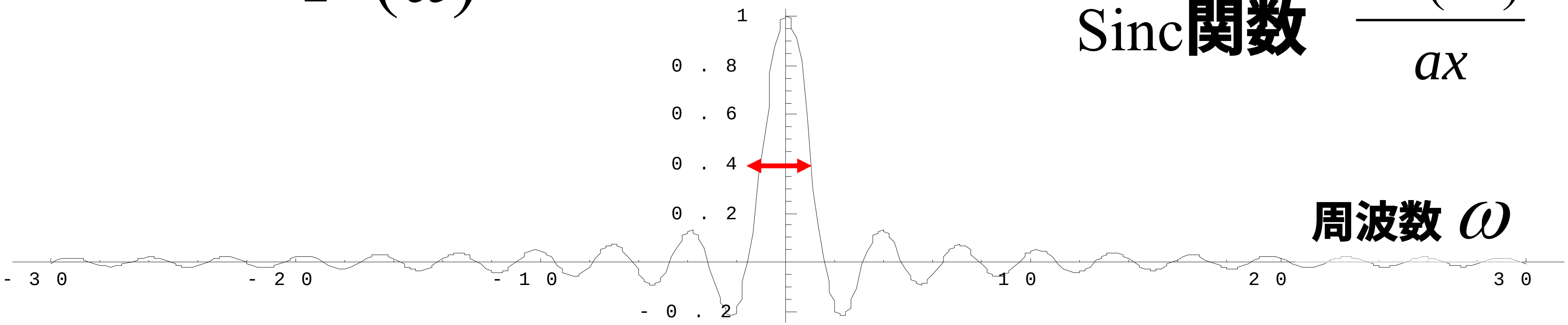
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$



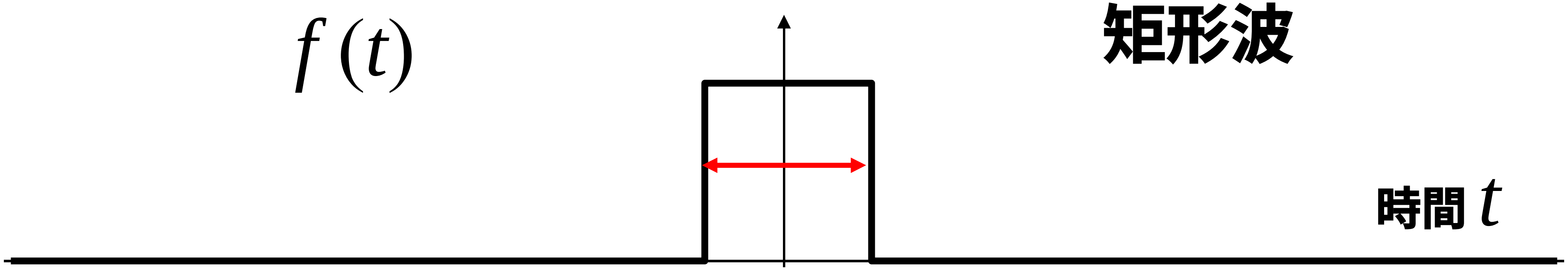
周波数 ω

フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波



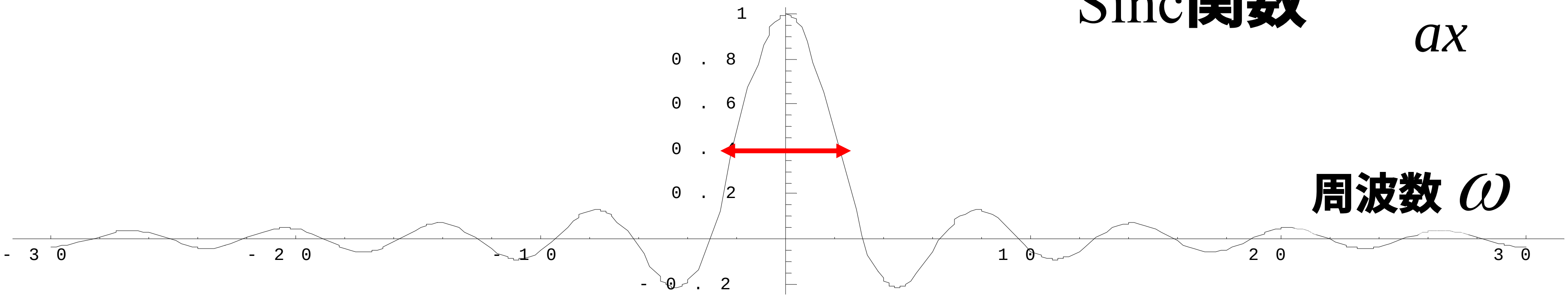
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

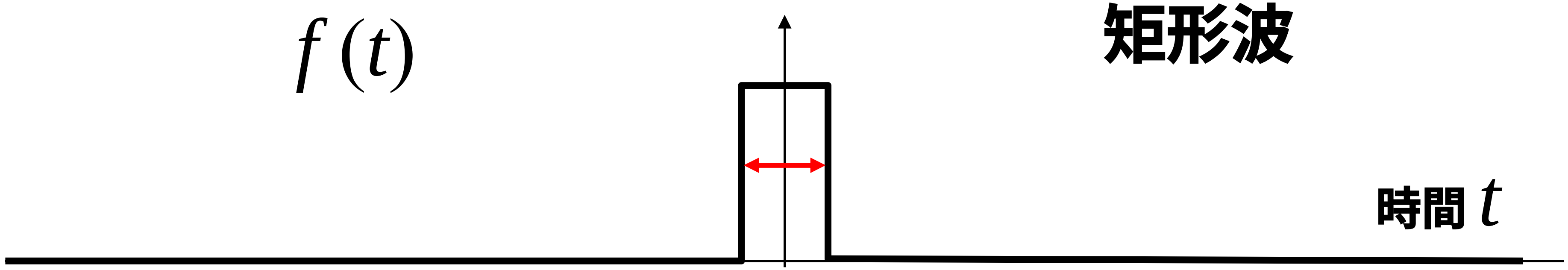


フーリエ変換ペア

時間領域

$f(t)$

矩形波

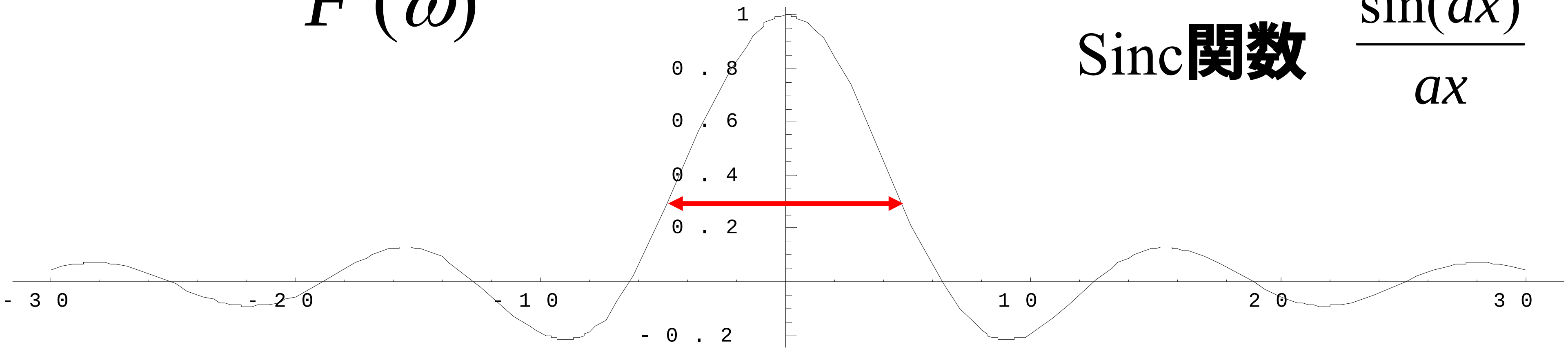


フーリエ変換
(周波数成分の抽出)

周波数領域

$F(\omega)$

Sinc関数 $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

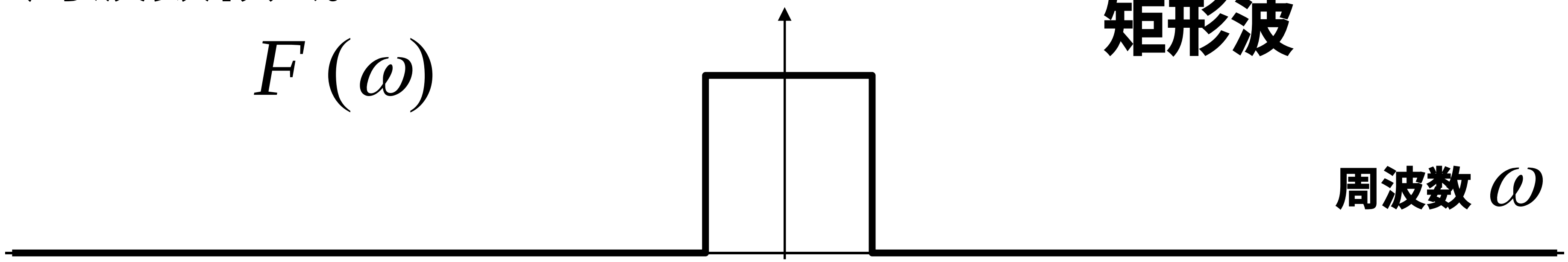


フーリエ変換ペア

周波数領域

$F(\omega)$

矩形波



周波数 ω

フーリエ変換

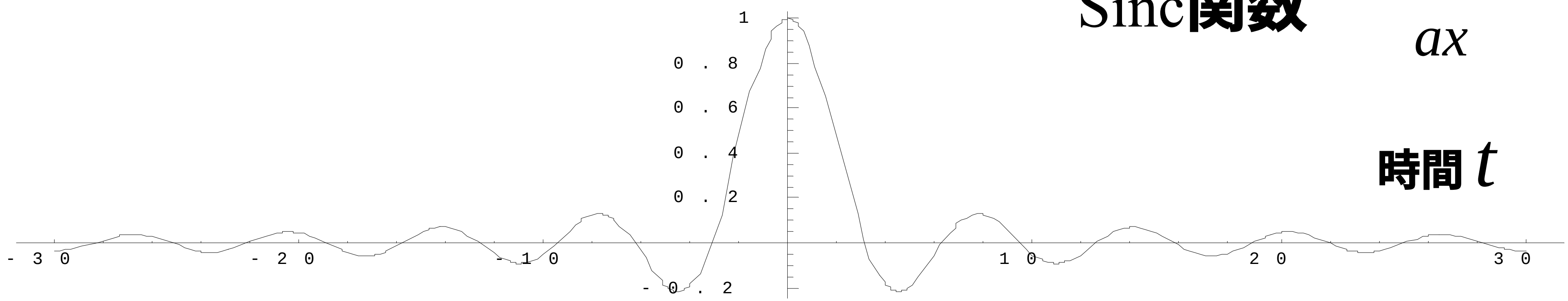
(周波数成分の抽出)

時間領域

$f(t)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

時間 t

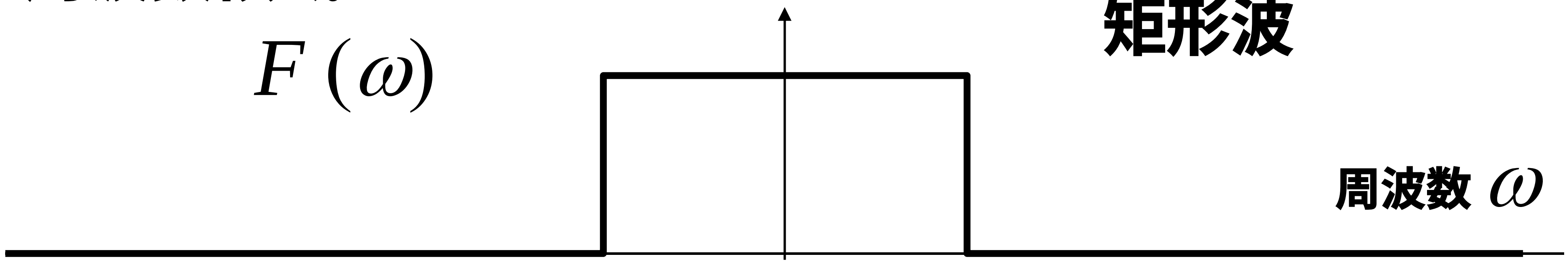


フーリエ変換ペア

周波数領域

$F(\omega)$

矩形波



周波数 ω

時間領域

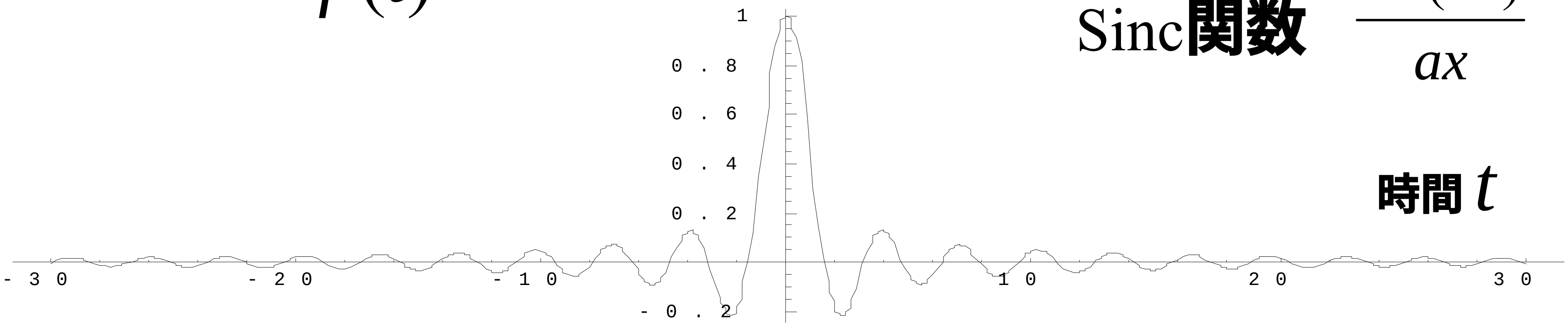
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

$f(t)$

Sinc**関数** $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

時間 t

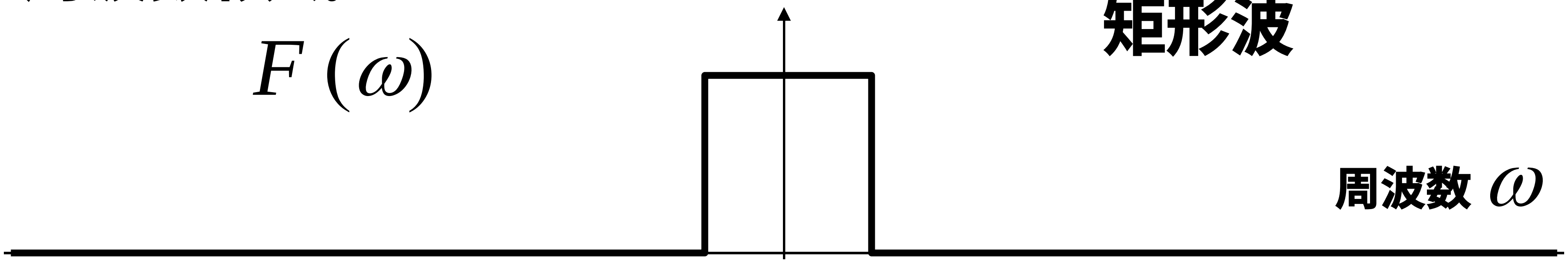


フーリエ変換ペア

周波数領域

$F(\omega)$

矩形波



周波数 ω

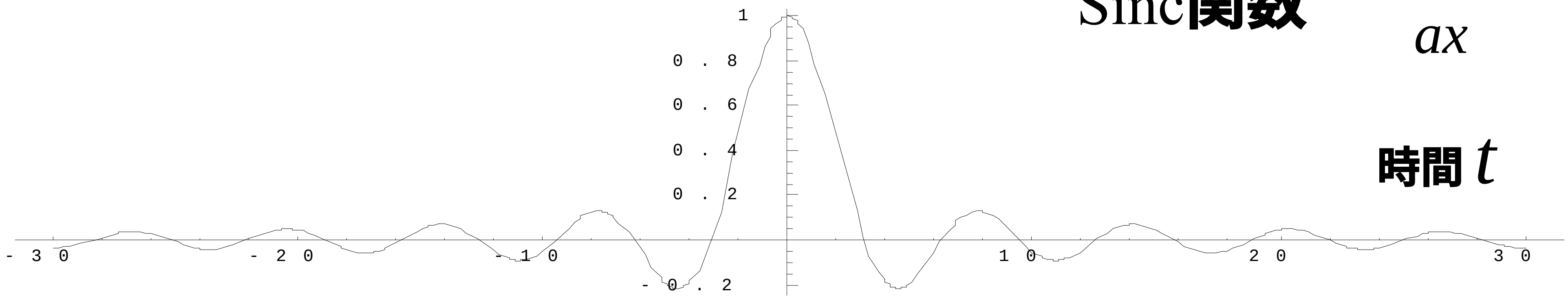
時間領域

$f(t)$

フーリエ変換
(周波数成分の抽出)

Sinc関数 $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

時間 t

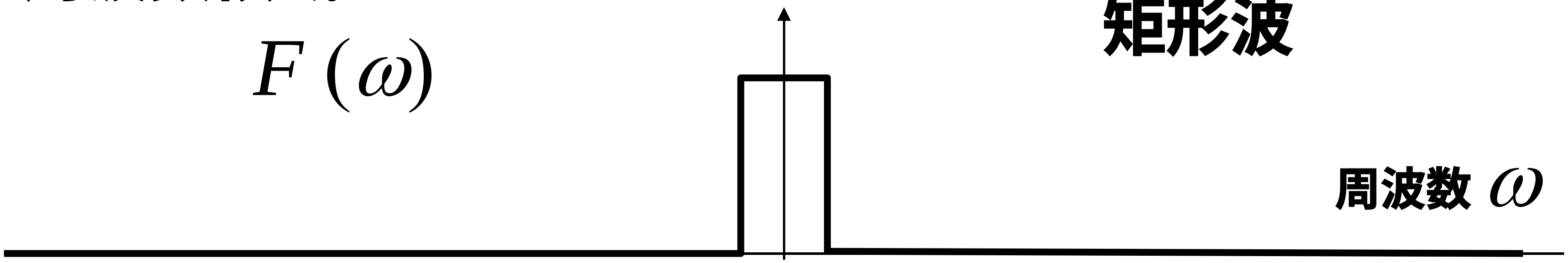


フーリエ変換ペア

周波数領域

$F(\omega)$

矩形波



周波数 ω

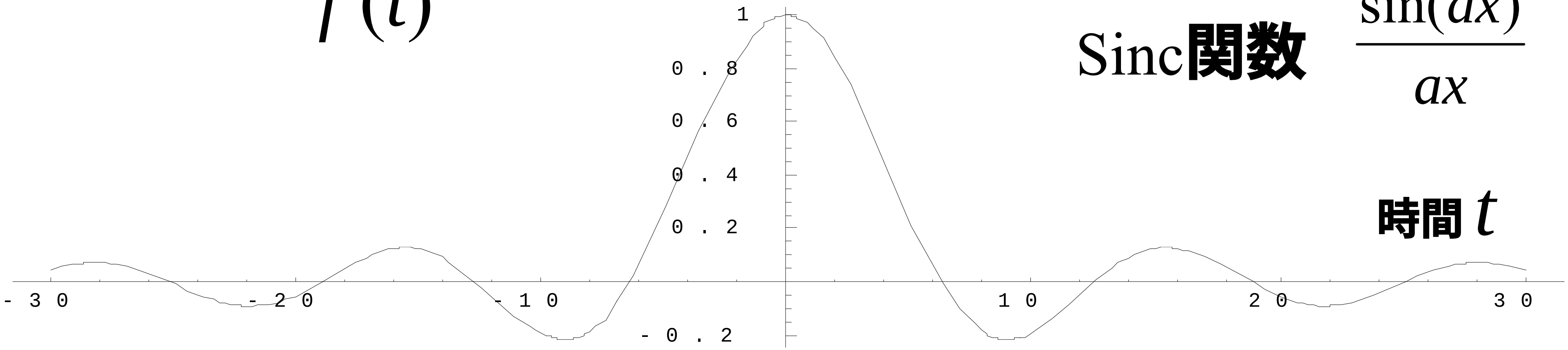
フーリエ変換

(周波数成分の抽出)

時間領域

$f(t)$

Sinc関数 $\dfrac{\sin(ax)}{ax}$

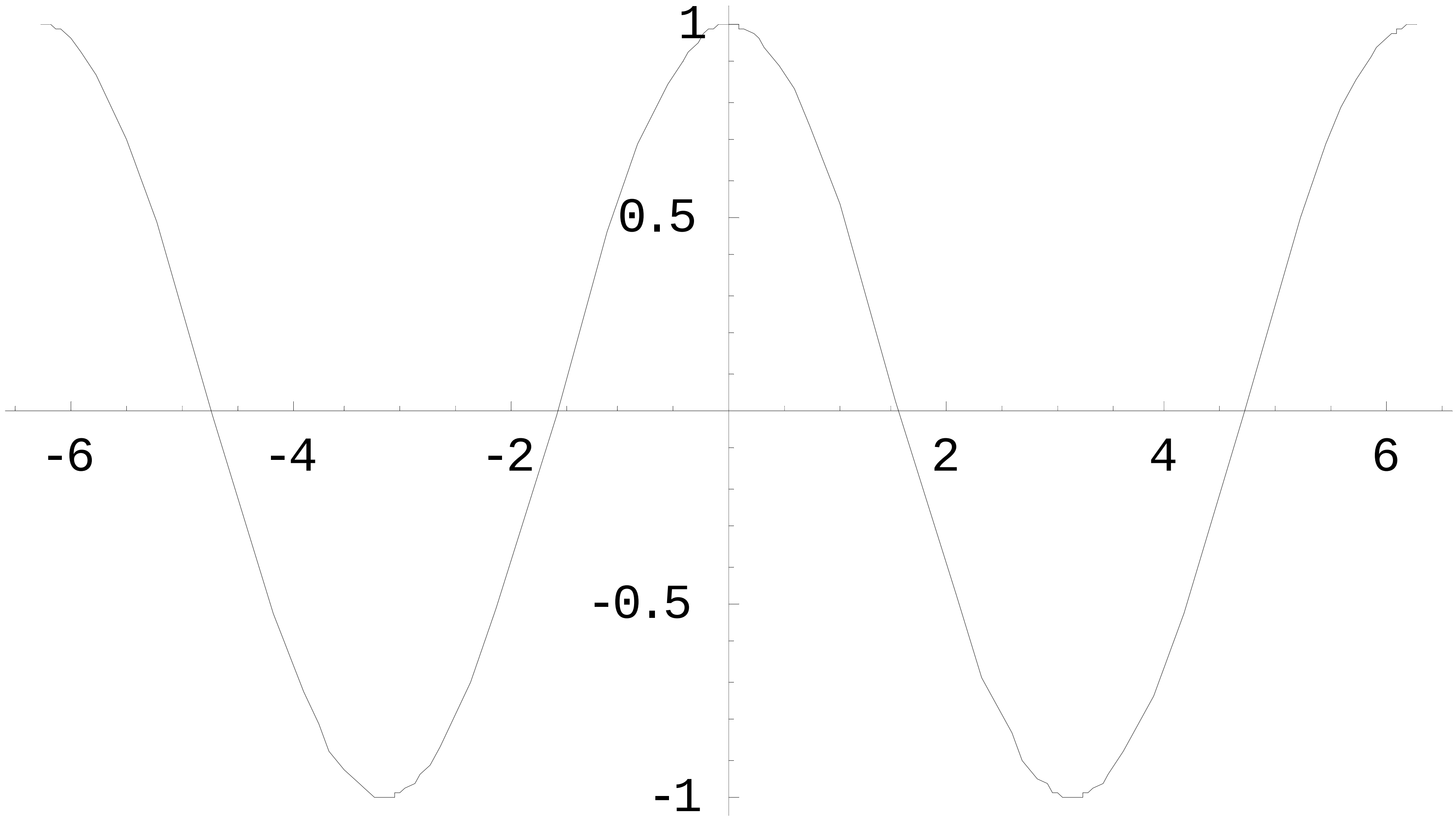


時間 t

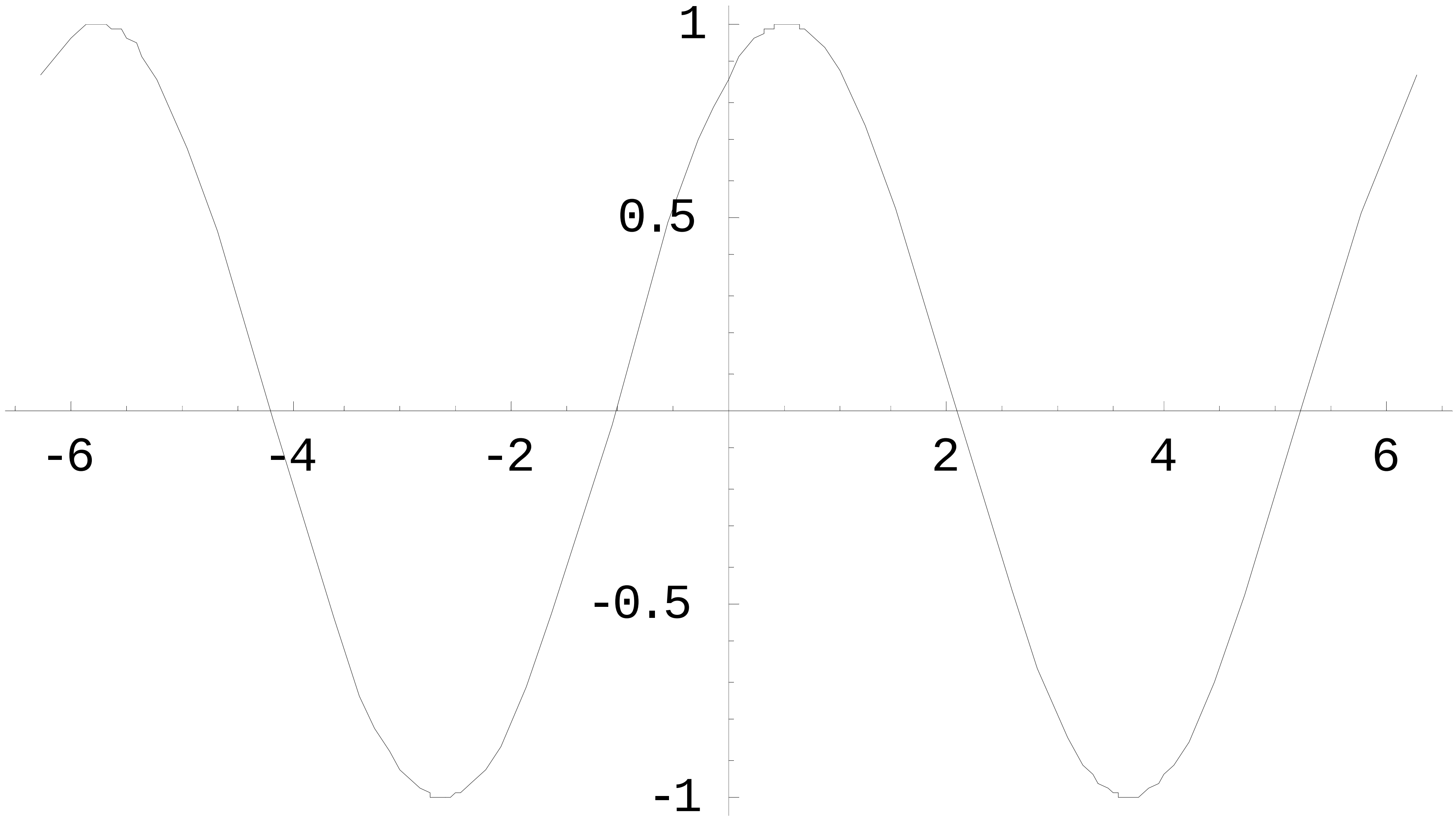
フーリエ変換の基本的性質

- 時間領域の幅が狭ければ（広くなれば）、周波数領域の幅は広くなる（狭くなる）。
- フーリエ変換とその逆変換は、それぞれペアになっていて、ある関数fのフーリエ変換がgのとき、gのフーリエ変換はfになる。
- 矩形波のフーリエ変換は、sinc関数である。

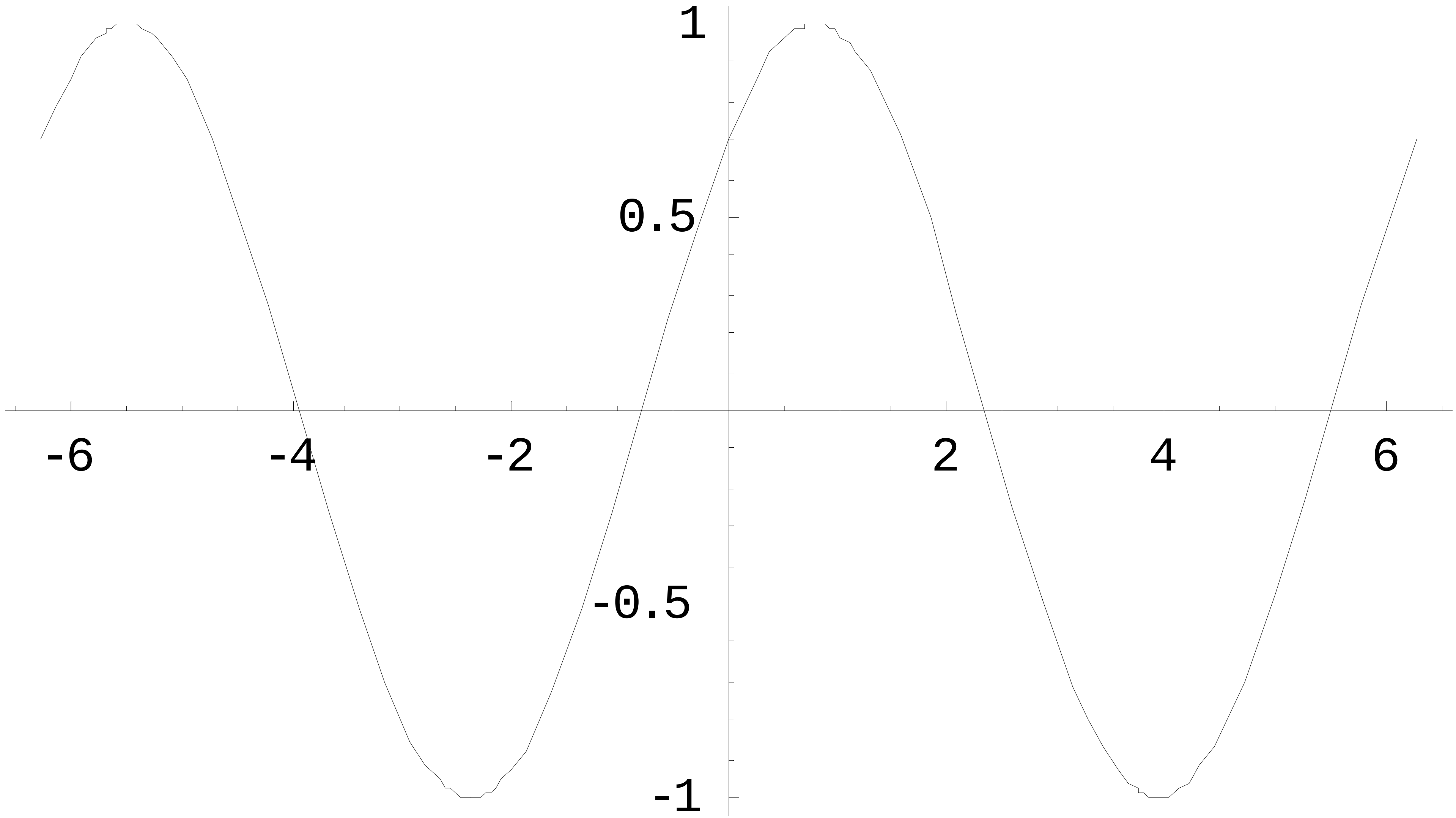
ある周波数の波



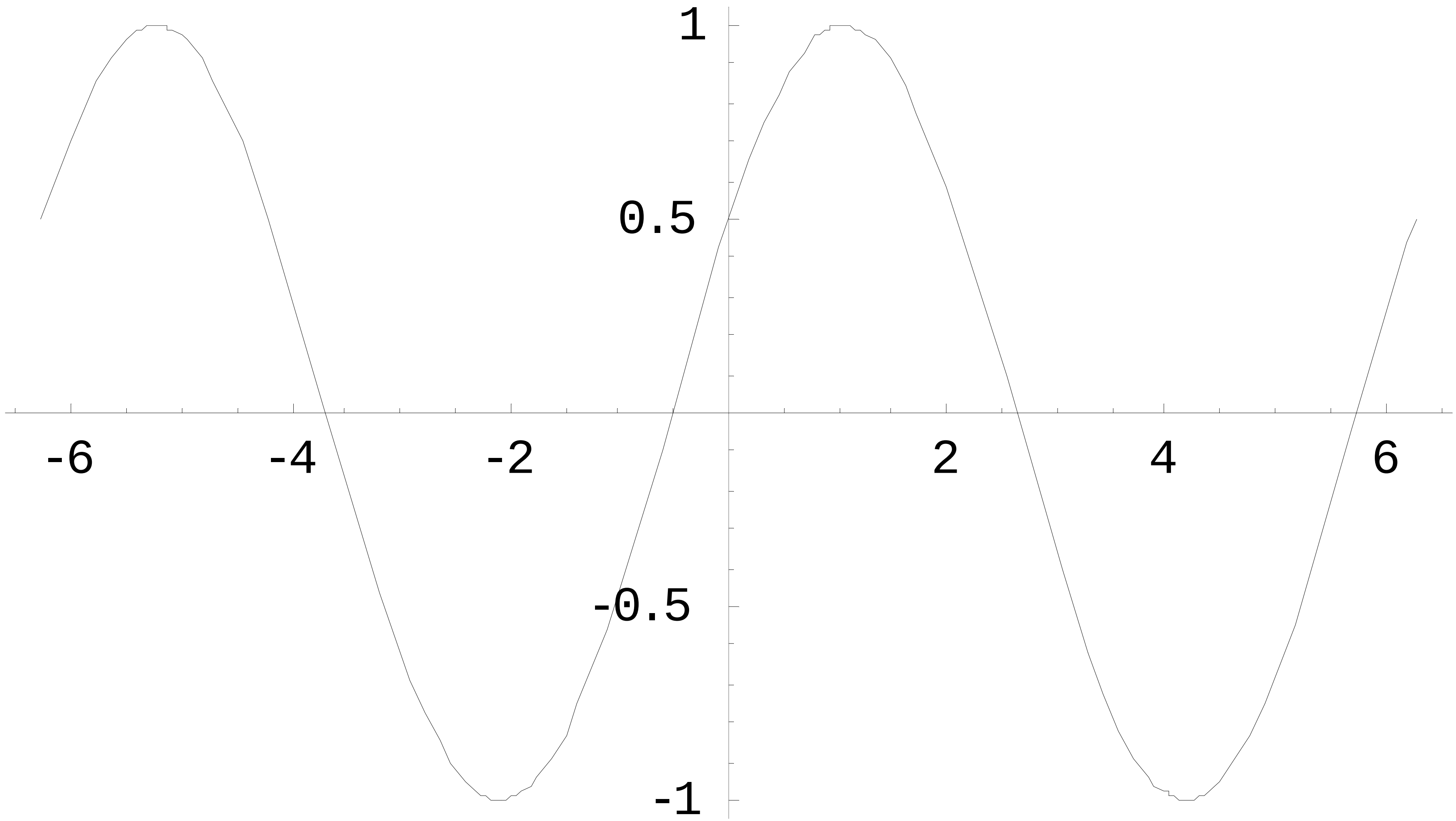
ある周波数の波



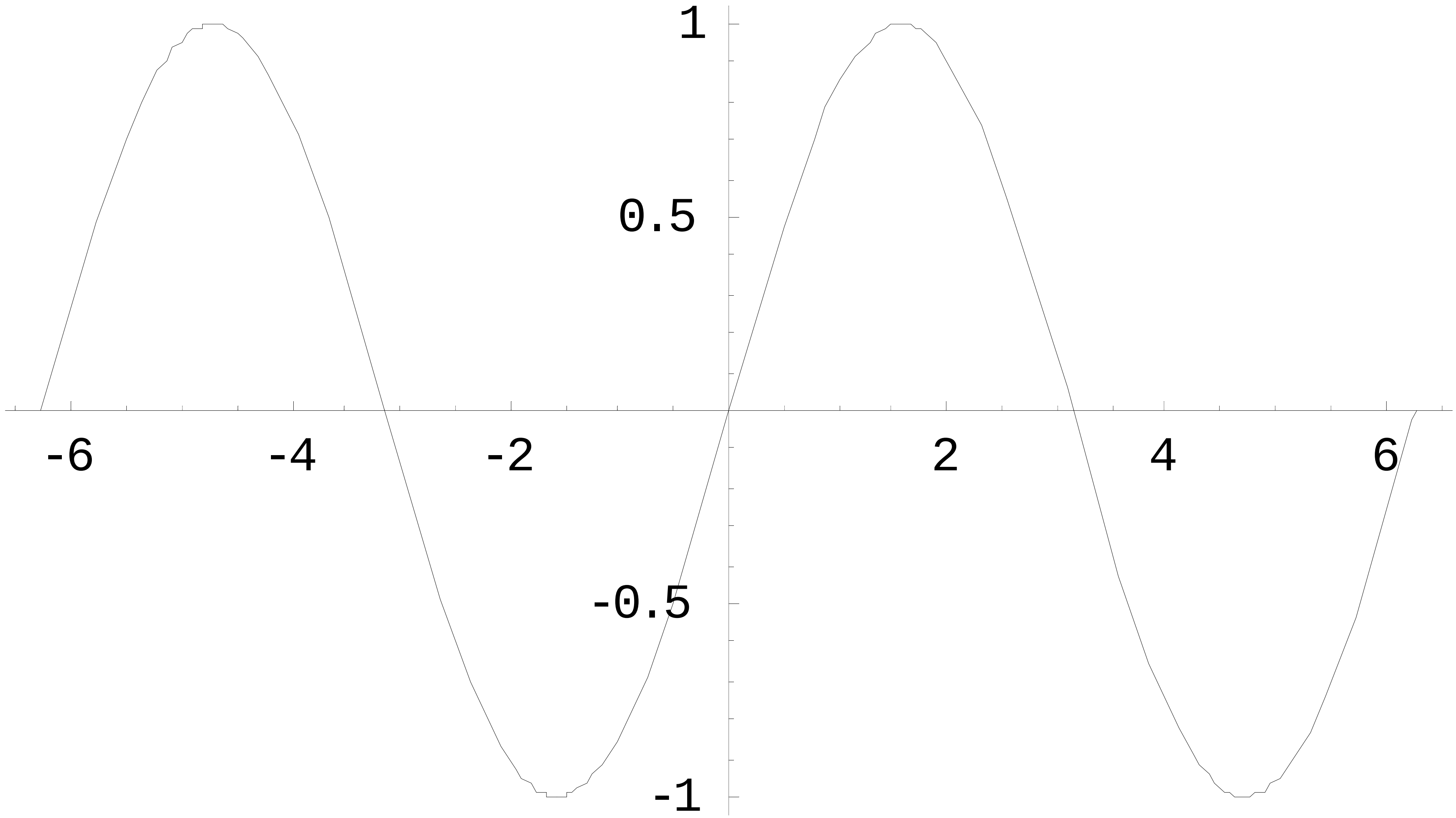
ある周波数の波



ある周波数の波

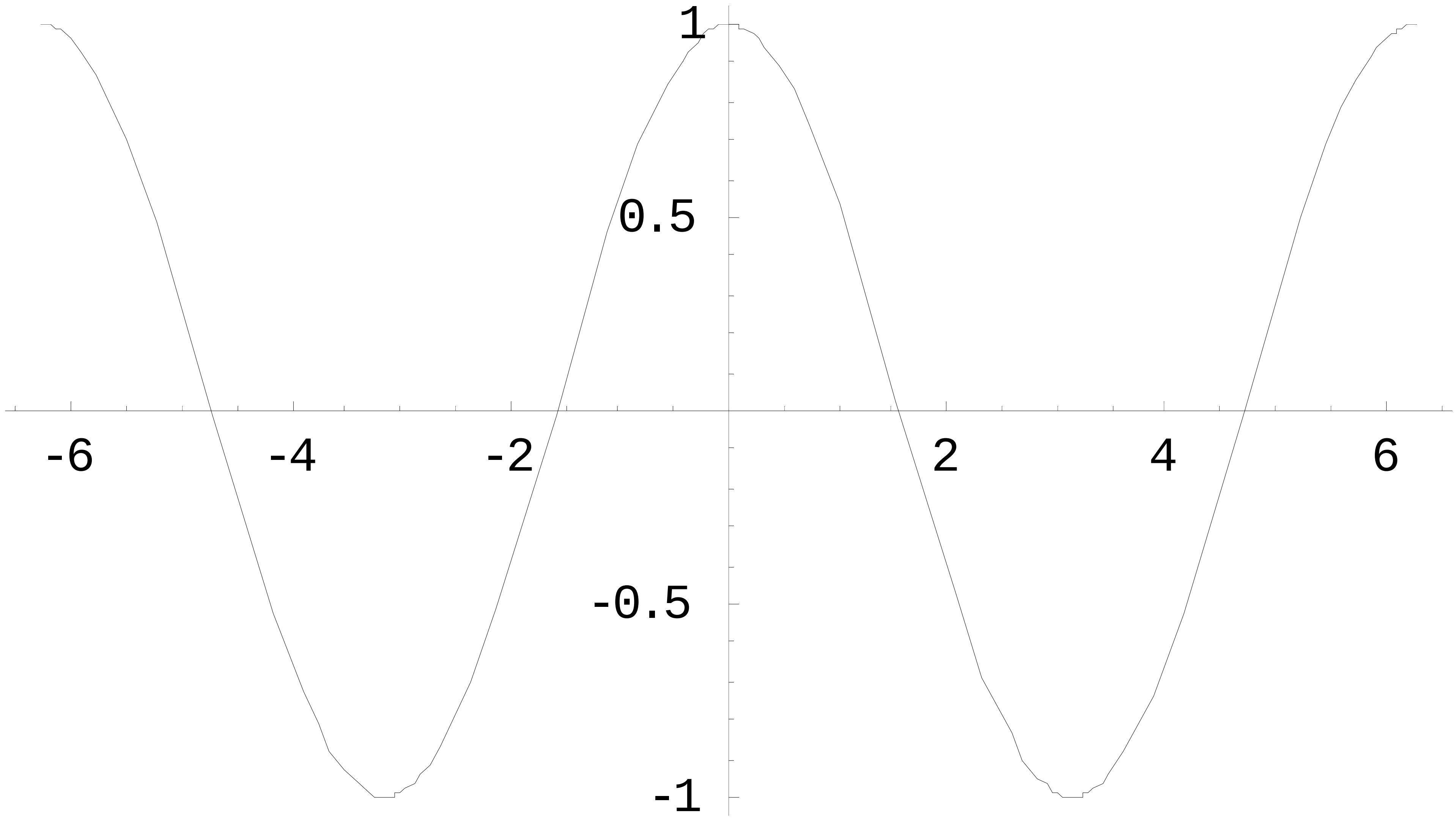


ある周波数の波



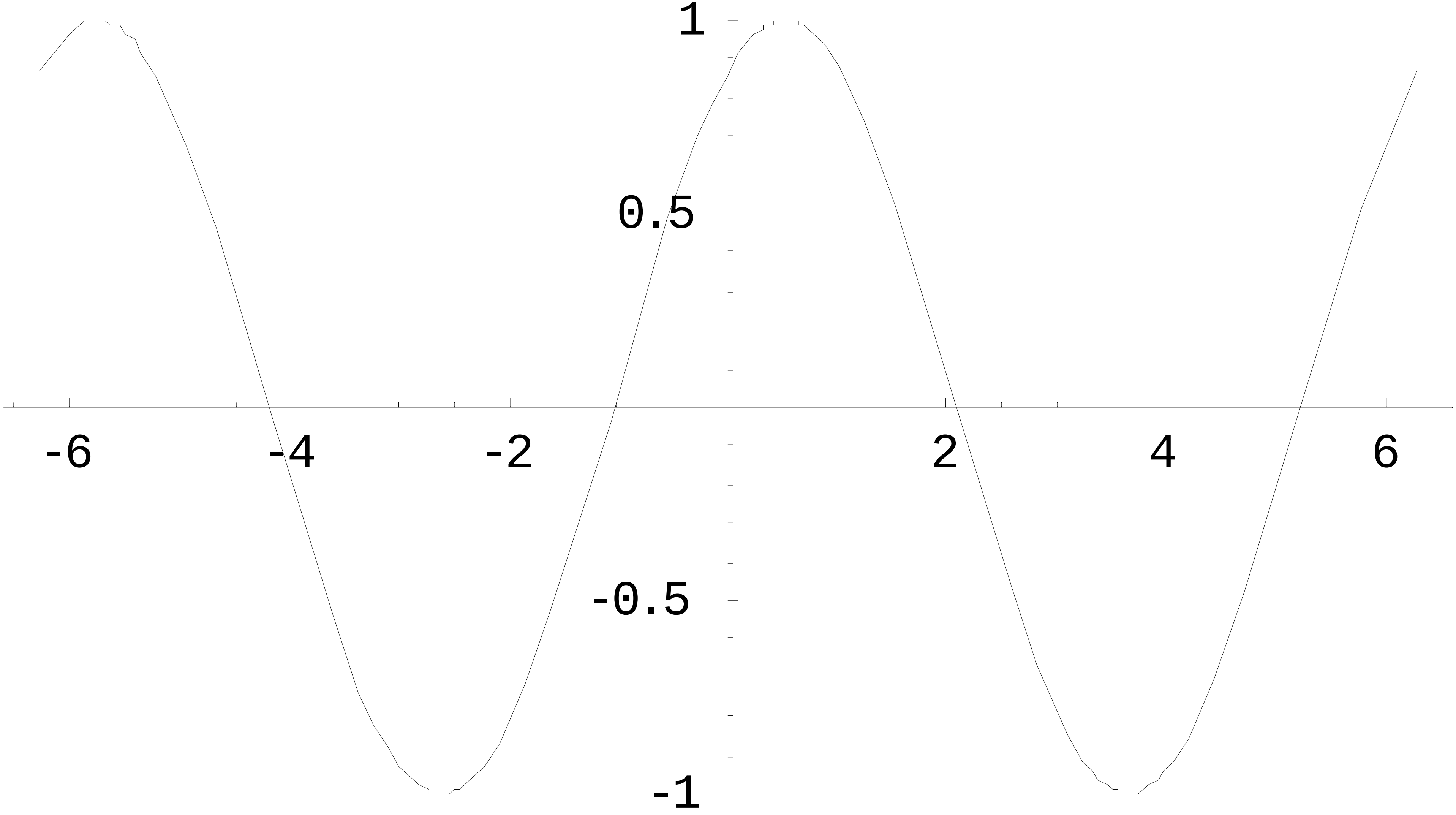
ある周波数の波

Plot[{Cos[x]}, {x, −2 Pi, 2 Pi}, PlotRange → All]



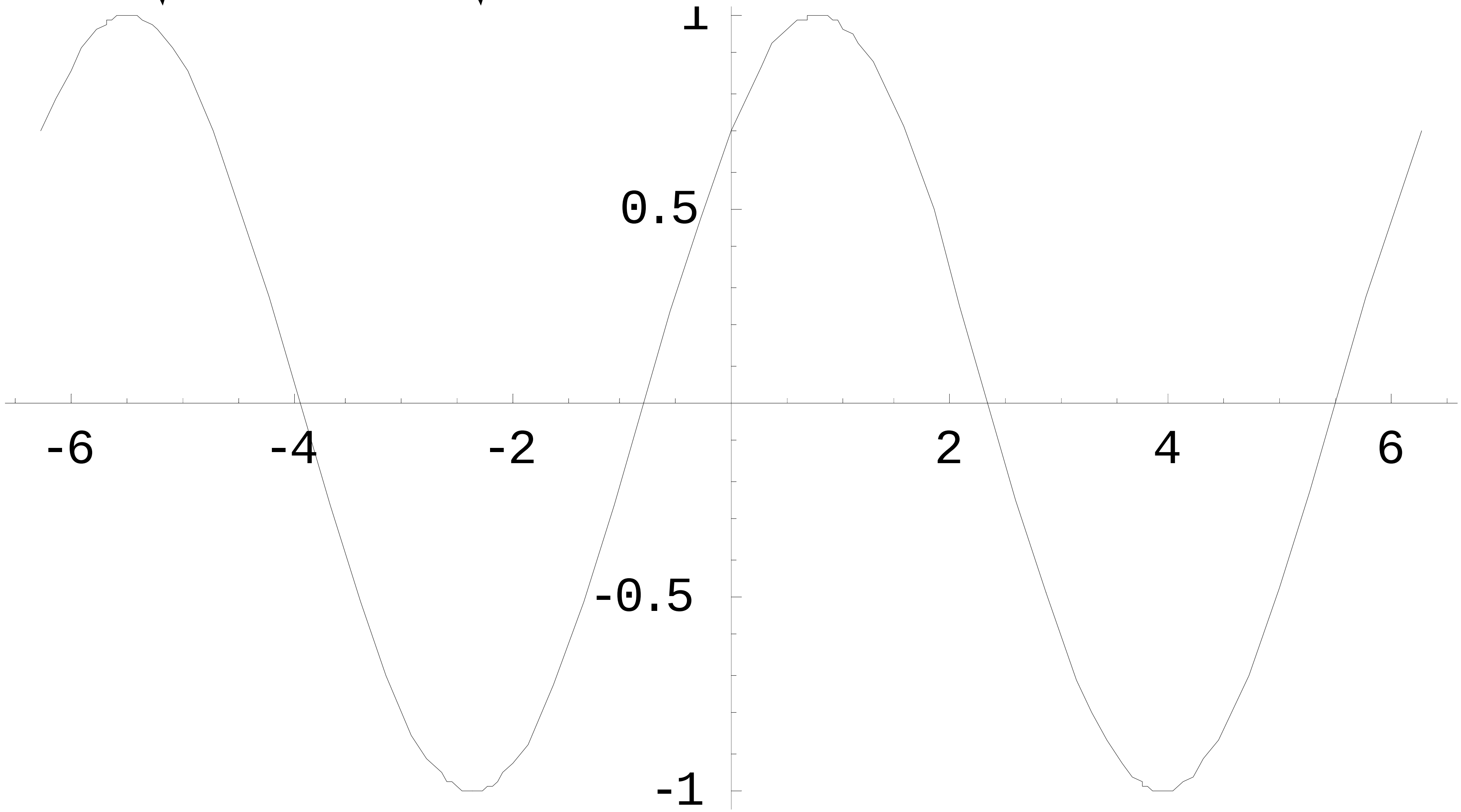
ある周波数の波

$$\text{Plot}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} * \text{Cos}[x] + \frac{1}{2} * \text{Sin}[x], \{x, -2\,\text{Pi}, 2\,\text{Pi}\}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$



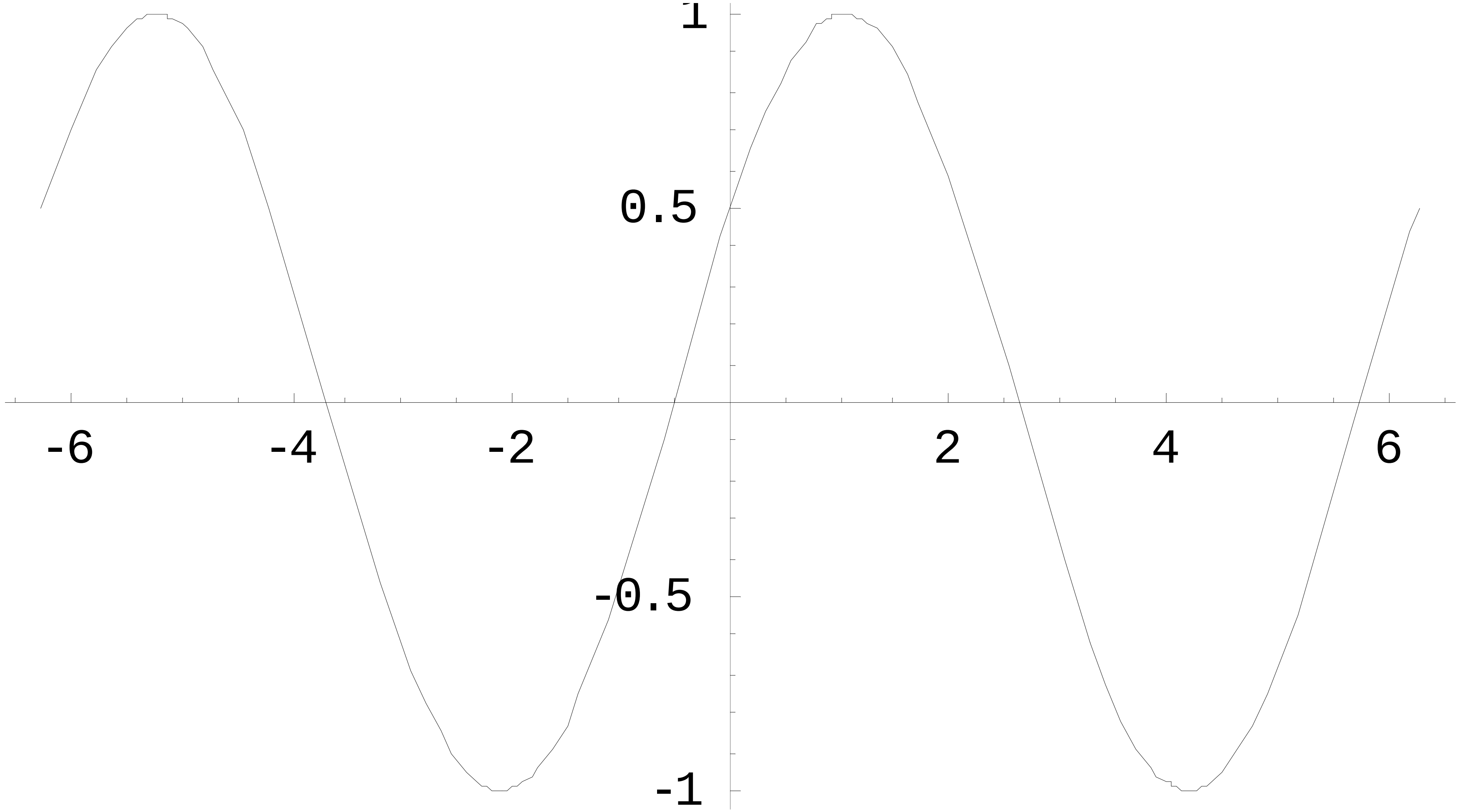
ある周波数の波

$$\mathrm{Plot}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}*\mathrm{Cos}[x]+\frac{1}{\sqrt{2}}*\mathrm{Sin}[x],\ \{x,-2\,\mathrm{Pi},2\,\mathrm{Pi}\},\ \mathrm{PlotRange}\to\mathrm{All}\right]$$



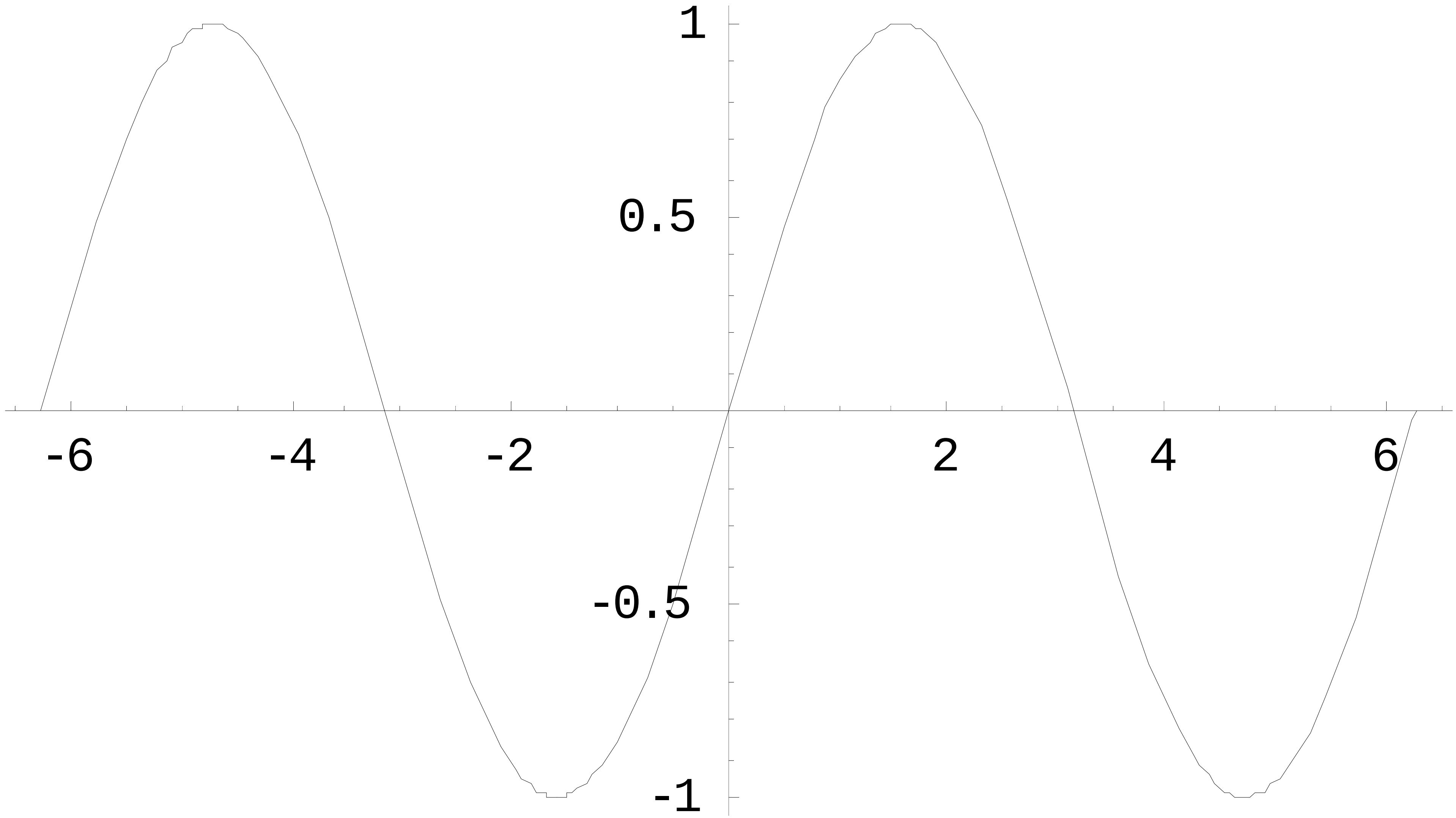
ある周波数の波

$$\text{Plot}\left[\frac{1}{2} * \text{Cos}[x] + \frac{\sqrt{3}}{2} * \text{Sin}[x], \{x, -2\text{Pi}, 2\text{Pi}\}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$



ある周波数の波

```
Plot[{Sin[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotRange → All]
```



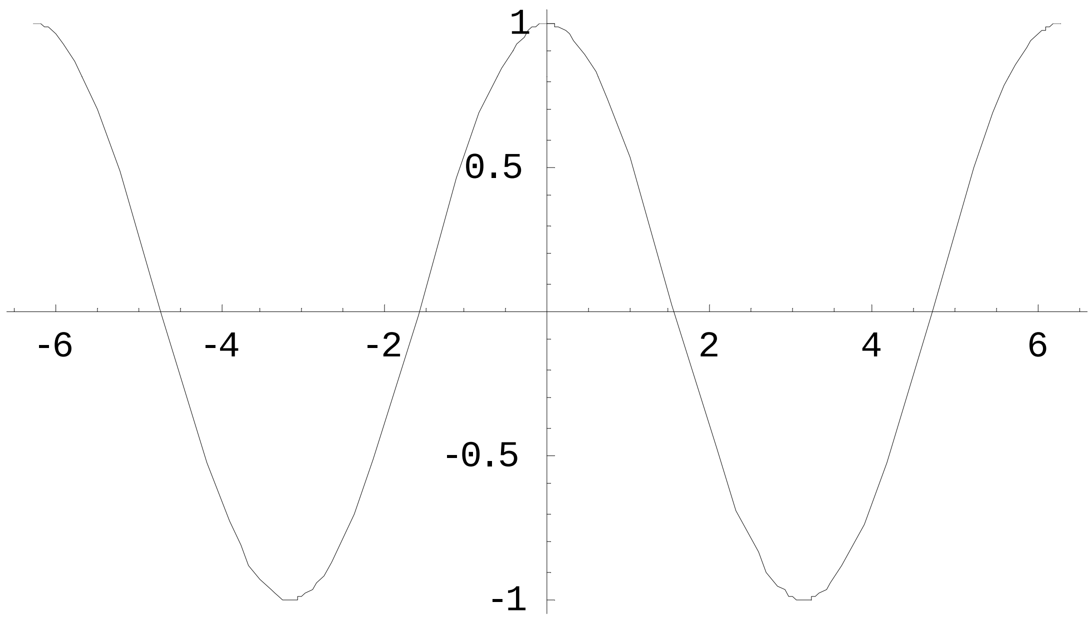
ある周波数の波

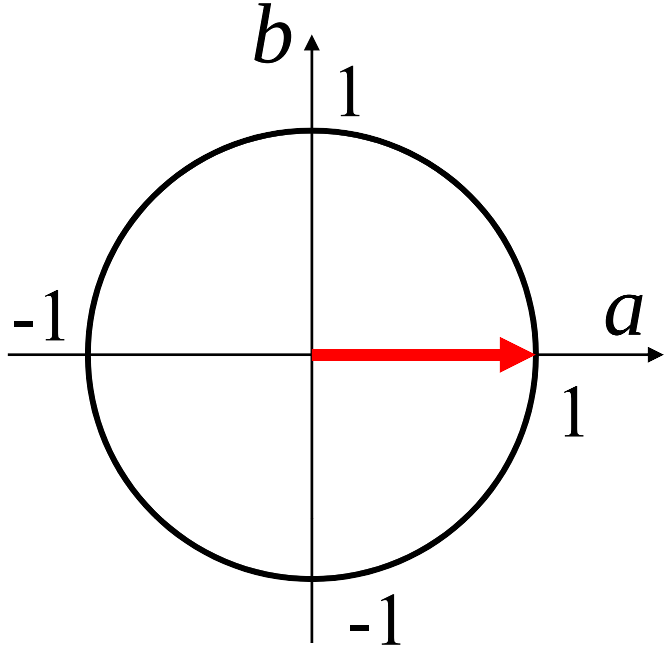
```
Plot[{Cos[x]}, {x, -2Pi, 2Pi}, PlotRange→All]
```

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$





$$(a,b) = (1,0)$$

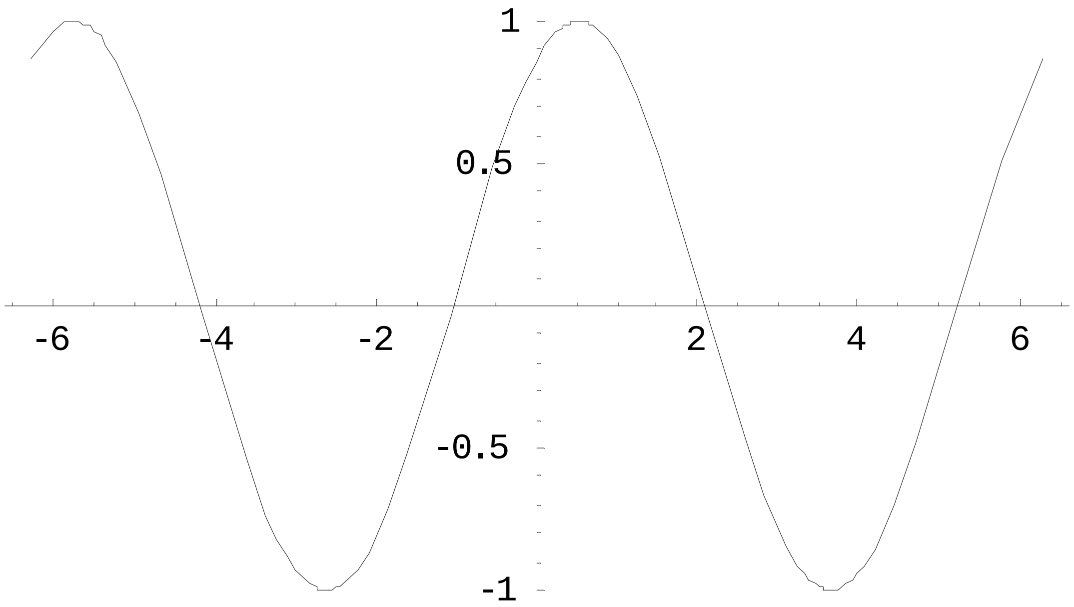
ある周波数の波

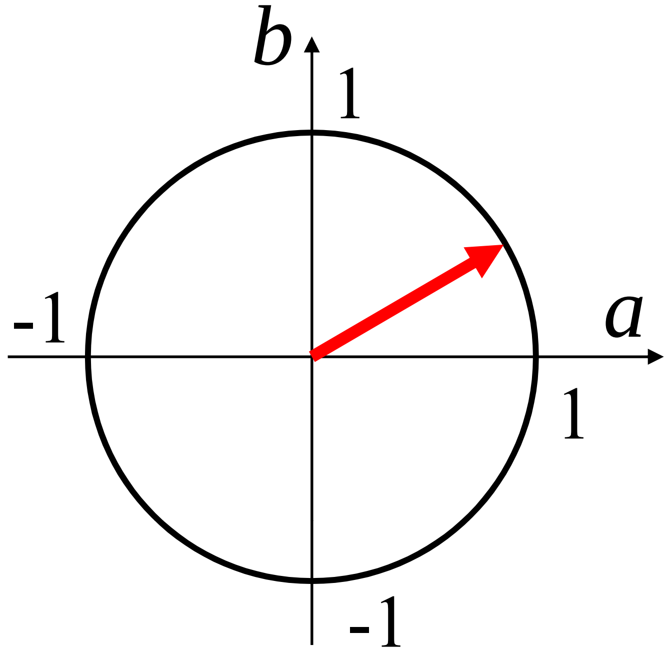
$$\mathtt{Plot}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}*\mathtt{Cos}[x]+\frac{1}{2}*\mathtt{Sin}[x],\ \{x,\ -2\,\mathtt{Pi},\ 2\,\mathtt{Pi}\},\ \mathtt{PlotRange}\to\mathtt{All}\right]$$

$$\cos(x+\theta)=a\cos(x)+b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

位相 $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$





$$(a,b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

位相はいくらか？

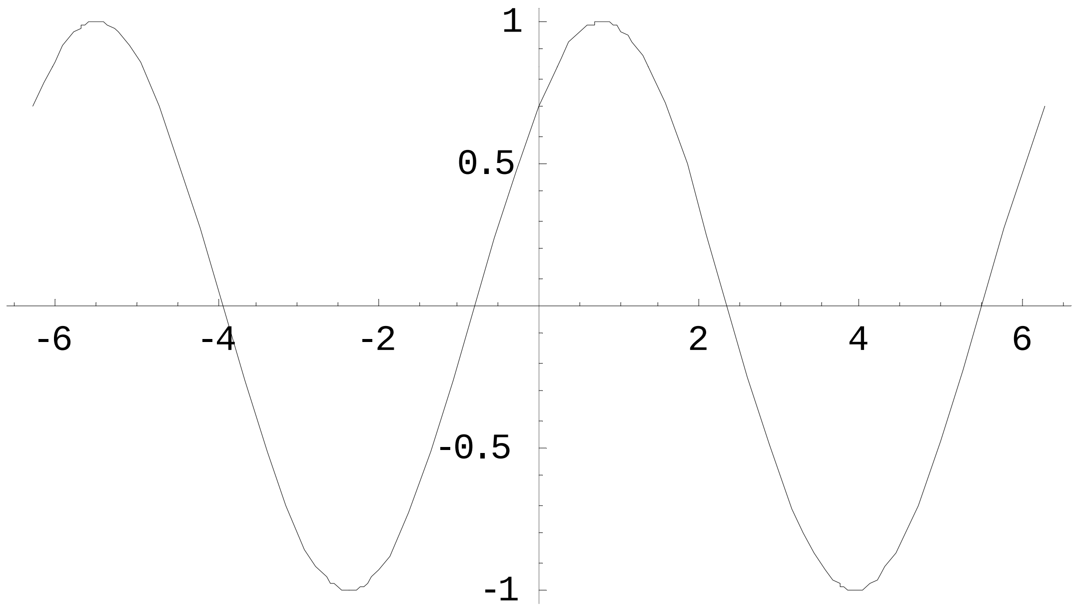
ある周波数の波

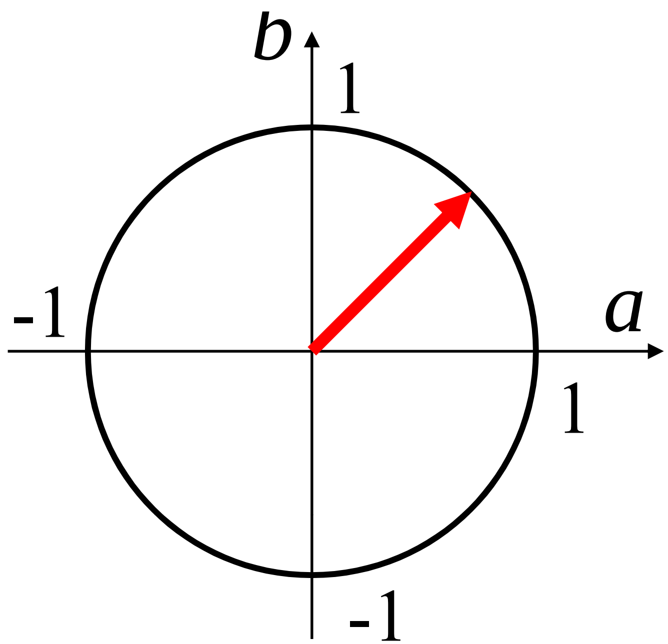
```
Plot[1/√2 * Cos[x] + 1/√2 * Sin[x], {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotRange → All]
```

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$





$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

位相はいくらか？

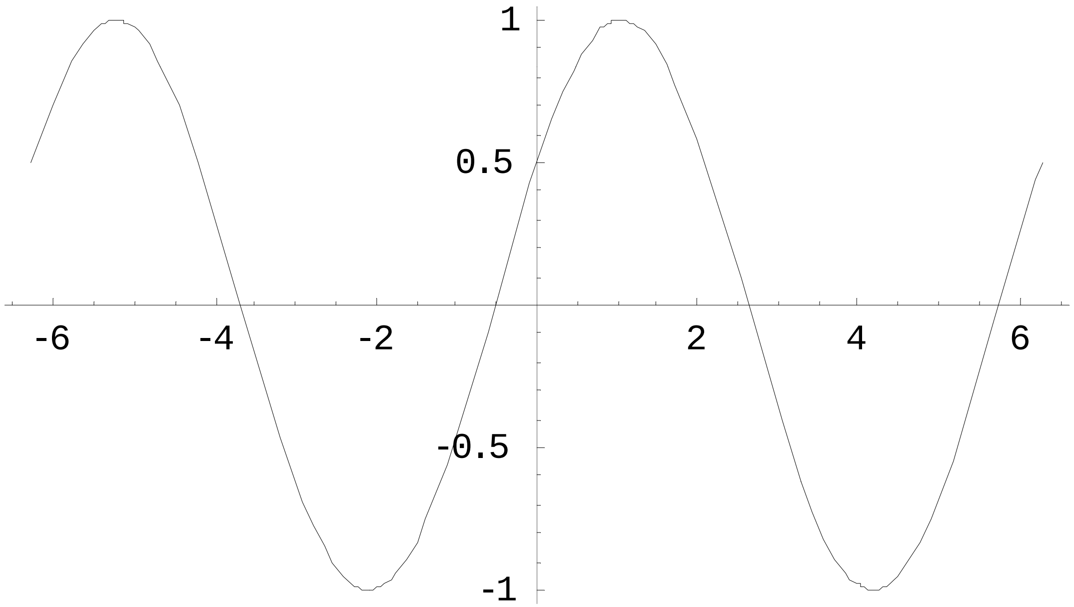
ある周波数の波

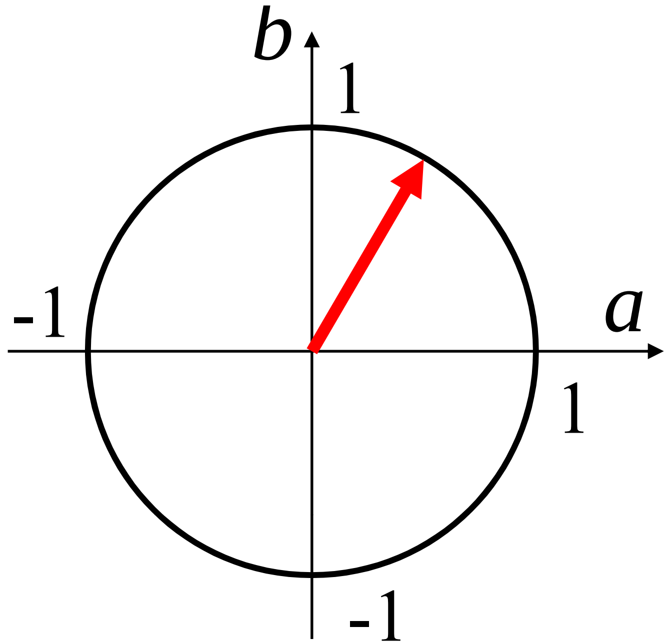
$$\mathtt{Plot}\left[\frac{1}{2}*\mathtt{Cos}[x]+\frac{\sqrt{3}}{2}*\mathtt{Sin}[x],\ \{x,-2\mathtt{Pi},2\mathtt{Pi}\},\ \mathtt{PlotRange}\to\mathtt{All}\right]$$

$$\cos(x+\theta)=a\cos(x)+b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

位相 $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$





$$(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

位相はいくらか？

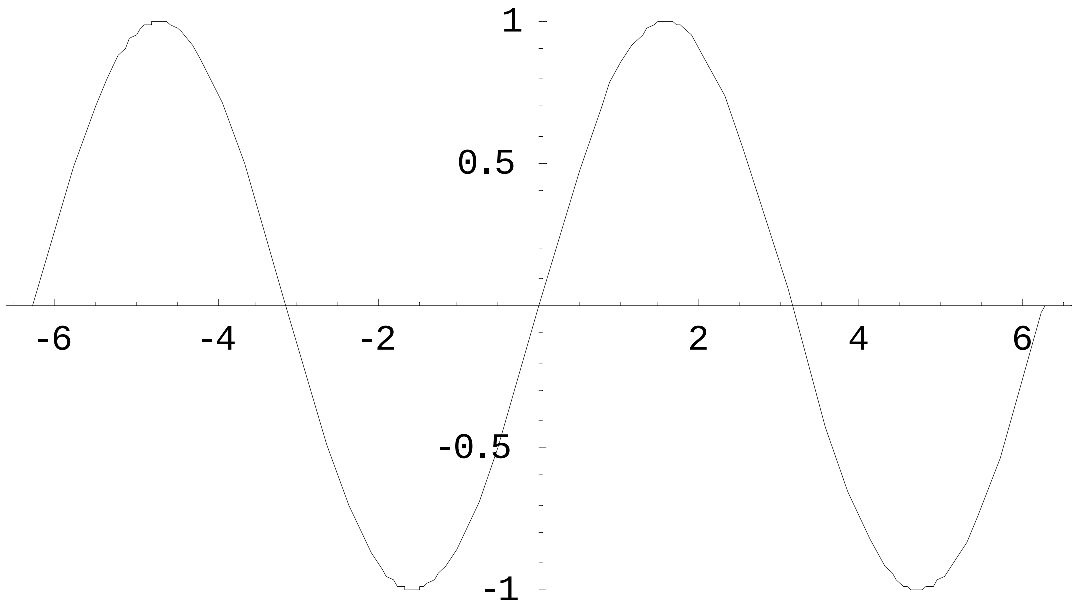
ある周波数の波

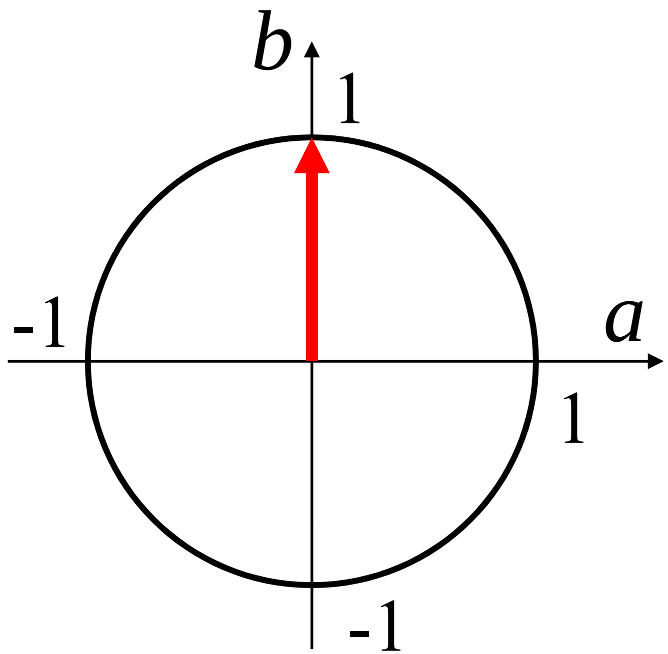
Plot[{Sin[x]}, {x, -2Pi, 2Pi}, PlotRange→All]

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$





$$(a,b) = (0,1)$$

位相はいくらか？

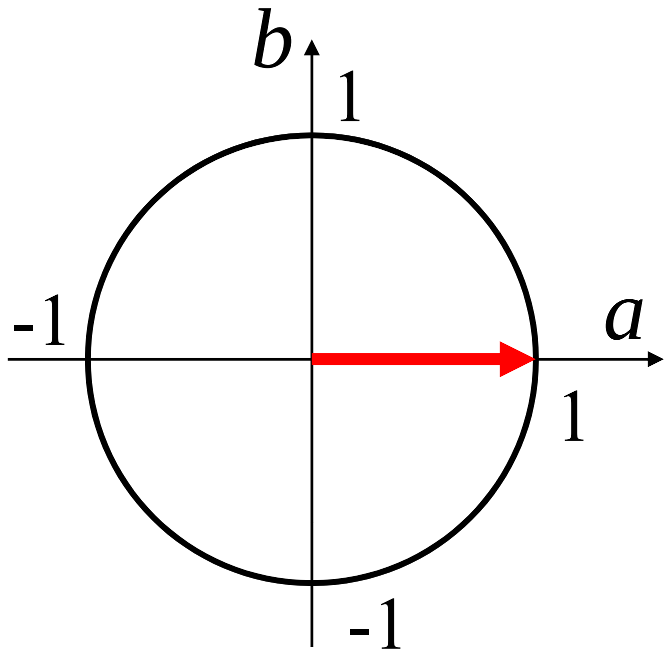
ある周波数の波

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -2Pi, 2Pi}, PlotRange→All]
```

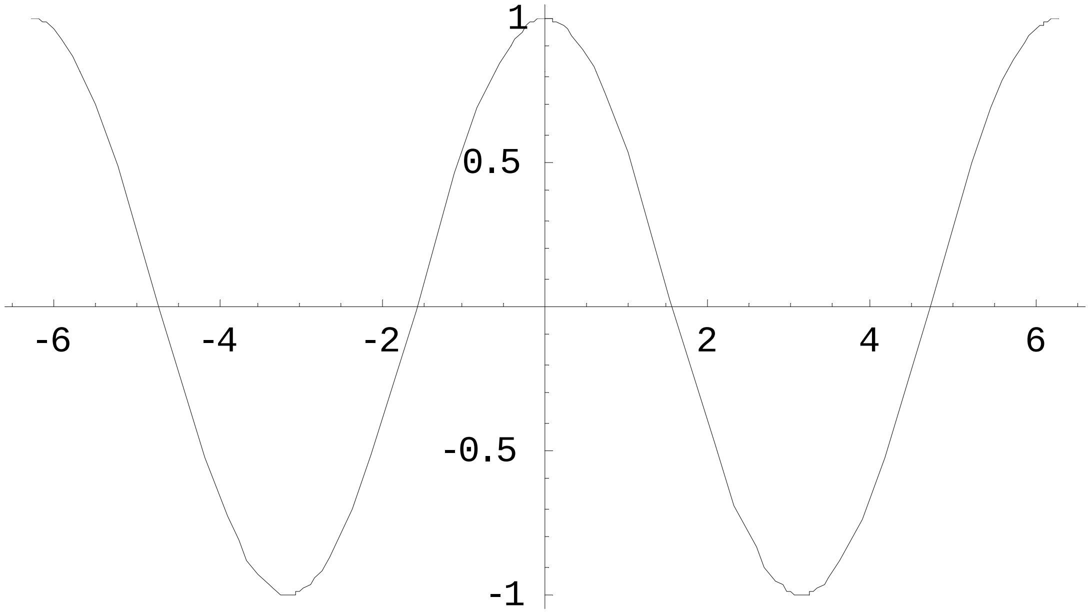
$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$



$$(a,b) = (1,0)$$



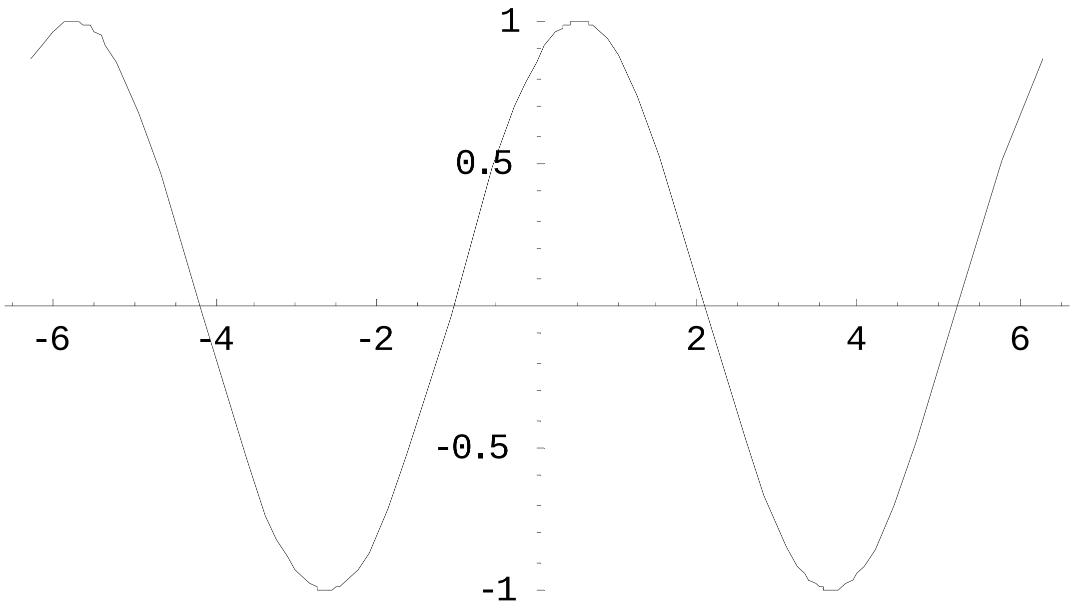
ある周波数の波

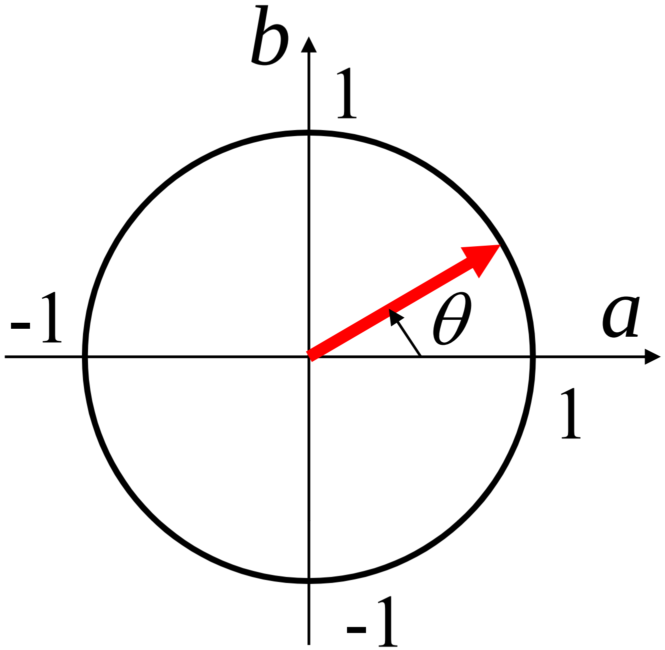
$$\text{Plot}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} * \text{Cos}[x] + \frac{1}{2} * \text{Sin}[x], \{x, -2\,\text{Pi}, 2\,\text{Pi}\}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$





$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

位相はいくらか？

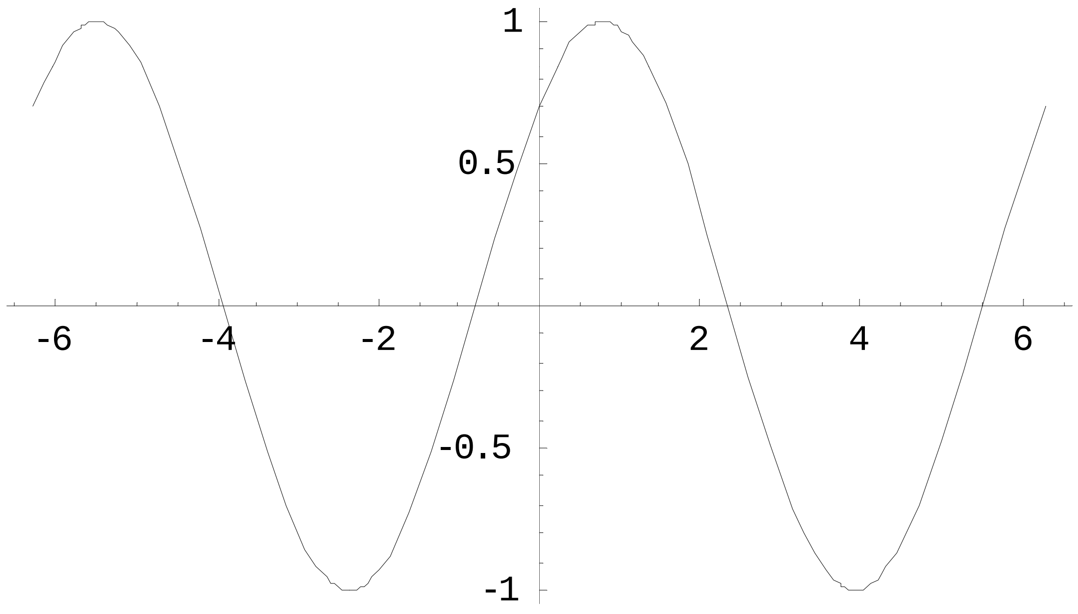
ある周波数の波

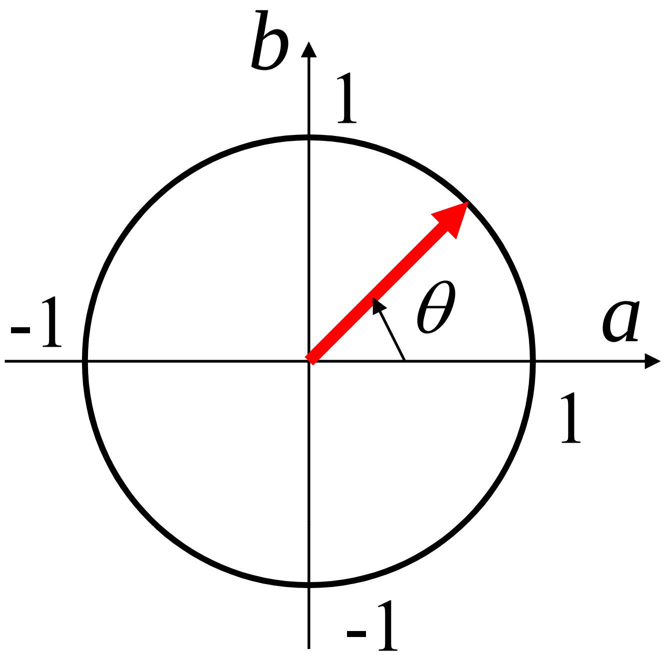
```
Plot[1/√2 *Cos[x] + 1/√2 *Sin[x], {x, -2Pi, 2Pi}, PlotRange→All]
```

$$\cos(x+\theta)=a\cos(x)+b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2}=1$

位相 $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$





$$(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

位相はいくらか？

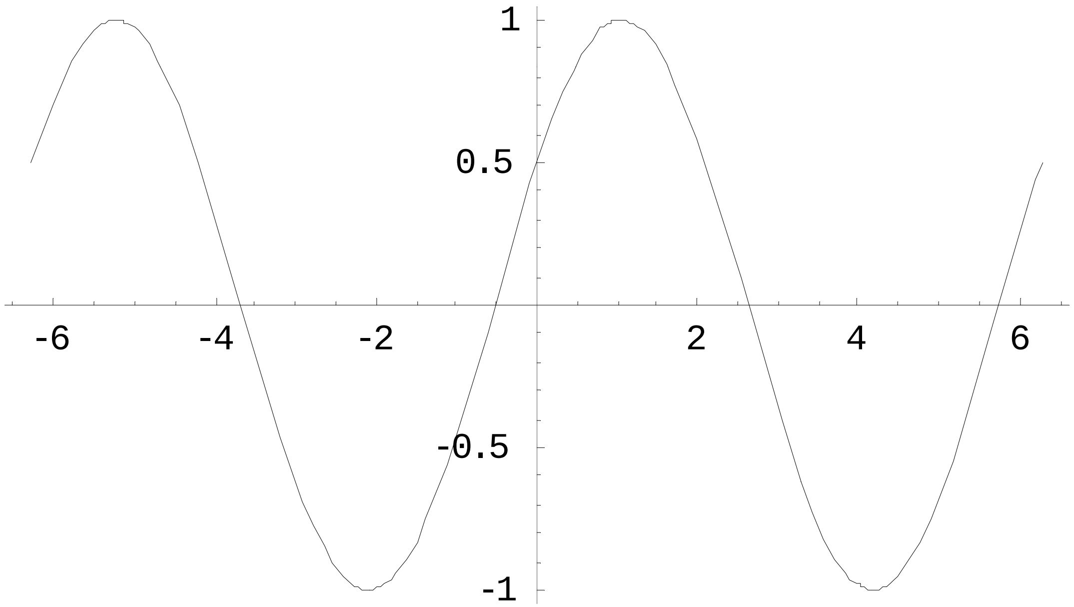
ある周波数の波

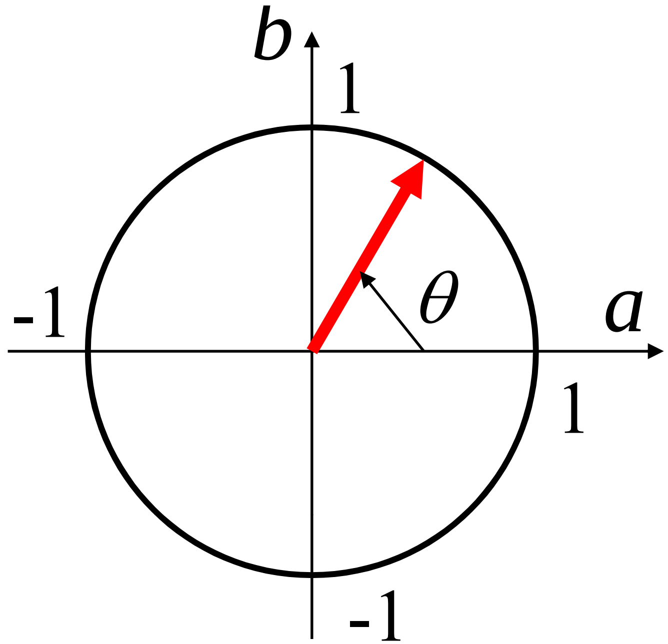
$$\texttt{Plot}\left[\frac{1}{2} * \texttt{Cos}[x] + \frac{\sqrt{3}}{2} * \texttt{Sin}[x], \{x, -2\texttt{Pi}, 2\texttt{Pi}\}, \texttt{PlotRange} \to \texttt{All}\right]$$

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$





$$(a,b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

位相はいくらか？

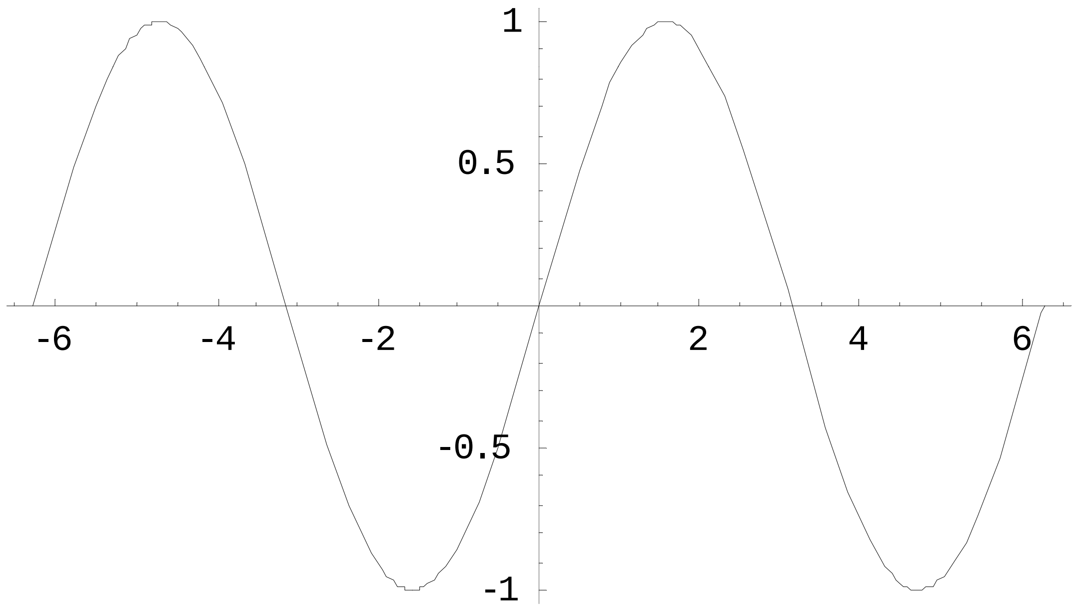
ある周波数の波

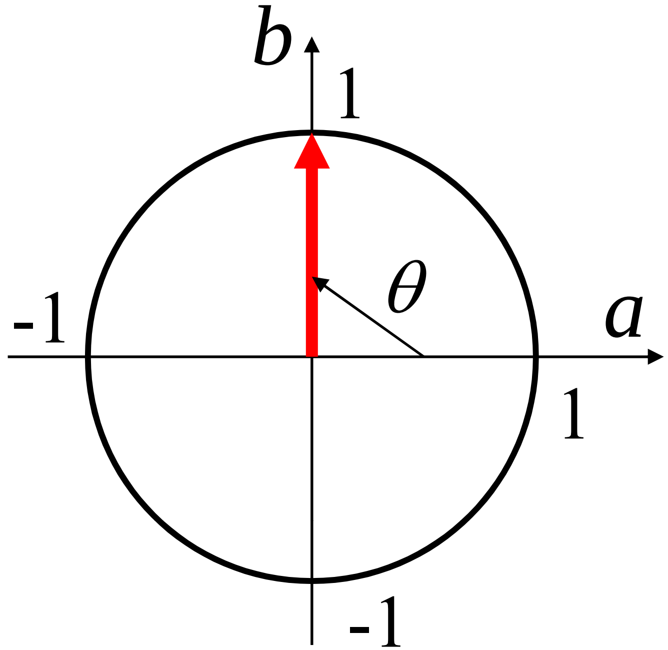
```
Plot[{Sin[x]}, {x, -2Pi, 2Pi}, PlotRange→All]
```

$$\cos(x+\theta) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

振幅 $\sqrt{a^2+b^2} = 1$

位相 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$





$$(a,b) = (0,1)$$

位相はいくらか？

ある１つの周波数の波：まとめ

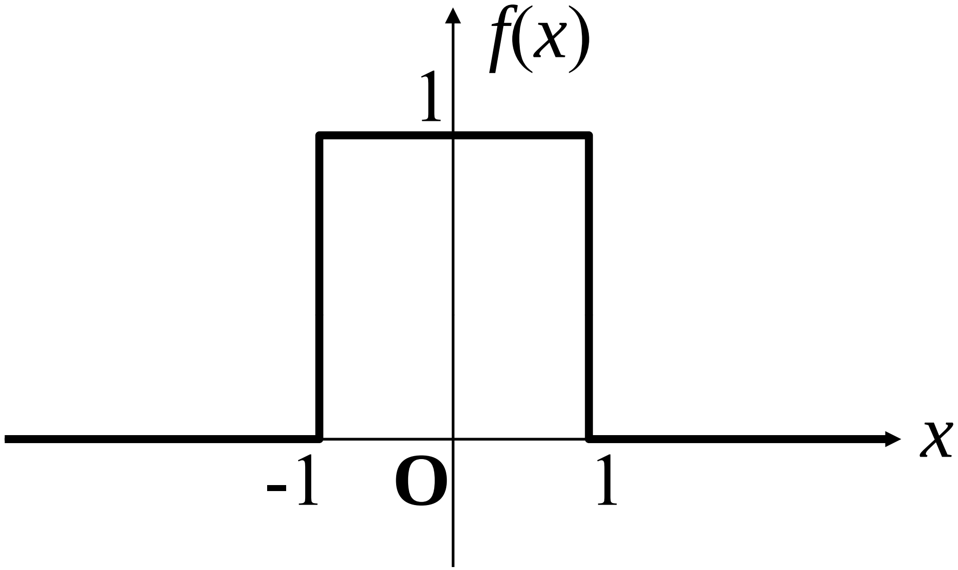
- 全く同じ形の波が、平行移動する場合、位相が進む（遅れる）という。
- 位相が異なる波は、cos と sin を組み合わせて表現できる。
- １つの周波数の波は、位相の違いを考慮して、cos成分とsin成分の２つの値で表現する。

演習問題1：Mathematicaを使った直交関数展開

- Mathematicaを用いて、以下の関数 $f(x)$ を三角関数系で直交関数展開をせよ。

$$f(x)=\begin{cases}1 & -1\le x\le 1\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$P_0(x)=\frac{1}{2}$$
$$P_{s1}(x)=\sin x$$
$$P_{c1}(x)=\cos x$$
$$P_{s2}(x)=\sin 2x$$
$$P_{c2}(x)=\cos 2x$$
$$P_{s3}(x)=\sin 3x$$
$$P_{c3}(x)=\cos 3x$$



$$f(x)\approx k_0P_0(x)+k_{s1}P_{s1}(x)+k_{c1}P_{c1}(x)+k_{s2}P_{s2}(x)+k_{c2}P_{c2}(x)+.....k_iP_i(x)+.....$$

$$k_i=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)P_i(x)dx=\int_{-1}^{1}P_i(x)dx$$

演習問題1：Mathematicaを使った直交関数展開

- k_i (i = 0, $s1$, $c1$, $s2$, $c2$, $s3$, $c3$, $s4$, $c4$, $s5$, $c5$) を計算せよ。

$$k_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P_i(x) dx = \int_{-1}^{1} P_i(x) dx$$

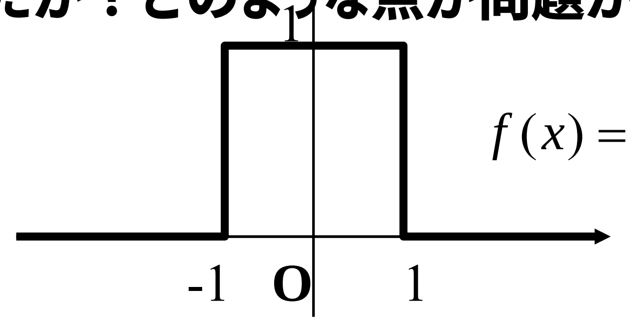
- 以下をグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_{s1} P_{s1}(x) + k_{c1} P_{c1}(x) + ... + k_{s5} P_{s5}(x) + k_{c5} P_{c5}(x)$$

- k_iにはどのような法則性があるか？　それは、なぜか？
- k_{cj} (j = 1, 2, 3 , 4, …….)を j を変数とする数式でかけ。
- Mathematica において、以下の式を表現し、nをいろいろな値に設定してグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{sj} P_{sj}(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{cj} P_{cj}(x)$$

- $f(x)$は、三角関数系による直交関数展開により、うまく表現されたか？どのような点が問題か？



$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1/2$$

$$P_{s1}(x) = \sin x$$

$$P_{c1}(x) = \cos x$$

$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$

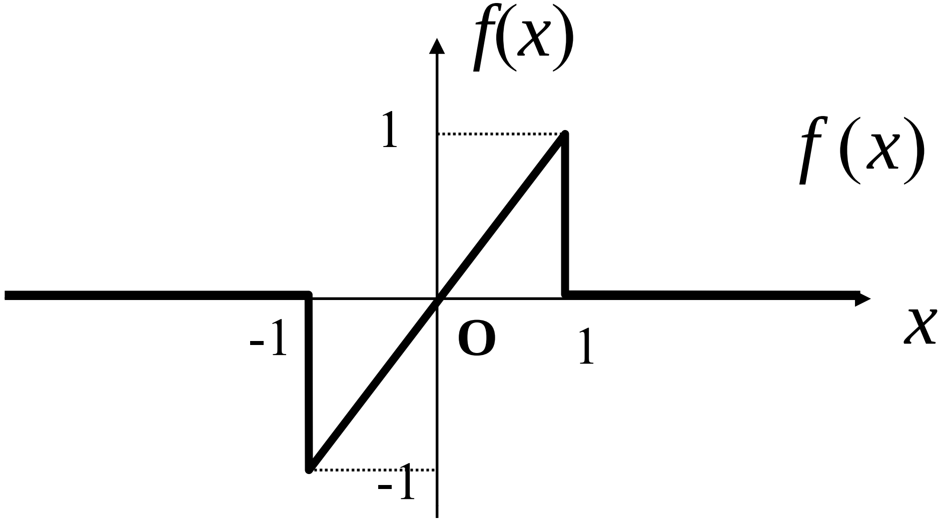
$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$

$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$

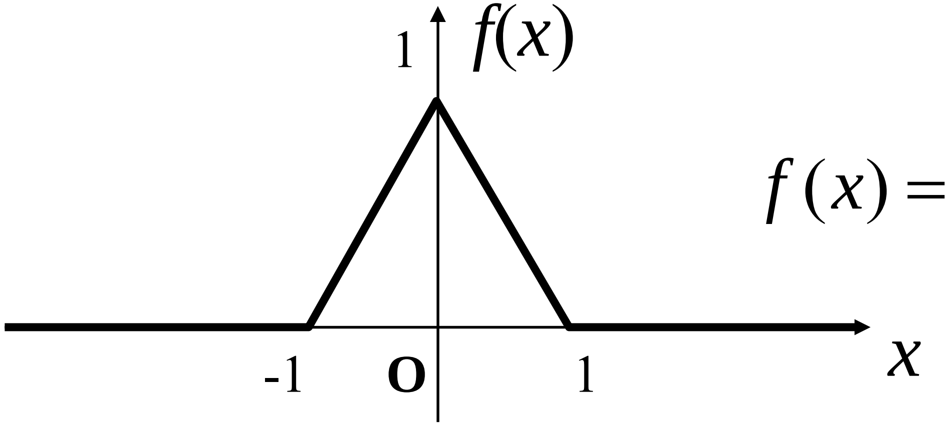
$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$

演習問題2，3：Mathematicaを使った直交関数展開

- さきほどと同様に、三角関数系を用いた直交関数展開を以下の関数 $f(x)$ について行え。



$$f(x)=\begin{cases} x & -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

演習問題2：Mathematicaを使った直交関数展開

- k_i （ i = 0, s1, c1, s2, c2, s3, c3 , s4, c4 , s5, c5) を計算せよ。

$$k_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P_i(x) dx = \int_{-1}^{1} P_i(x) dx$$

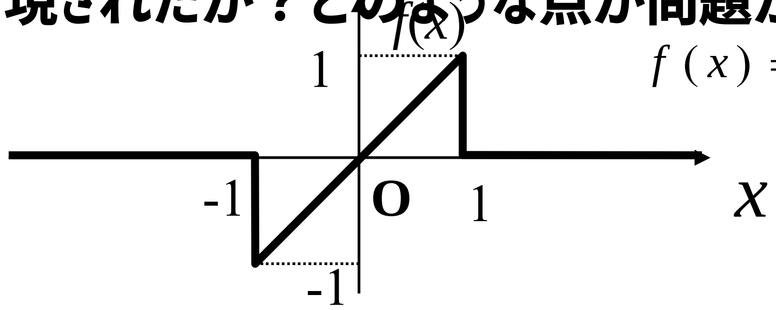
- 以下をグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_{s1} P_{s1}(x) + k_{c1} P_{c1}(x) + ... + k_{s5} P_{s5}(x) + k_{c5} P_{c5}(x)$$

- k_iにはどのような法則性があるか？　それは、なぜか？
- k_{cj} (j = 1, 2, 3 , 4, …….)を j を変数とする数式でかけ。
- Mathematica において、以下の式を表現し、nをいろいろな値に設定してグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{sj} P_{sj}(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{cj} P_{cj}(x)$$

- $f(x)$は、三角関数系による直交関数展開により、うまく表現されたか？どのような点が問題か？



$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1/2$$

$$P_{s1}(x) = \sin x$$

$$P_{c1}(x) = \cos x$$

$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$

$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$

$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$

$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$

演習問題3：Mathematicaを使った直交関数展開

- k_i (i = 0, s1, c1, s2, c2, s3, c3 , s4, c4 , s5, c5) を計算せよ。

$$k_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_i(x)dx = \int_{-1}^{1} P_i(x)dx$$

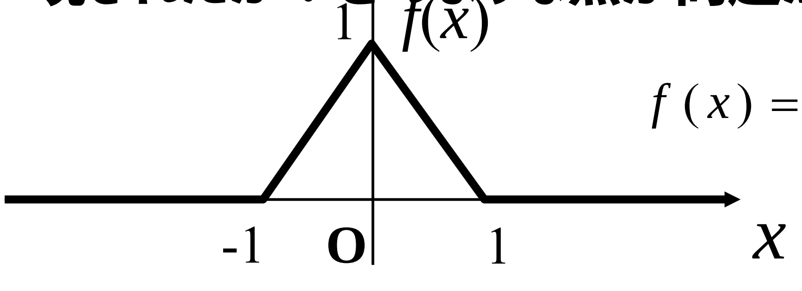
- 以下をグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_{s1}P_{s1}(x) + k_{c1}P_{c1}(x) + ... + k_{s5}P_{s5}(x) + k_{c5}P_{c5}(x)$$

- k_iにはどのような法則性があるか？　それは、なぜか？
- k_{cj} (j = 1, 2, 3 , 4, …….)を j を変数とする数式でかけ。
- Mathematica において、以下の式を表現し、nをいろいろな値に設定してグラフとしてプロットせよ。

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{sj}P_{sj}(x) + \sum_{j=1}^{n} k_{cj}P_{cj}(x)$$

- $f(x)$は、三角関数系による直交関数展開により、うまく表現されたか？どのような点が問題か？



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$P_0(x) = 1/2$$

$$P_{s1}(x) = \sin x$$

$$P_{c1}(x) = \cos x$$

$$P_{s2}(x) = \sin 2x$$

$$P_{c2}(x) = \cos 2x$$

$$P_{s3}(x) = \sin 3x$$

$$P_{c3}(x) = \cos 3x$$