

# デジタル情報処理

## たたみ込み積分

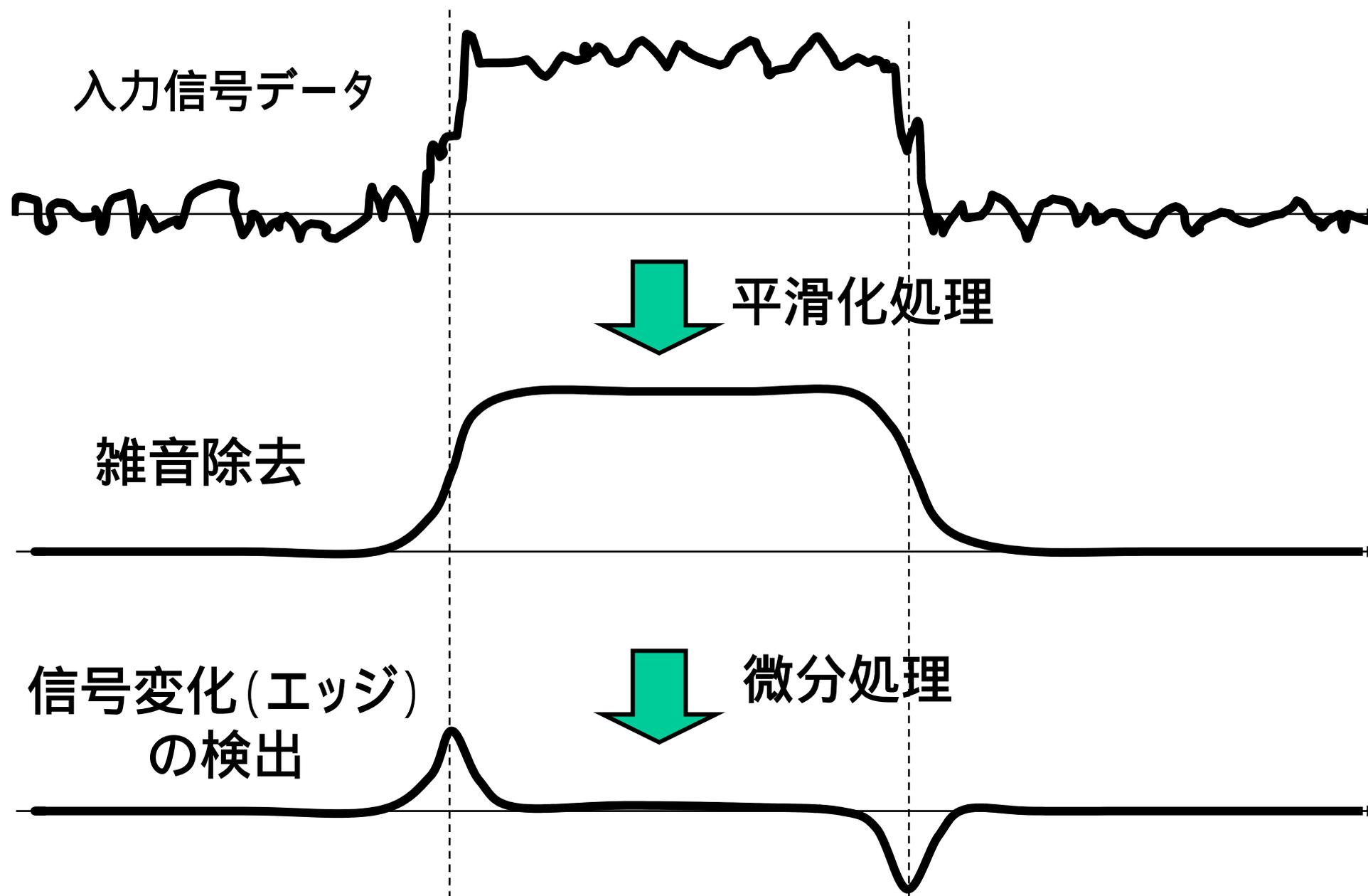
## Convolution

佐藤 嘉伸

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

<http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/>

# 典型的なデジタル信号処理



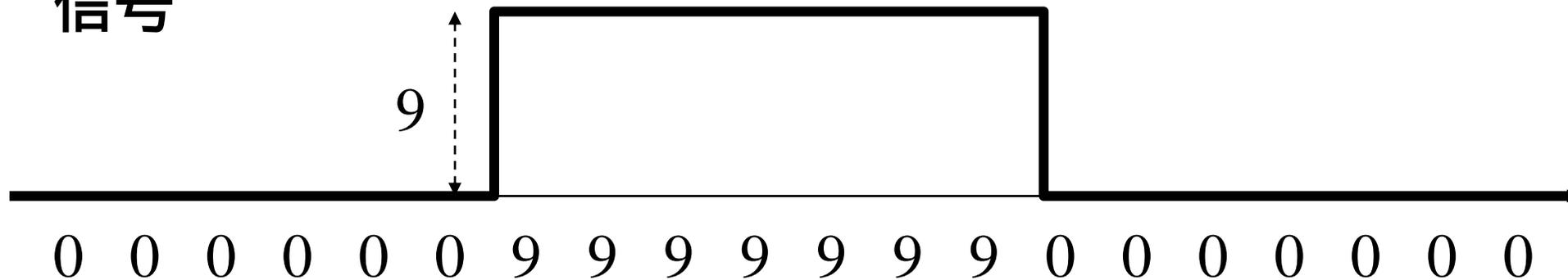
# たたみこみ積分(Convolution)

## 重要事項 その1

- たたみ込み積分により、平滑化や微分など、デジタル信号処理の基本演算を実現できる。

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



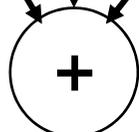
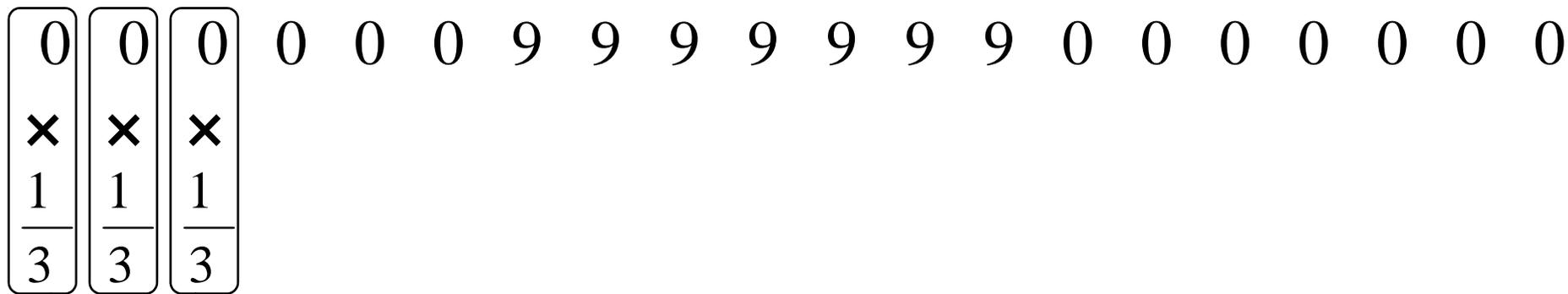
## 平滑化处理

たたみ込み核  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

重みパラメータ

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



$$(0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) = 0$$

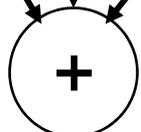
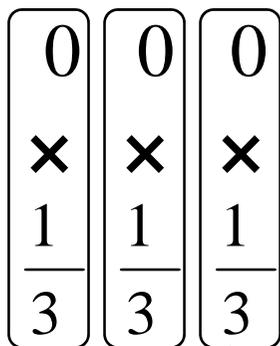
0

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 0 9 9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0



$$(0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) = 0$$

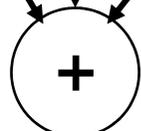
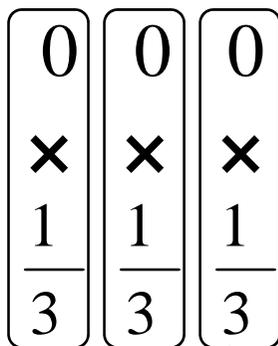
0 0

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 9 9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0



$$(0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) = 0$$

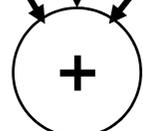
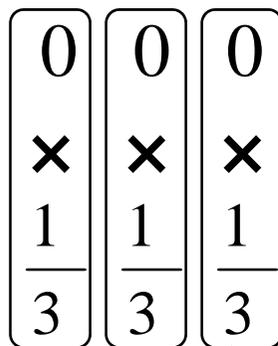
0 0 0

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 9 9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0

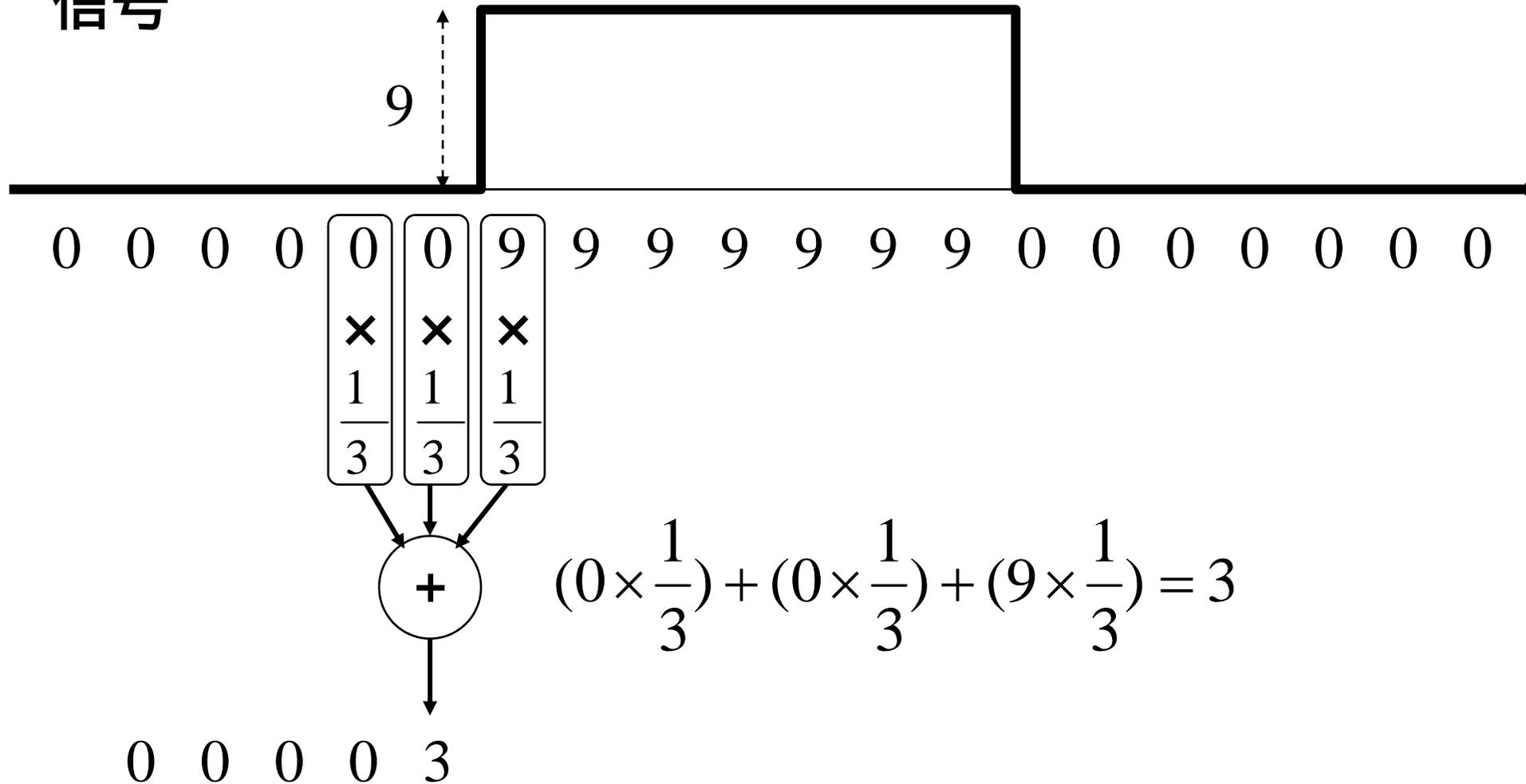


$$(0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) + (0 \times \frac{1}{3}) = 0$$

0 0 0 0

# たたみこみ積分(Convolution)

信号

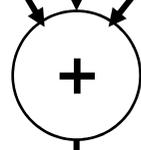
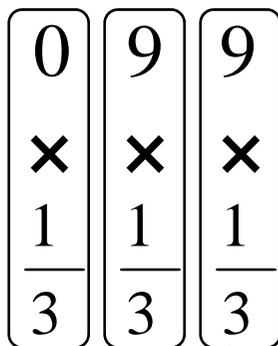


# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0

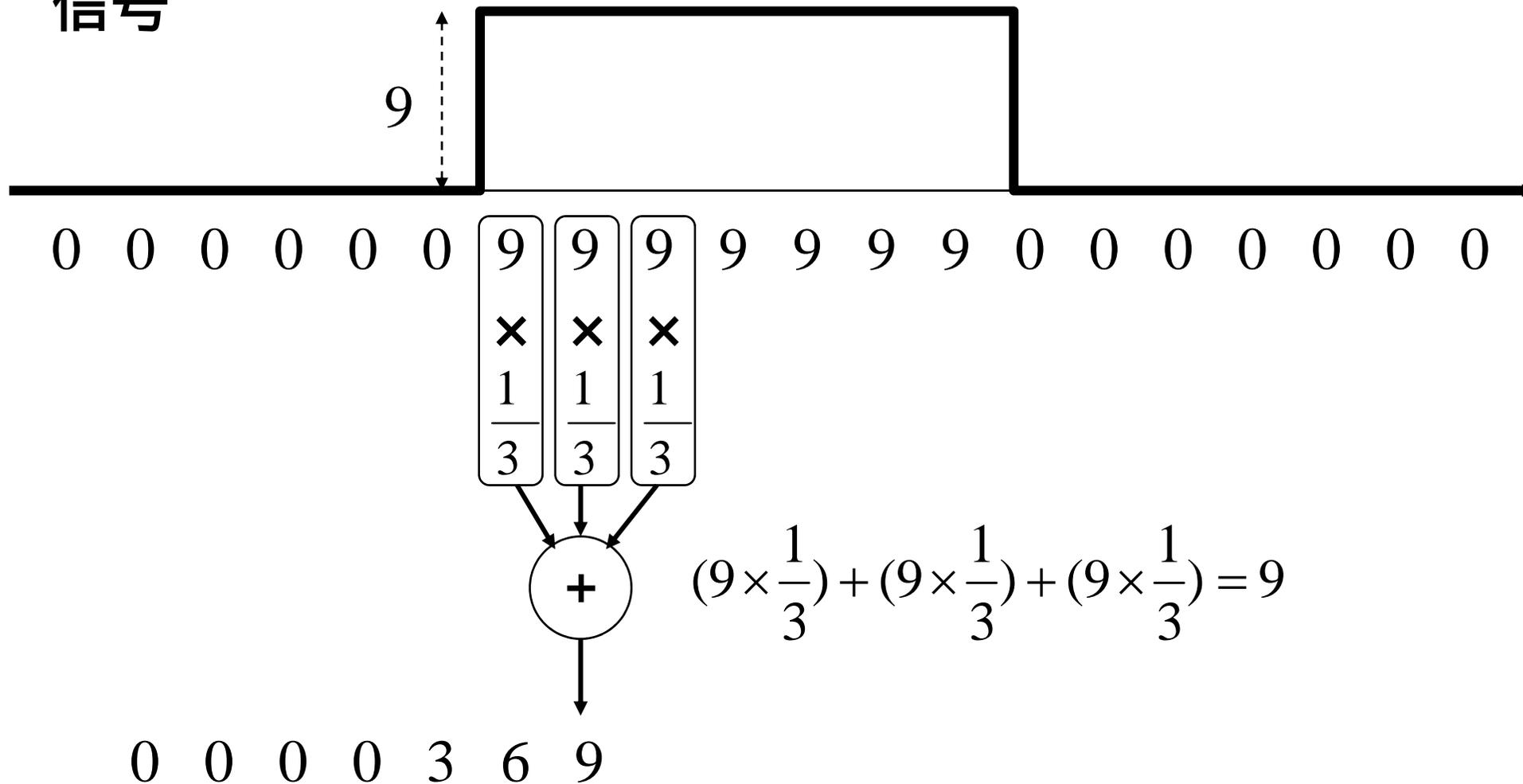


$$(0 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) = 6$$

0 0 0 0 3 6

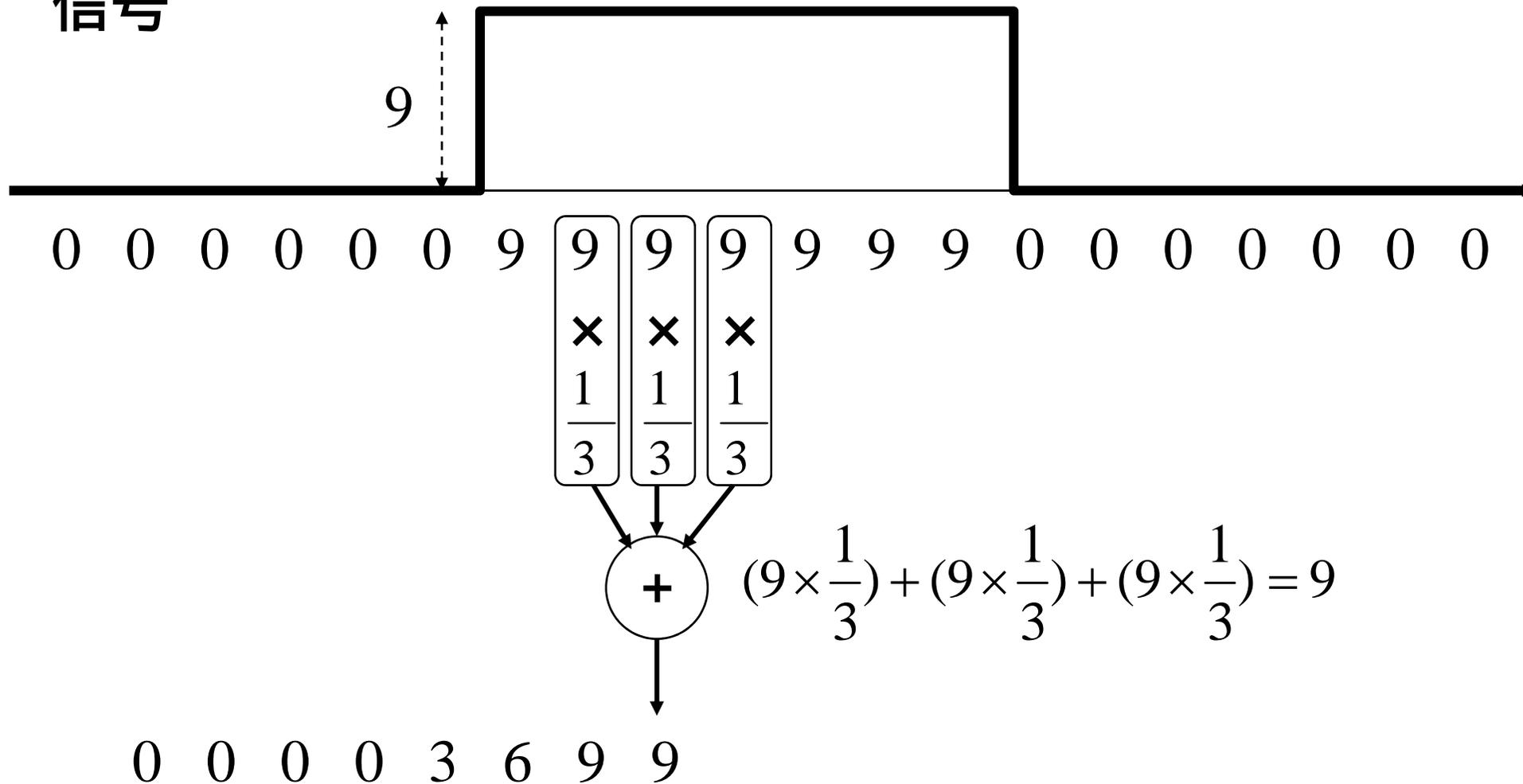
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



# たたみこみ積分(Convolution)

信号

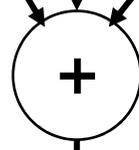
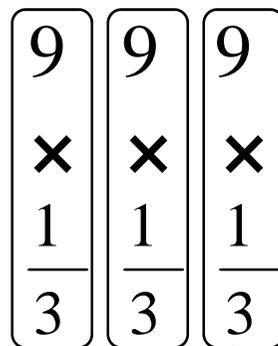


# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0



$$(9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) = 9$$

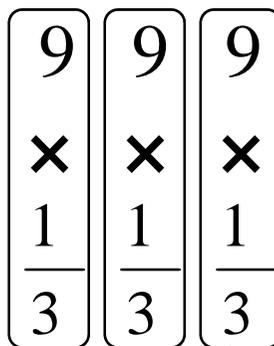
0 0 0 0 3 6 9 9 9

# たたみこみ積分(Convolution)

信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0



$$(9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) = 9$$

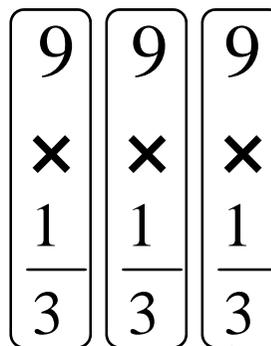
0 0 0 0 3 6 9 9 9 9

# たたみこみ積分(Convolution)

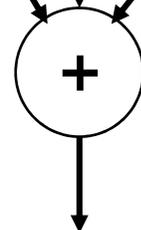
信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0



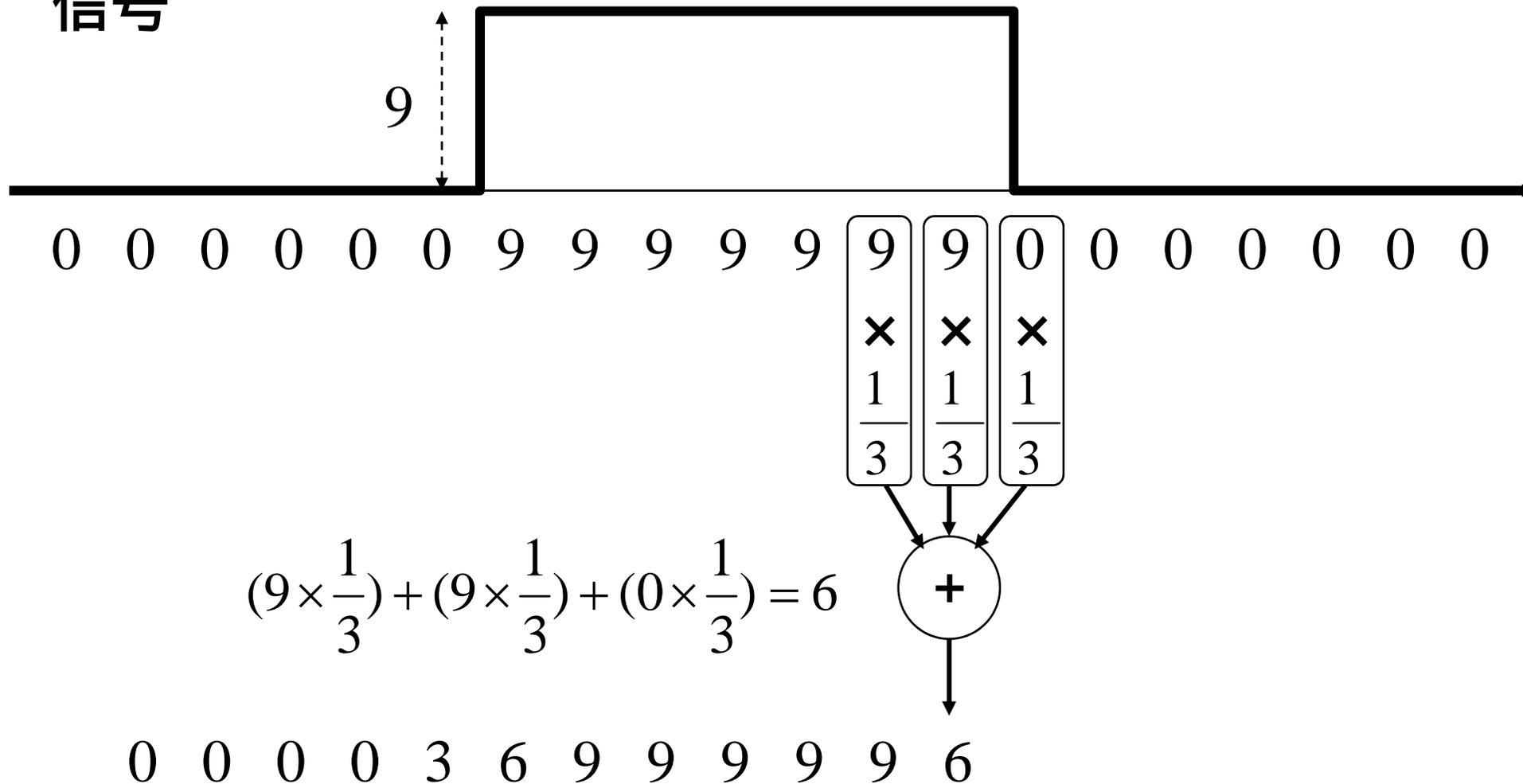
$$(9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) + (9 \times \frac{1}{3}) = 9$$



0 0 0 0 3 6 9 9 9 9 9

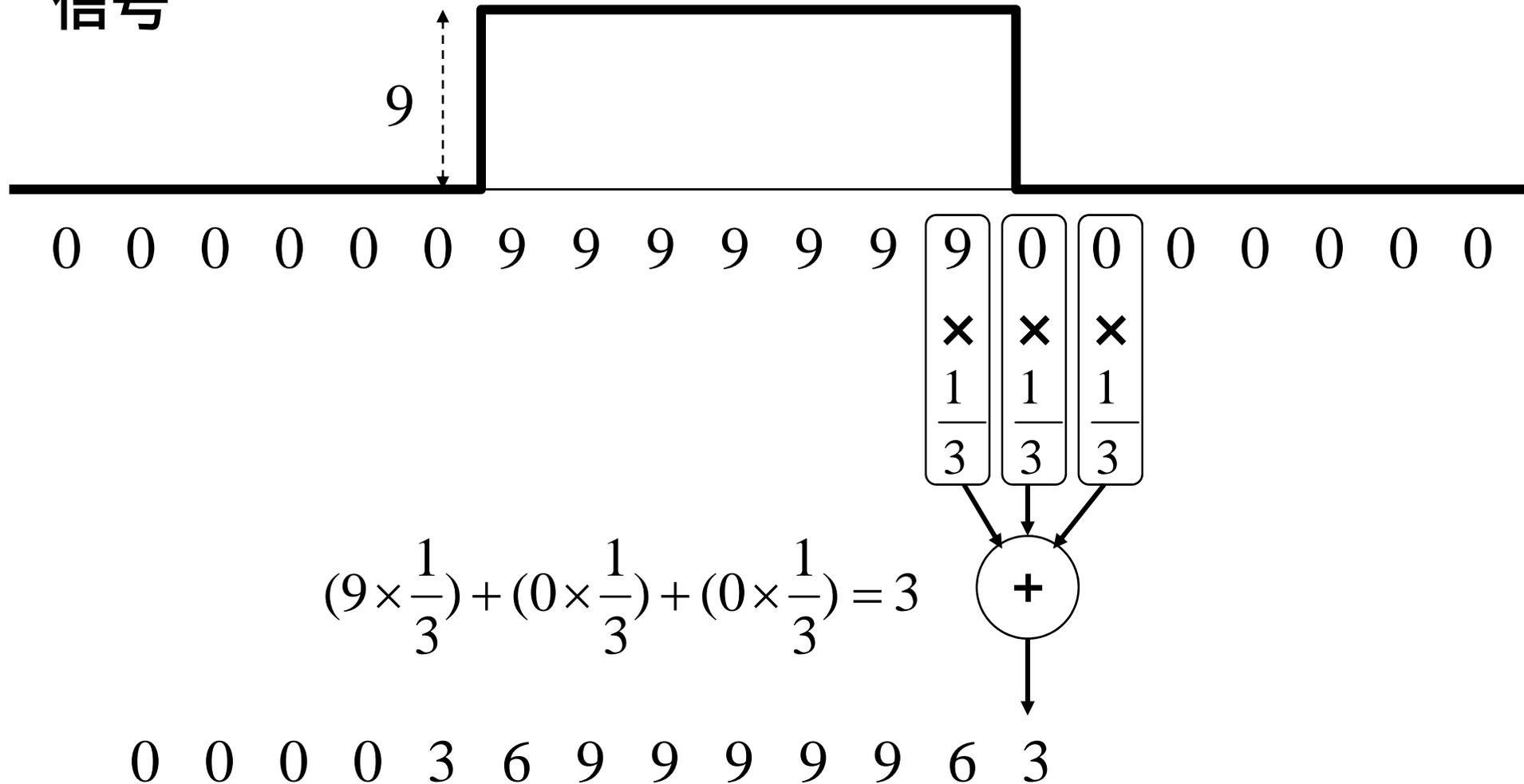
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



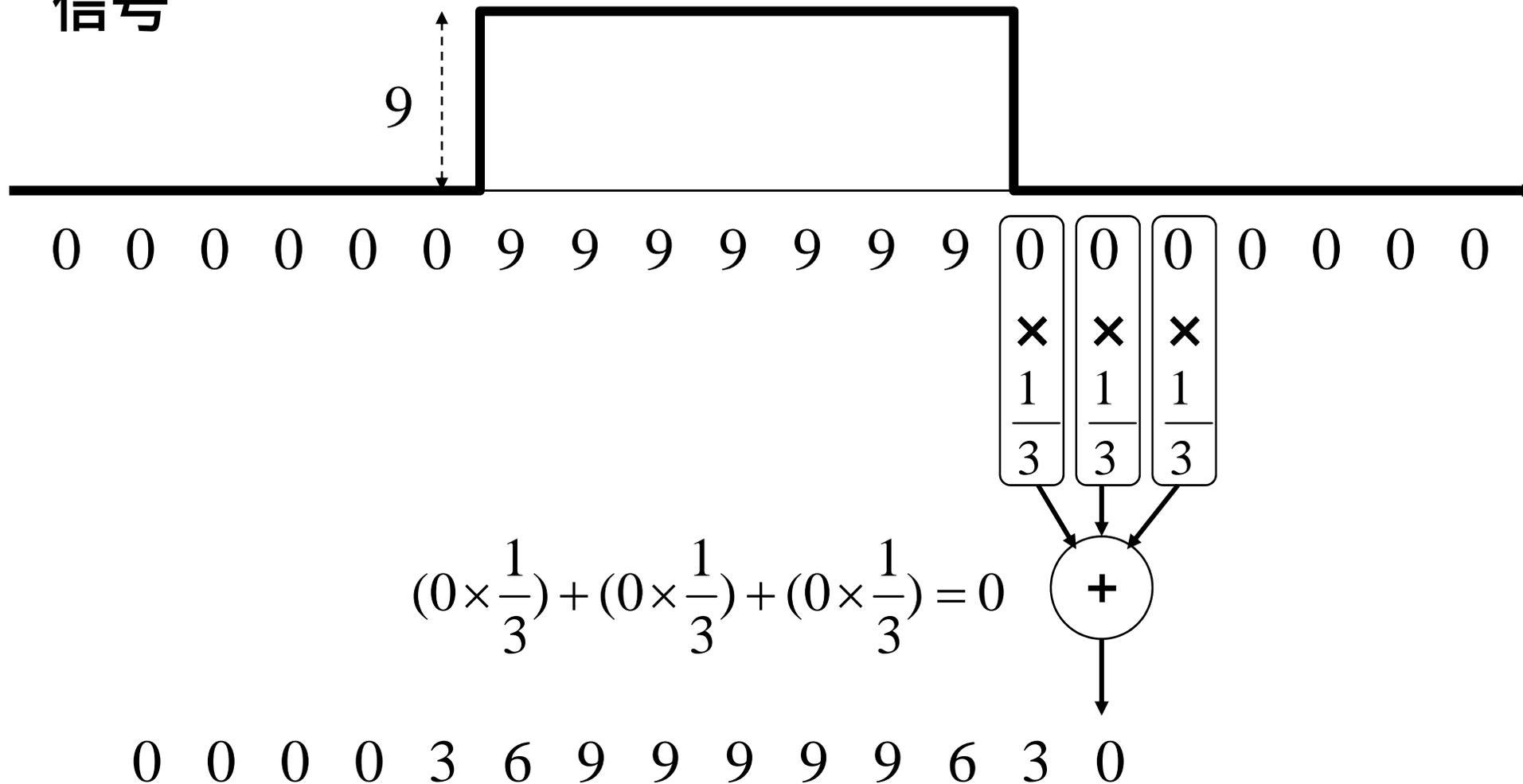
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



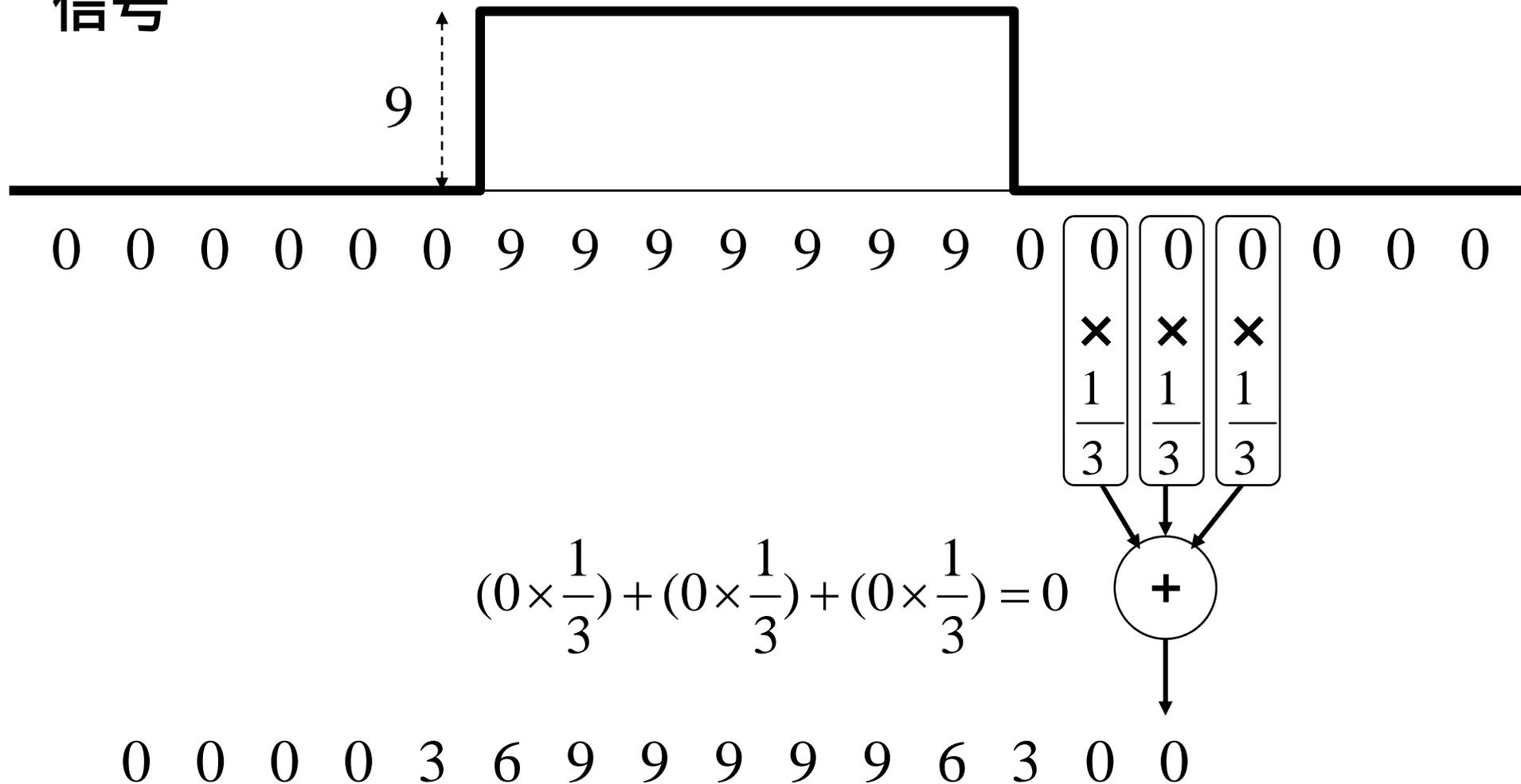
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



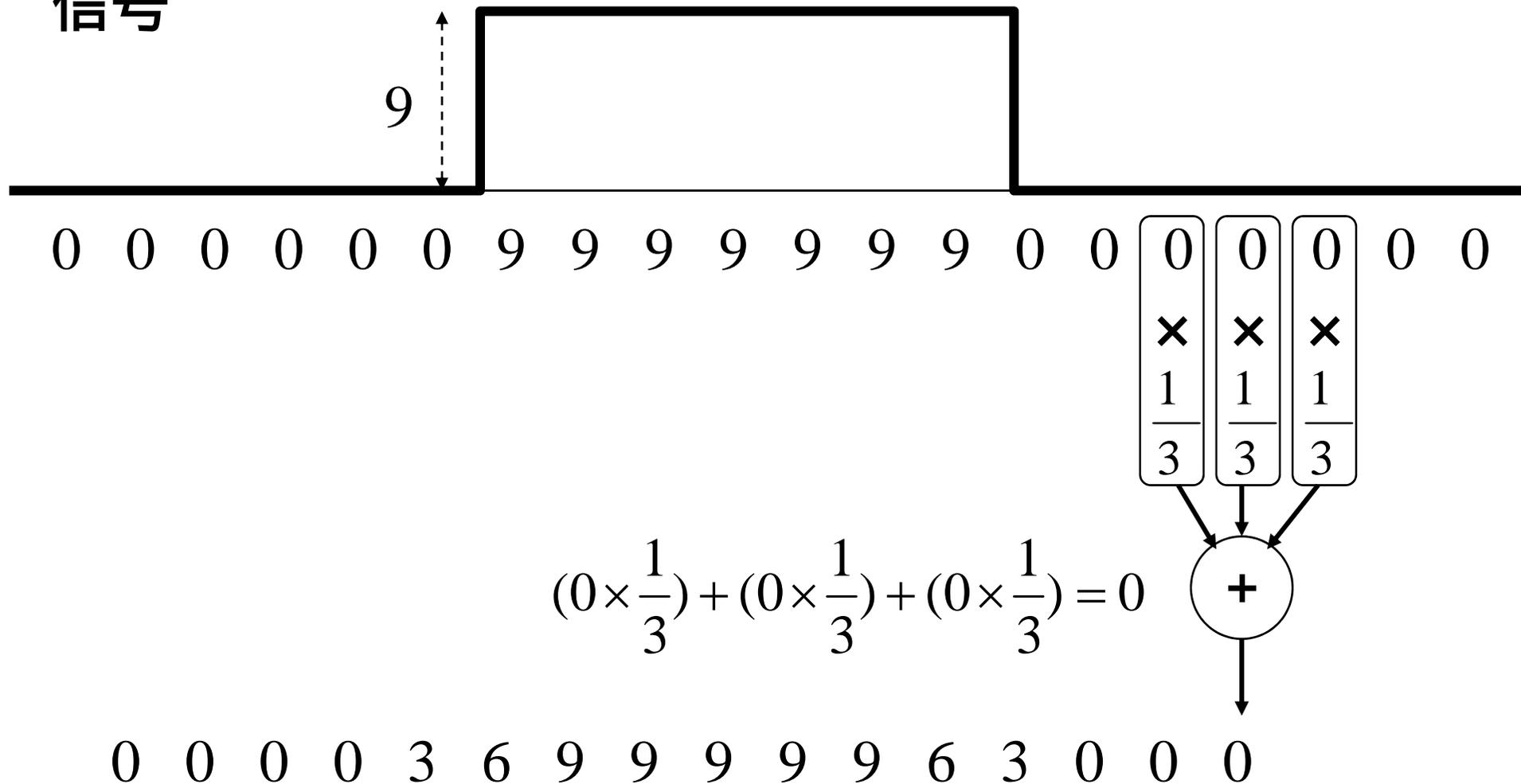
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



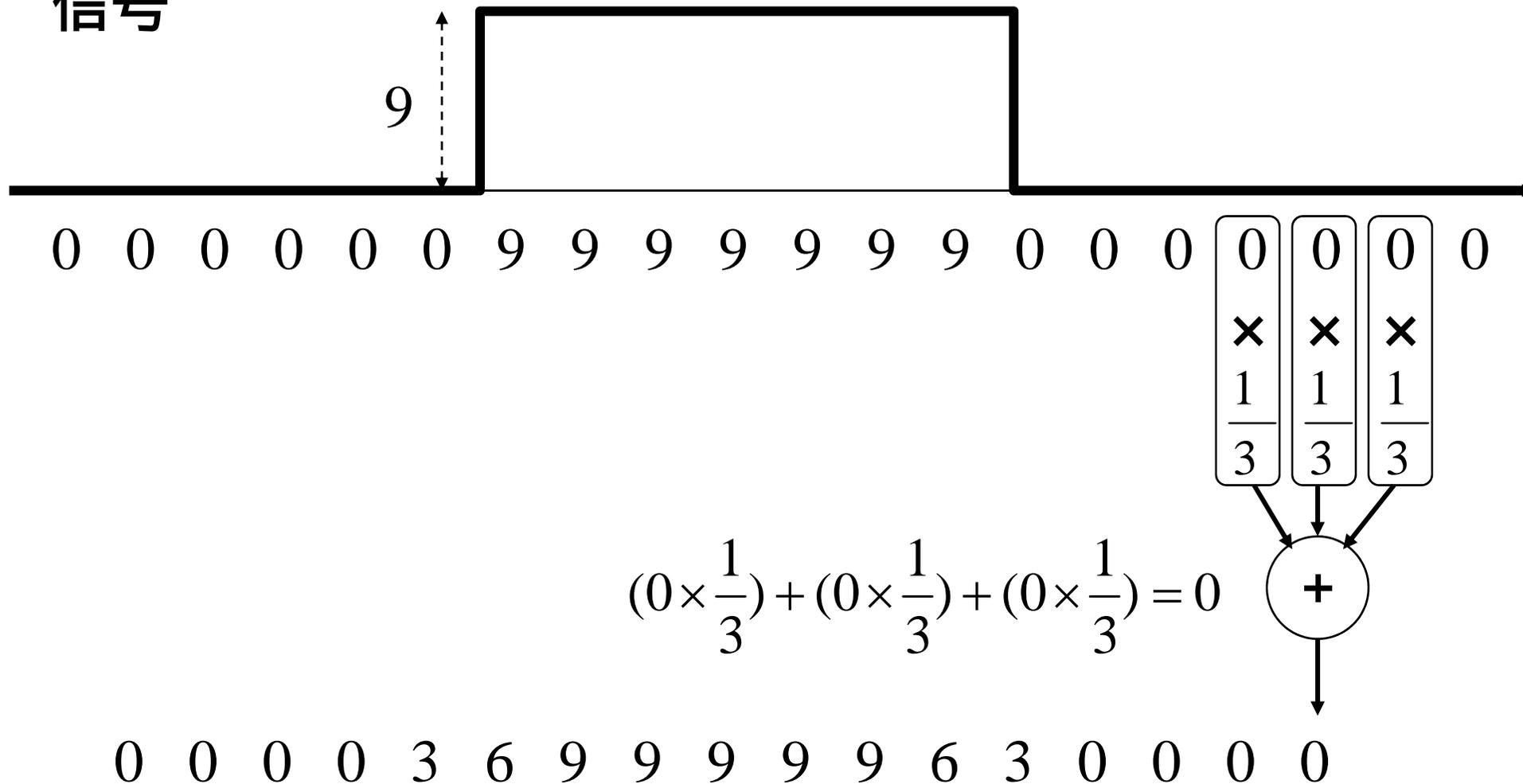
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



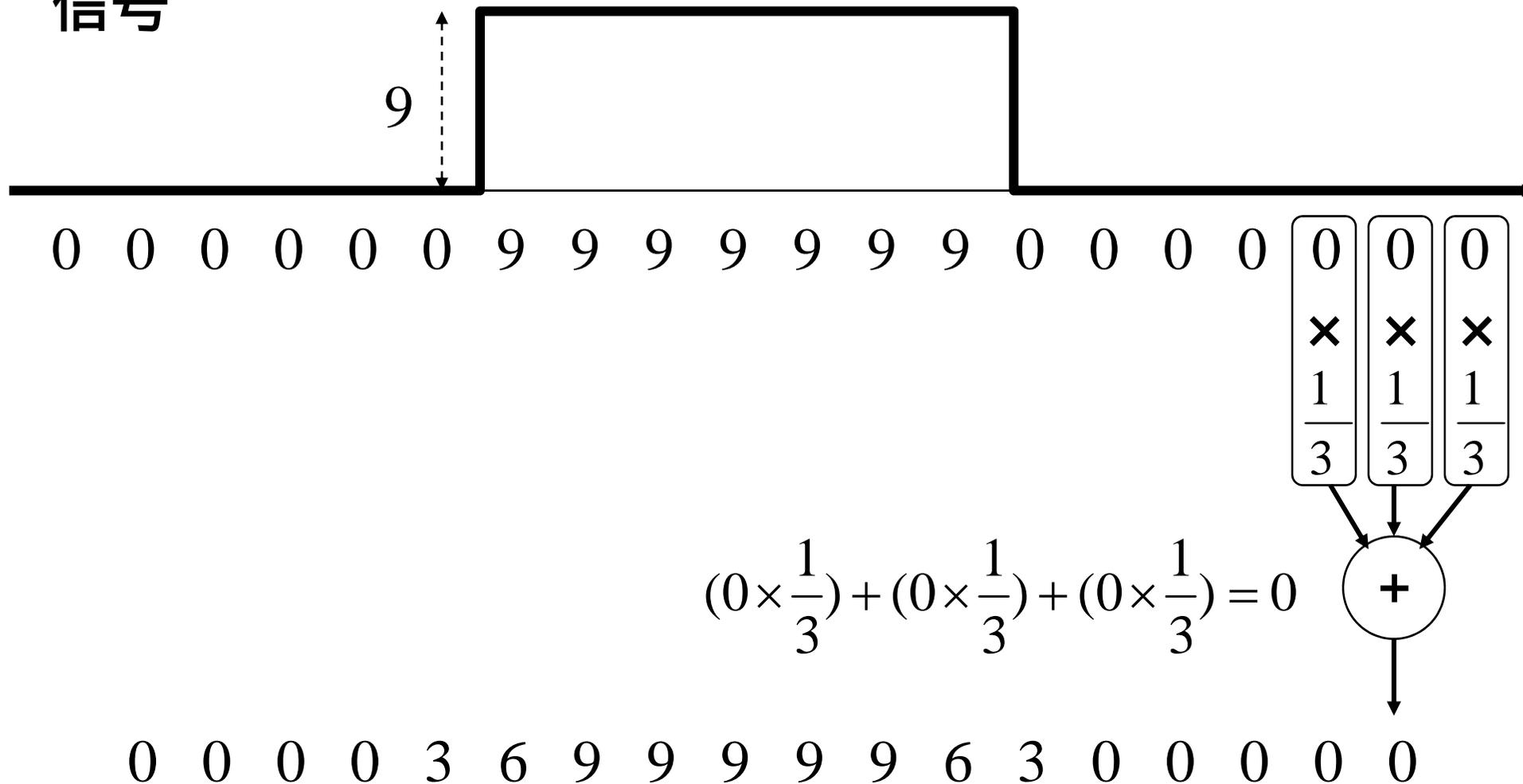
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



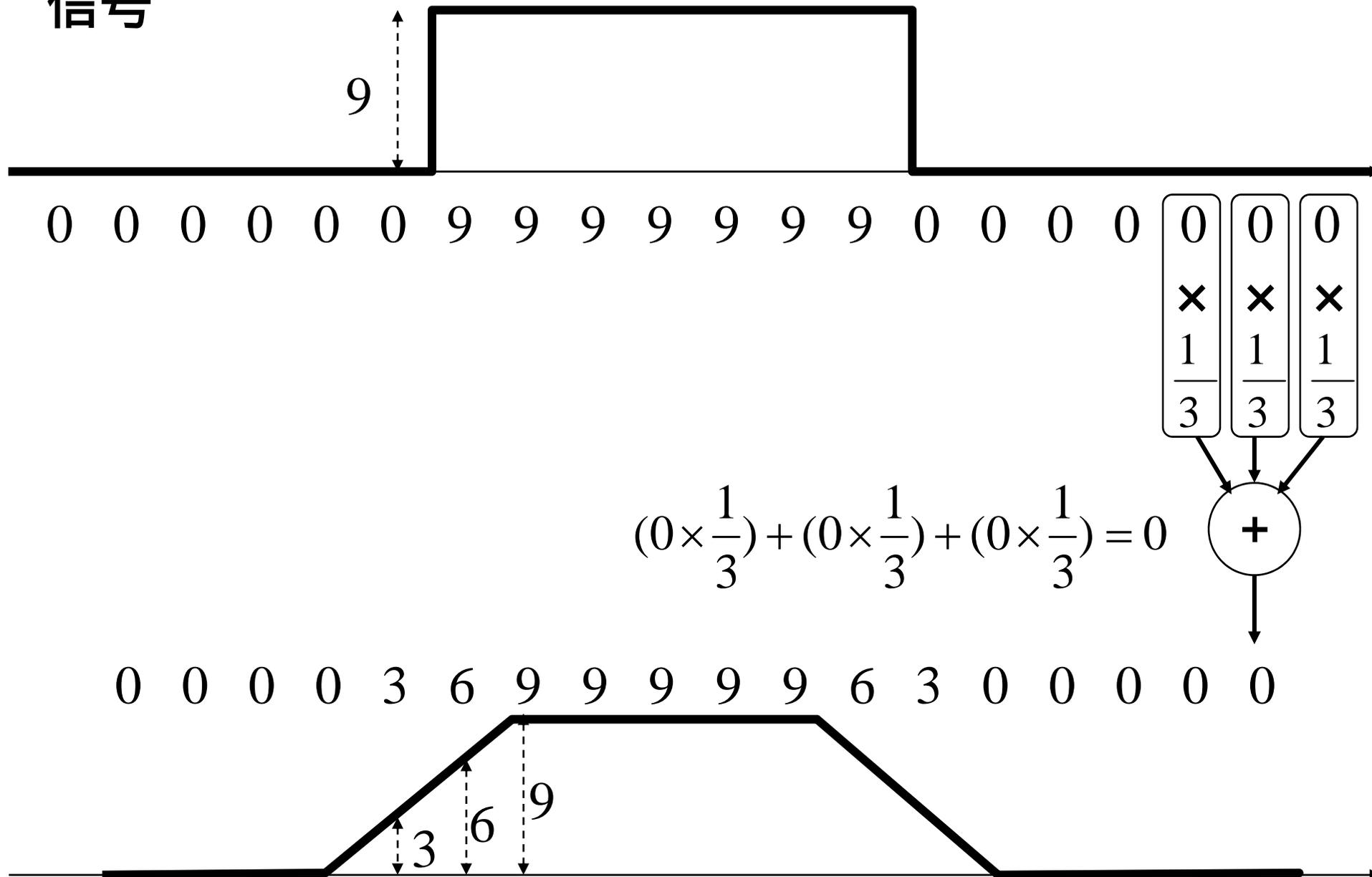
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



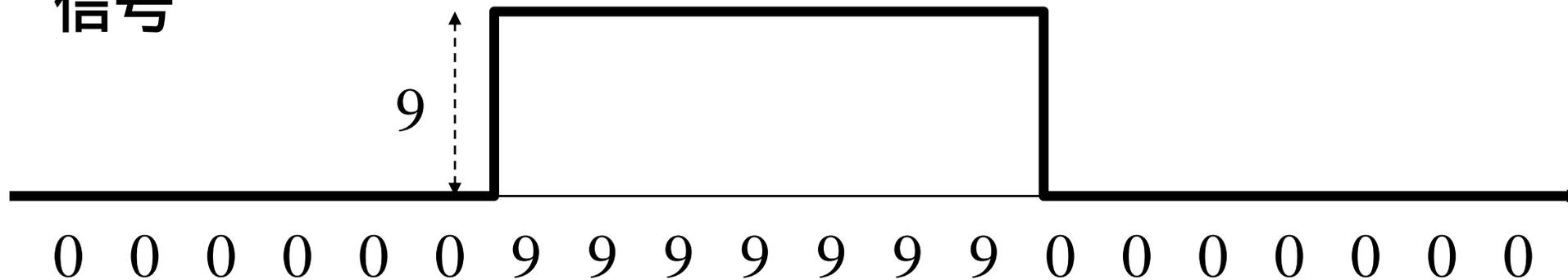
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



# たたみこみ積分(Convolution)

信号



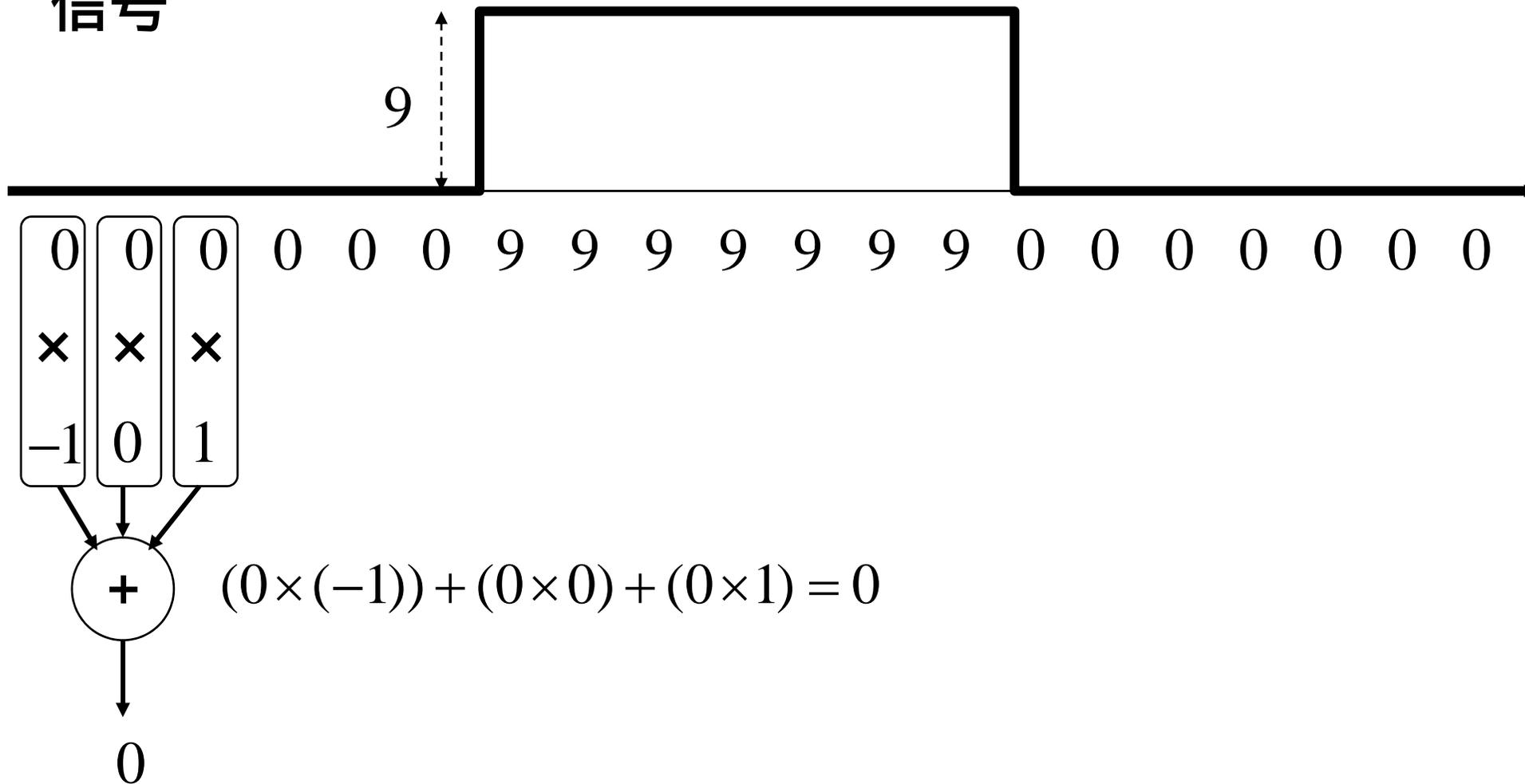
## 微分処理

たたみ込み核  $(-1, 0, 1)$

重みパラメータ

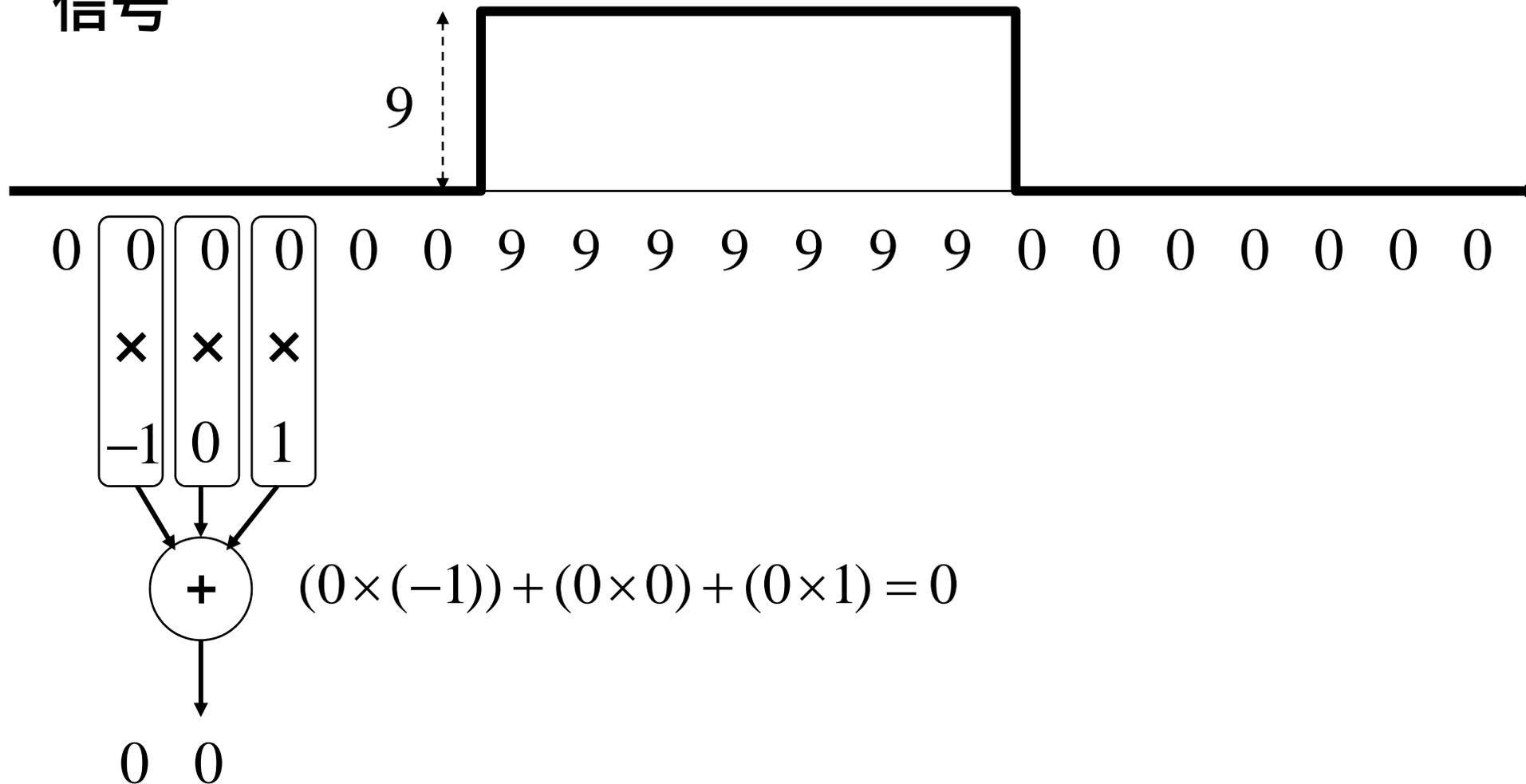
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



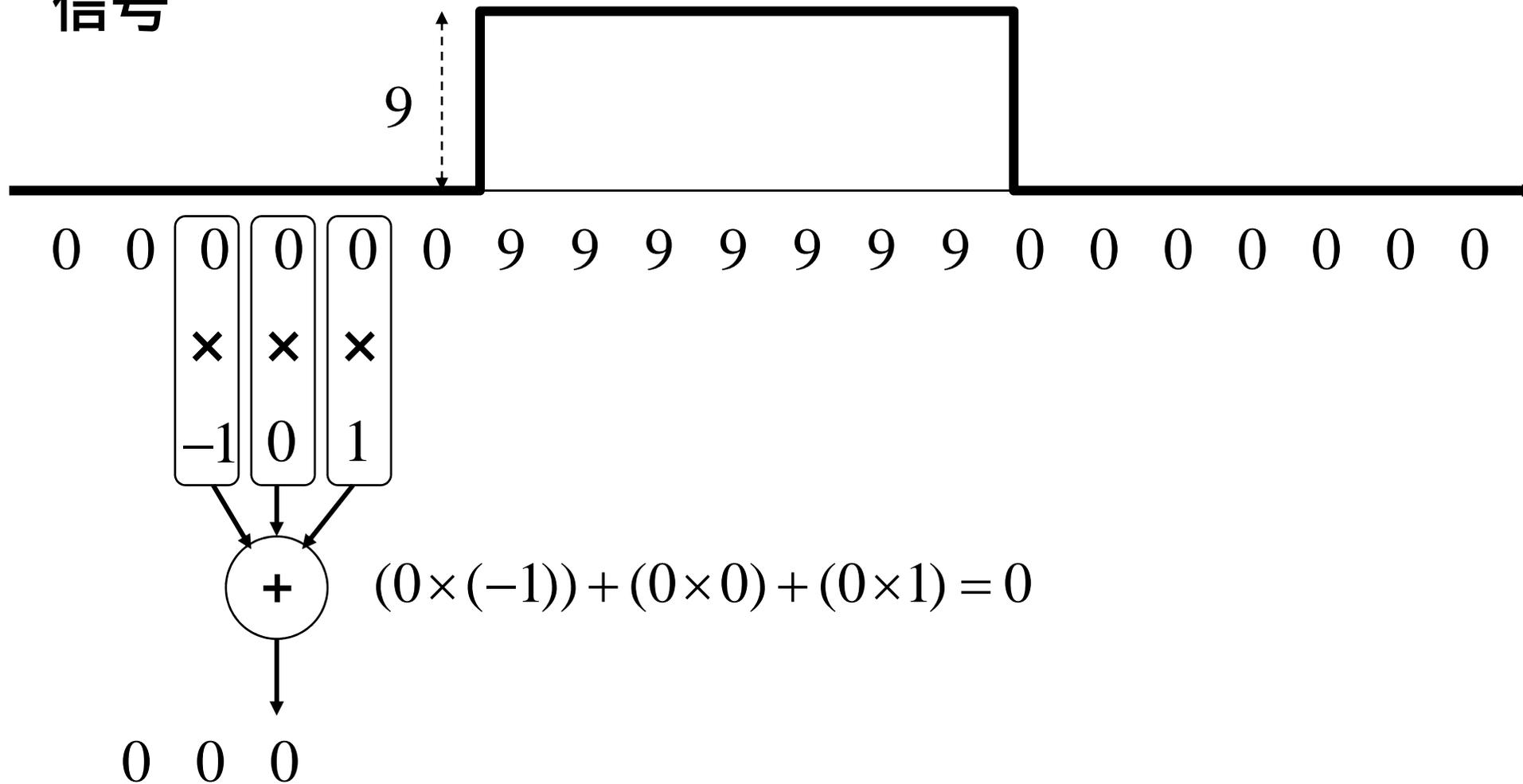
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



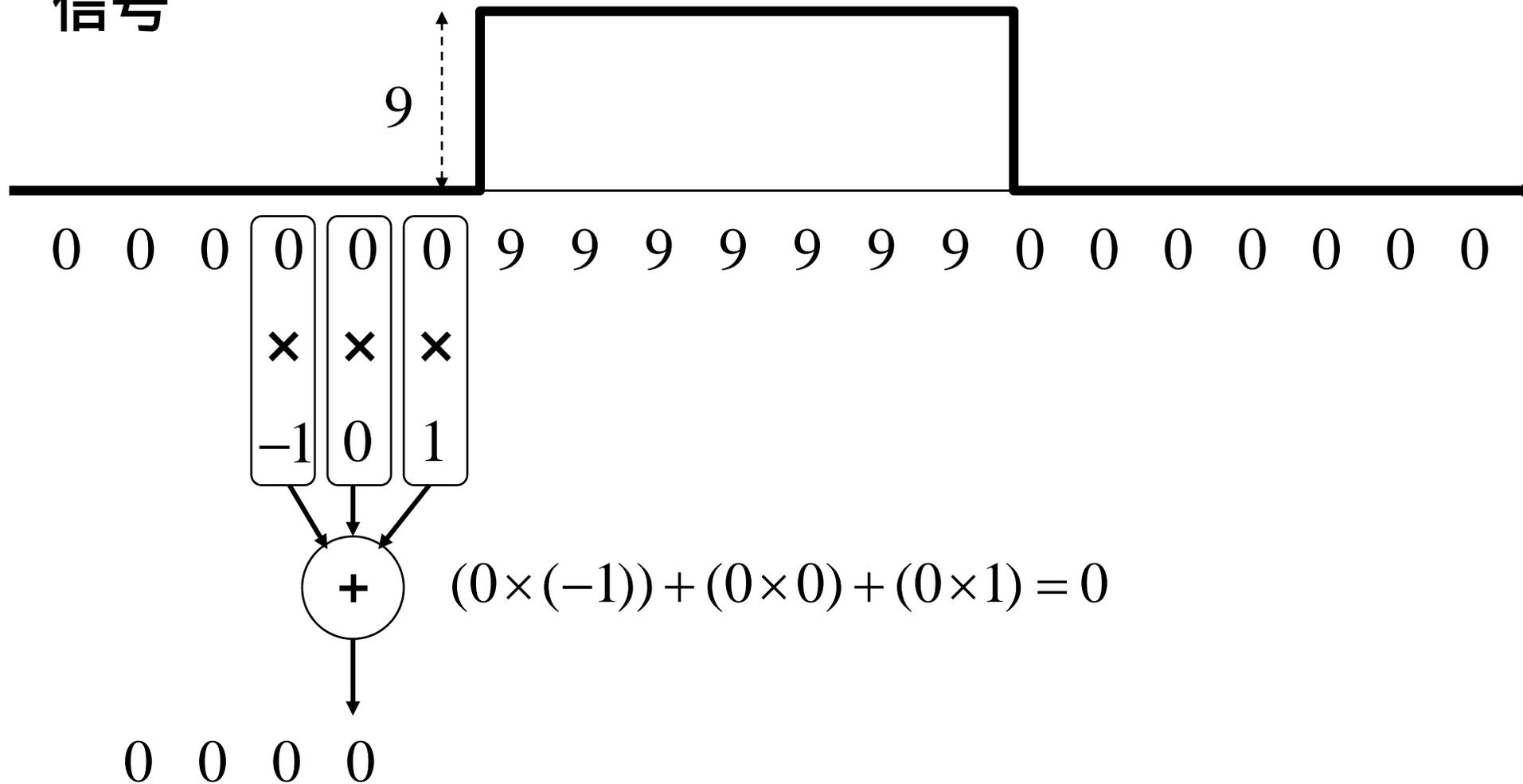
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



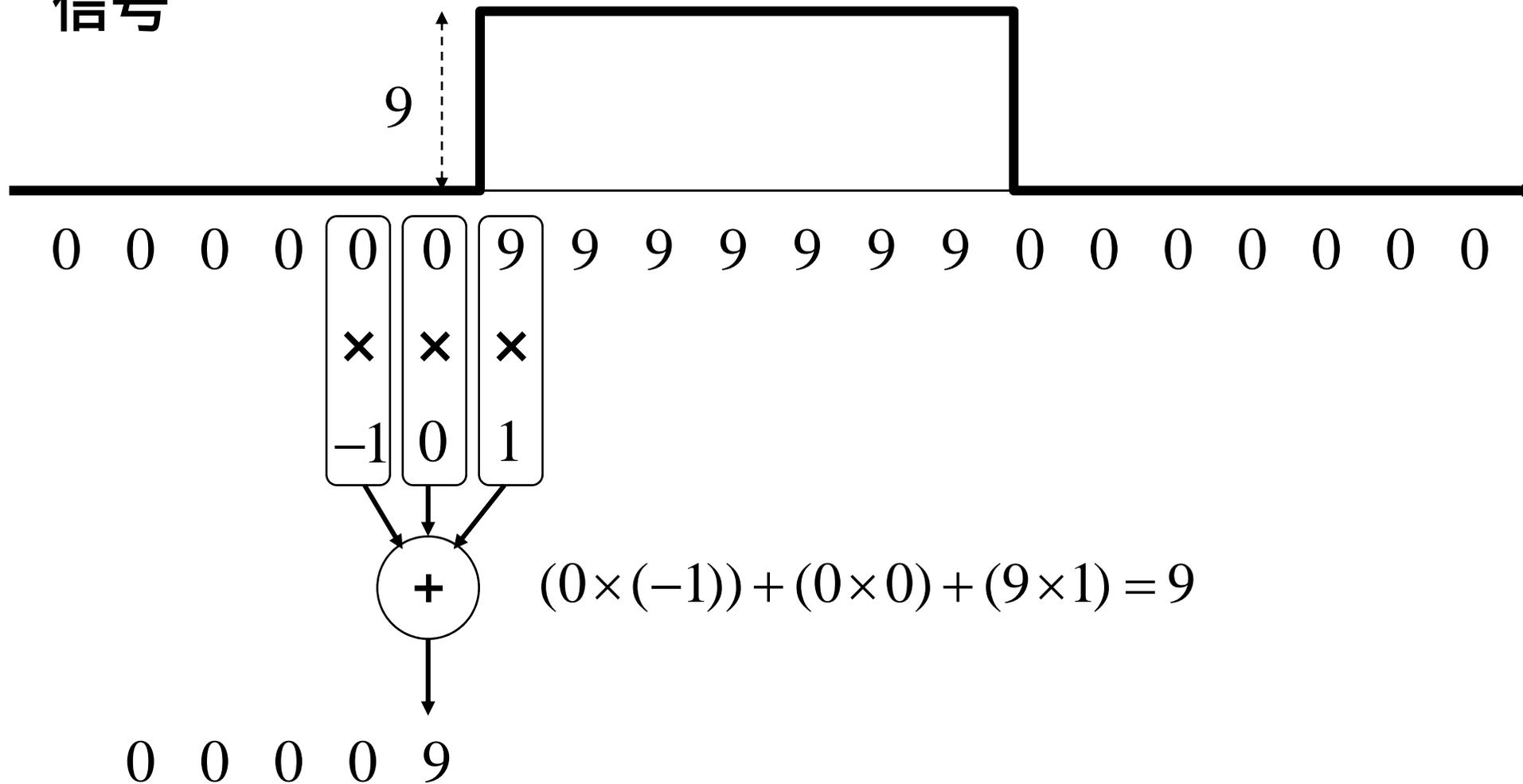
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



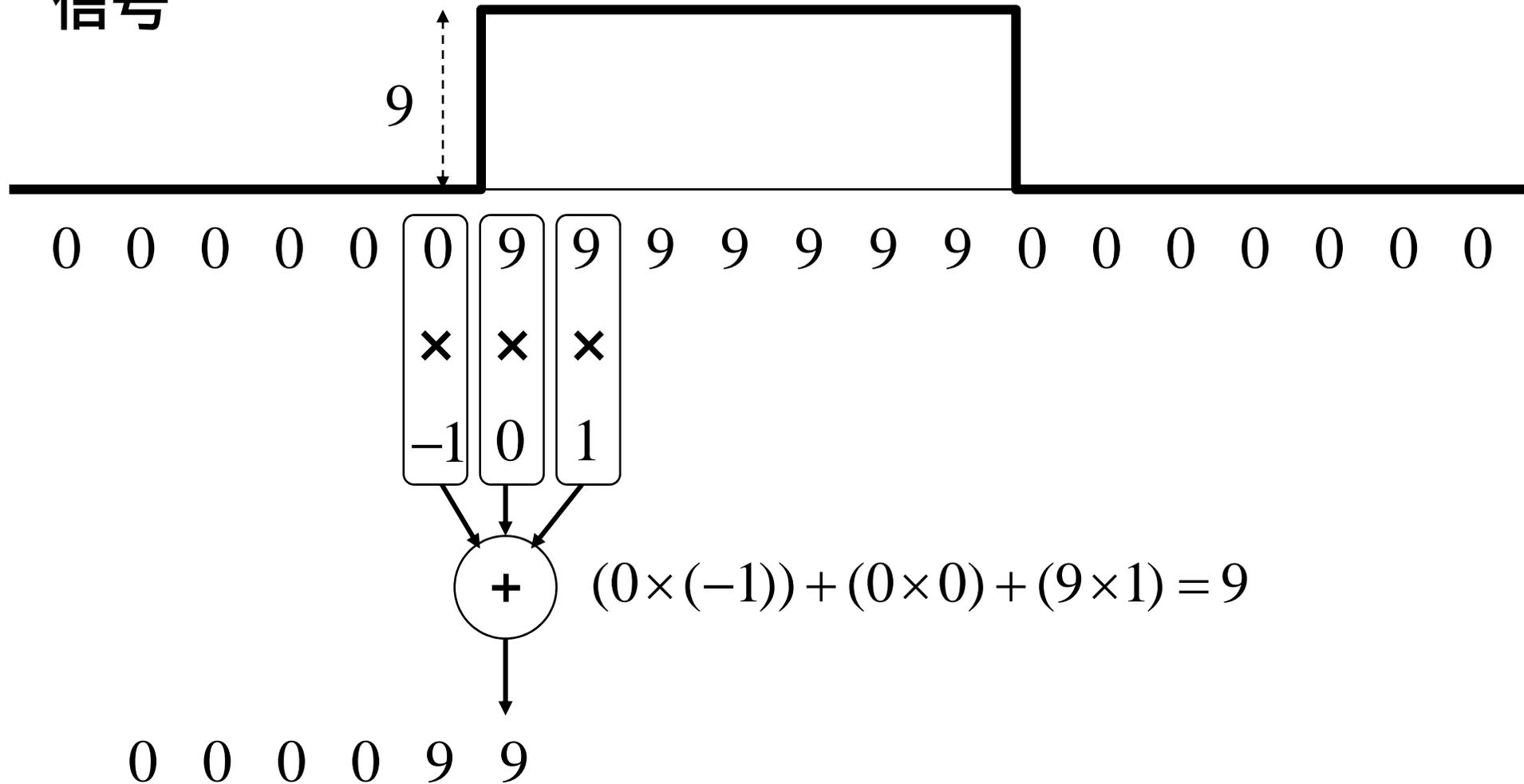
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



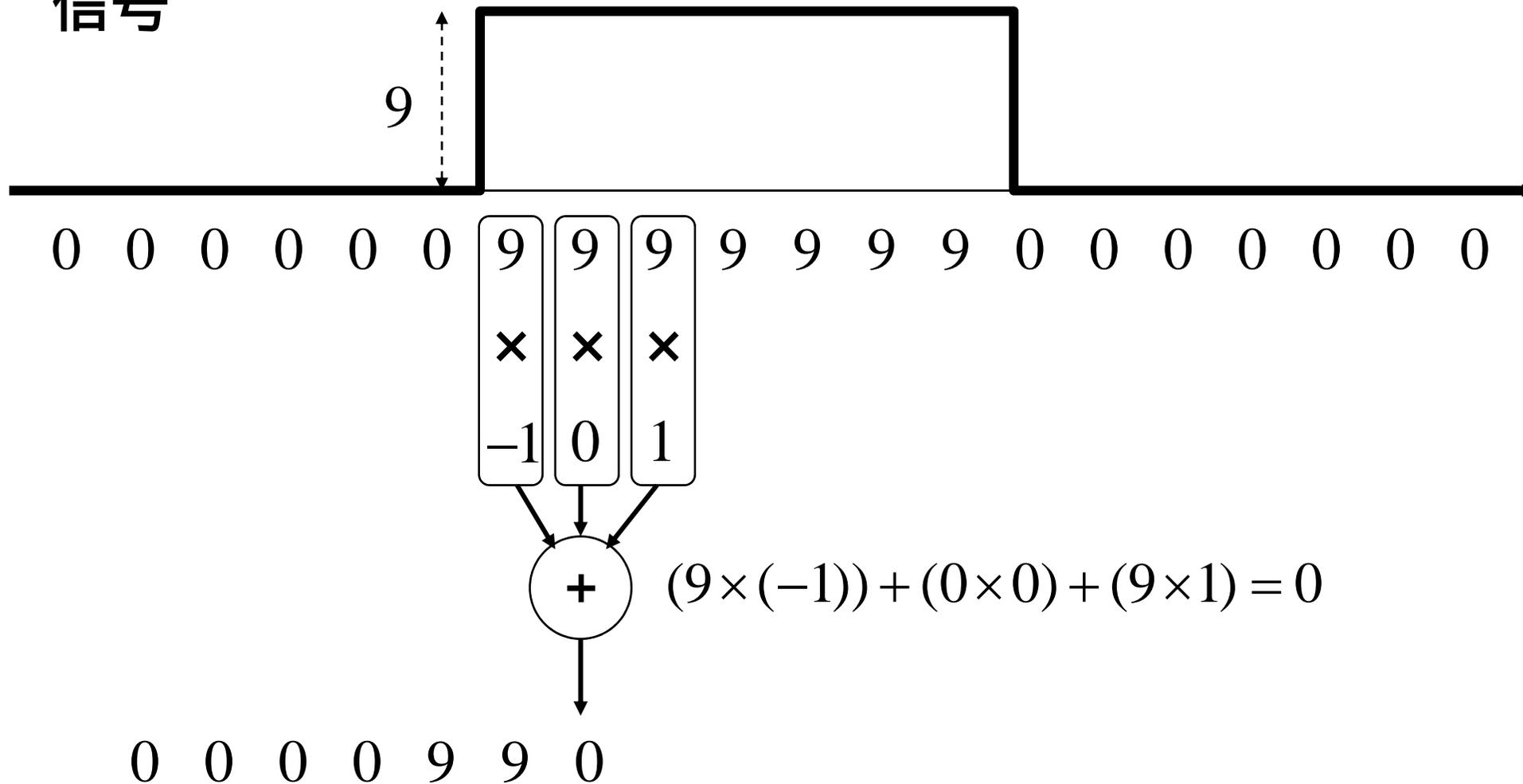
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



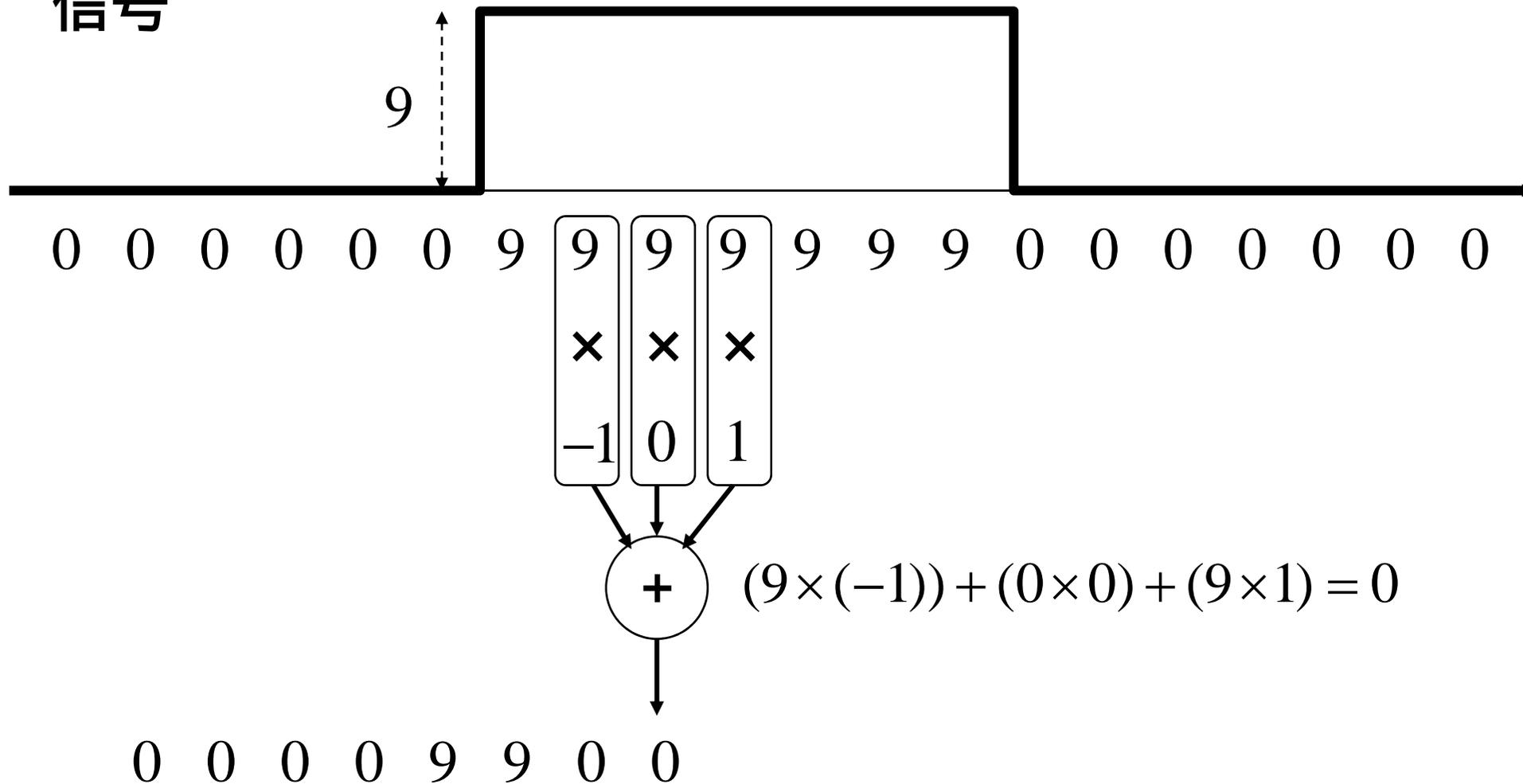
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



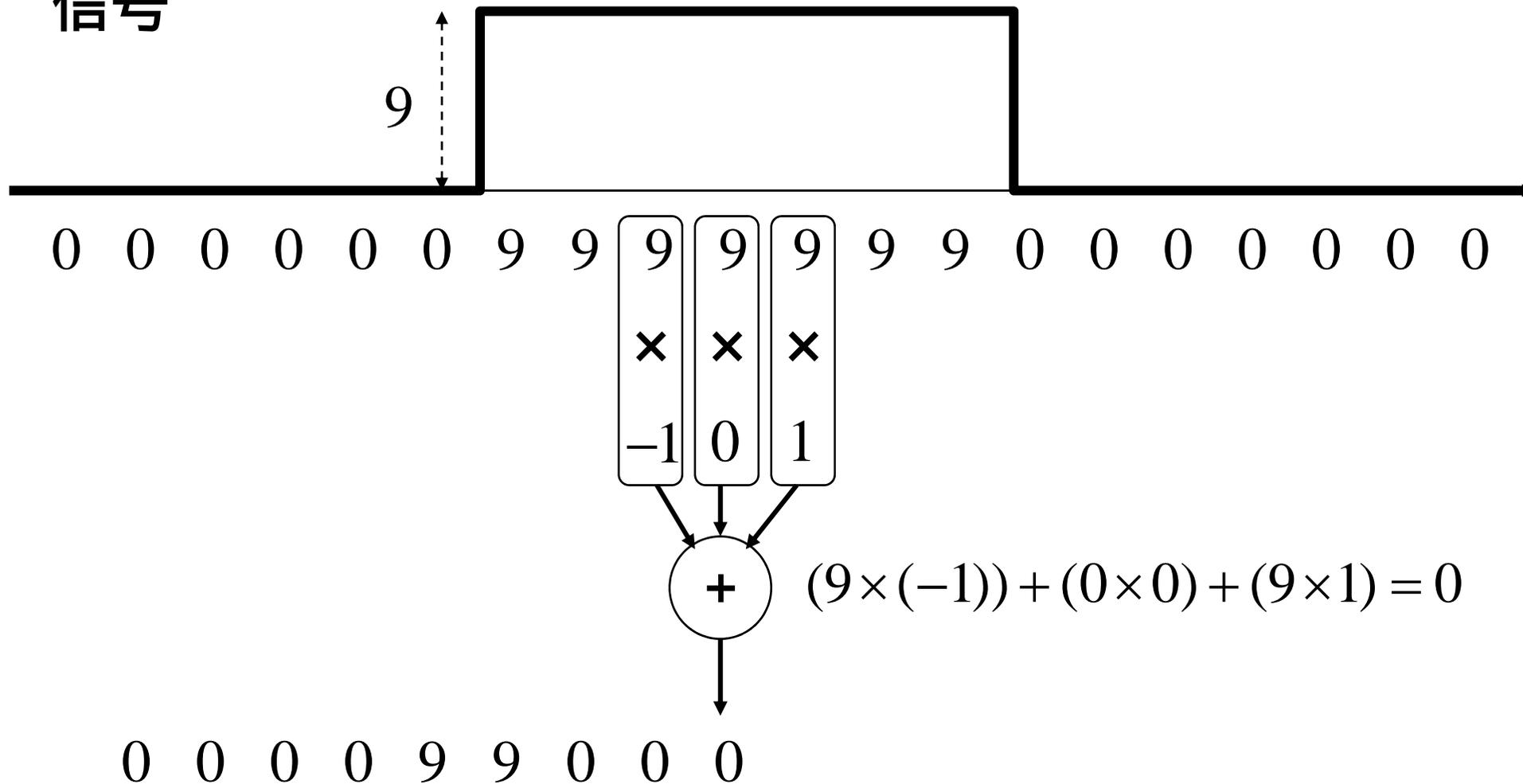
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



# たたみこみ積分(Convolution)

信号

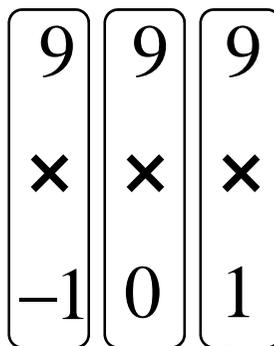


# たたみこみ積分(Convolution)

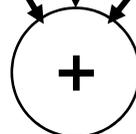
信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0



$$(9 \times (-1)) + (0 \times 0) + (9 \times 1) = 0$$



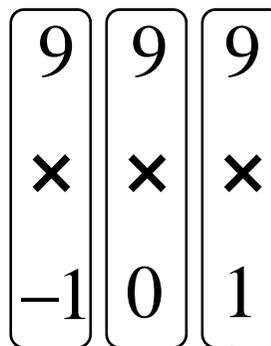
0 0 0 0 9 9 0 0 0 0

# たたみこみ積分(Convolution)

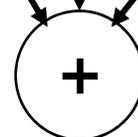
信号



0 0 0 0 0 0 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0



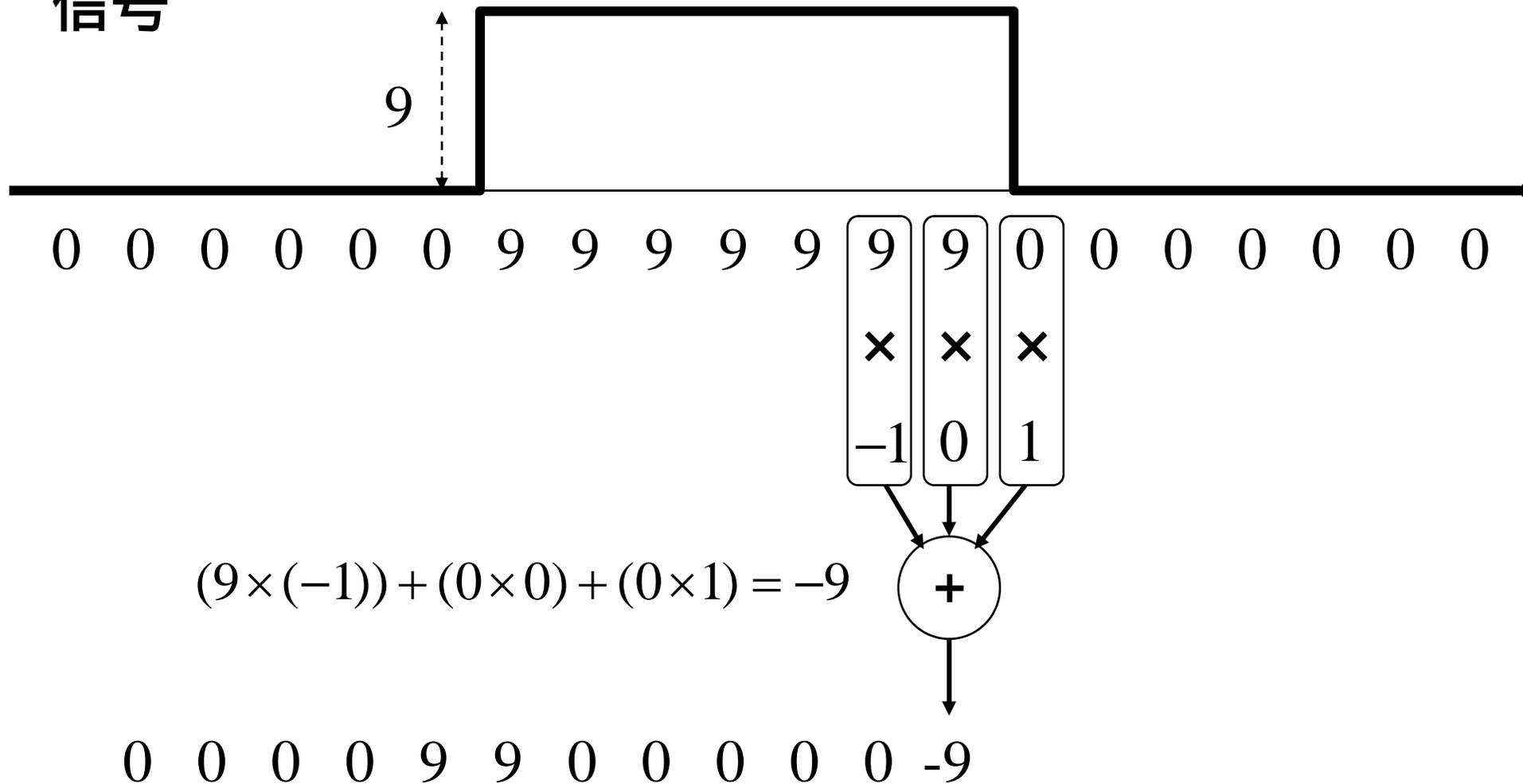
$$(9 \times (-1)) + (0 \times 0) + (9 \times 1) = 0$$



0 0 0 0 9 9 0 0 0 0 0

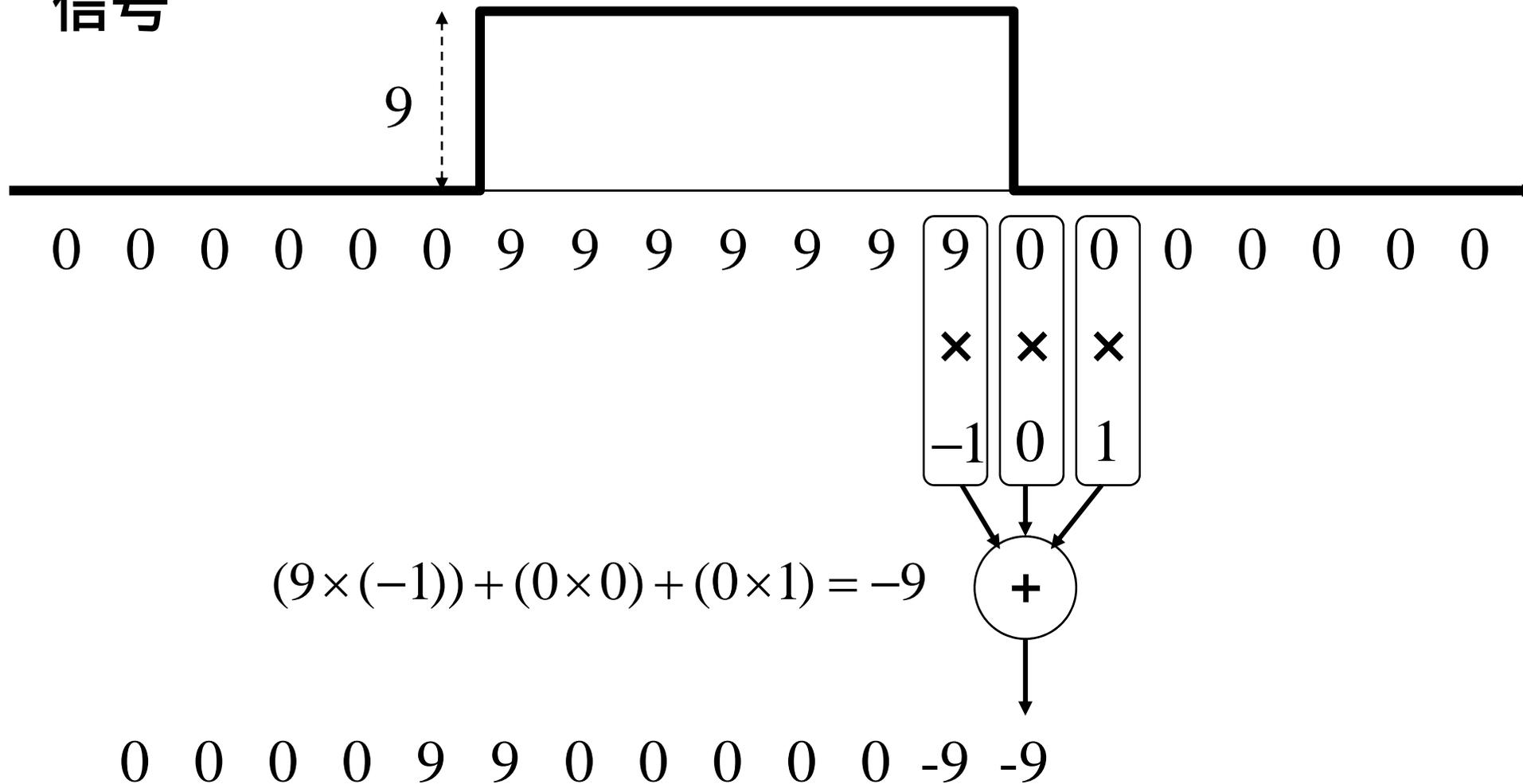
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



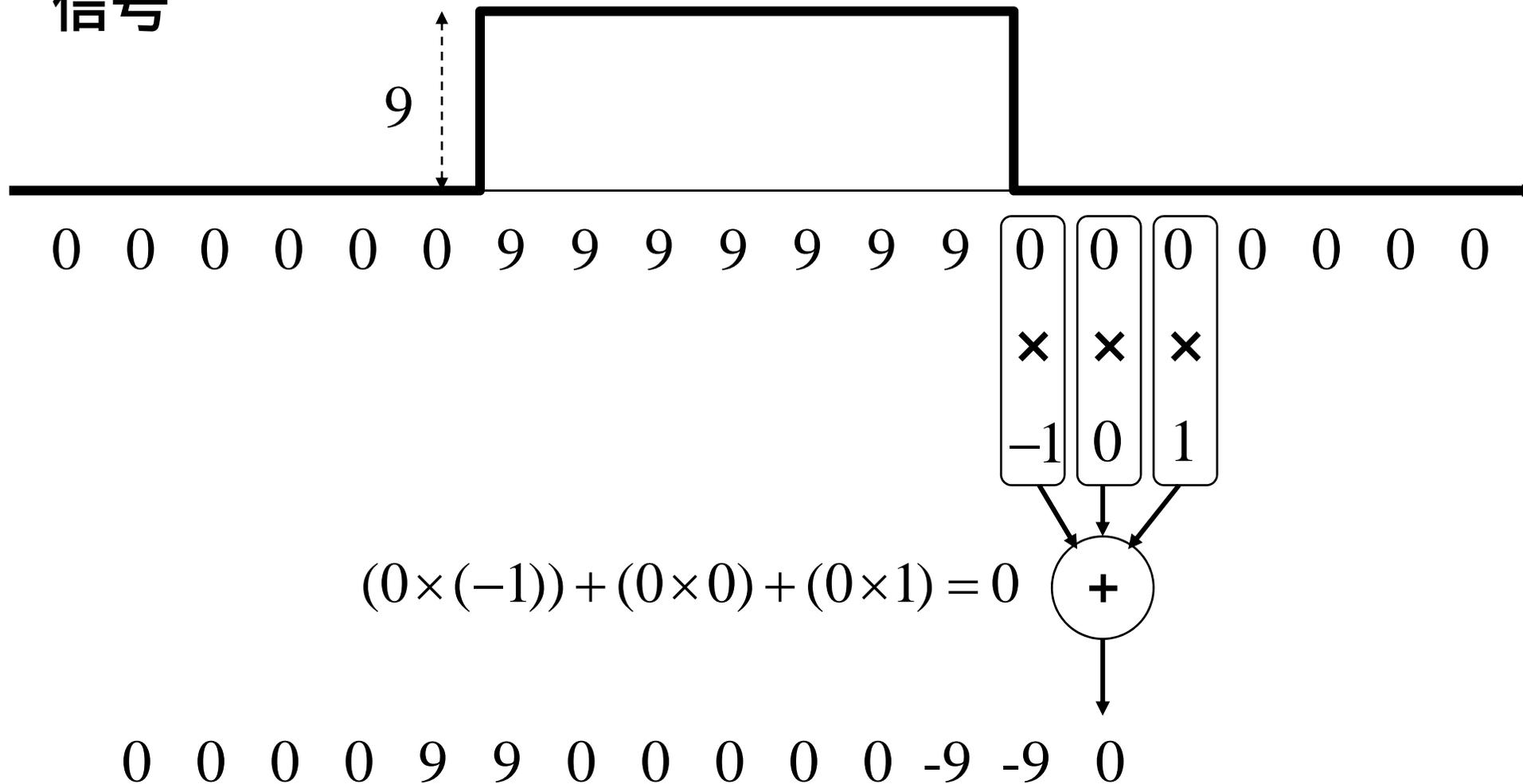
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



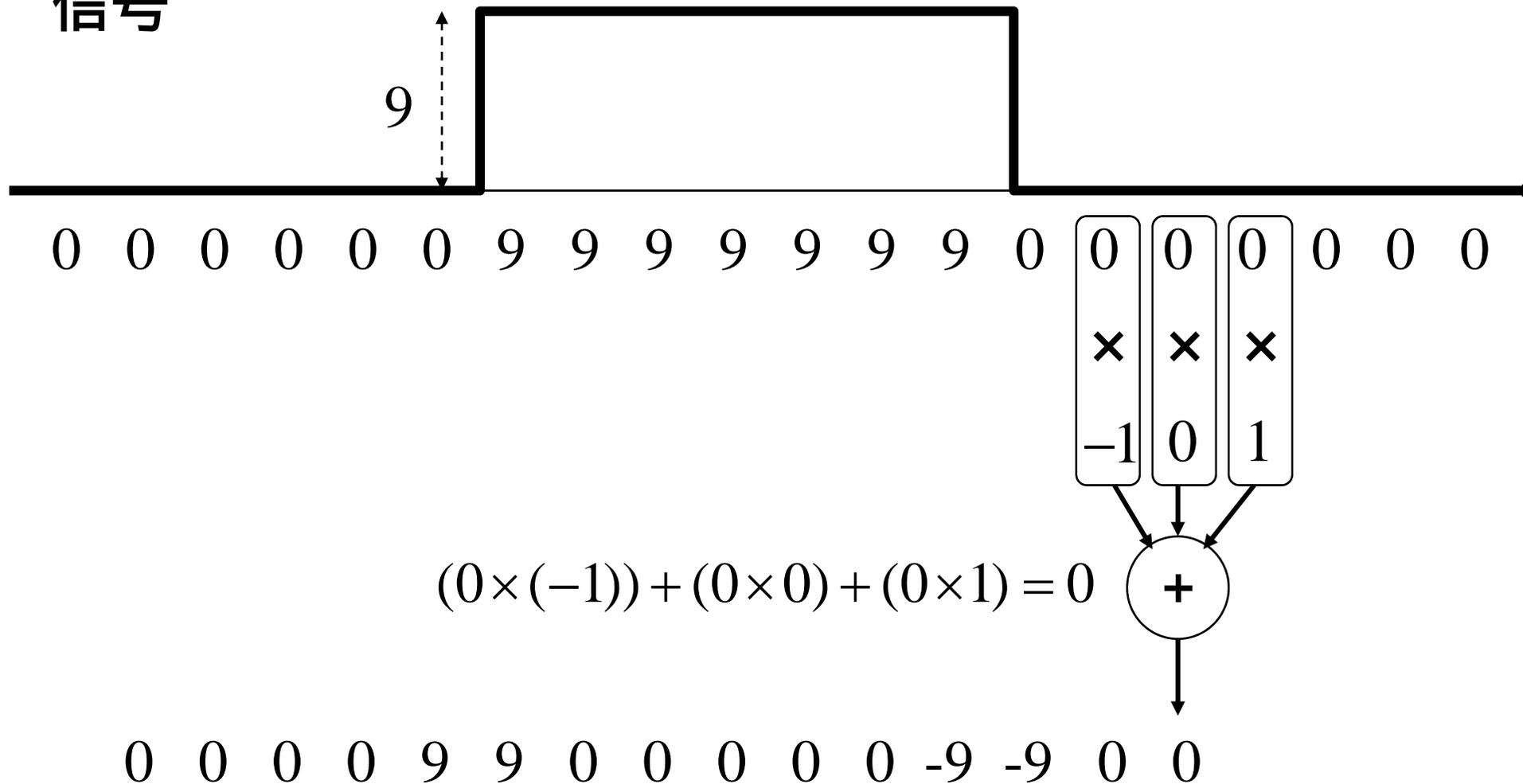
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



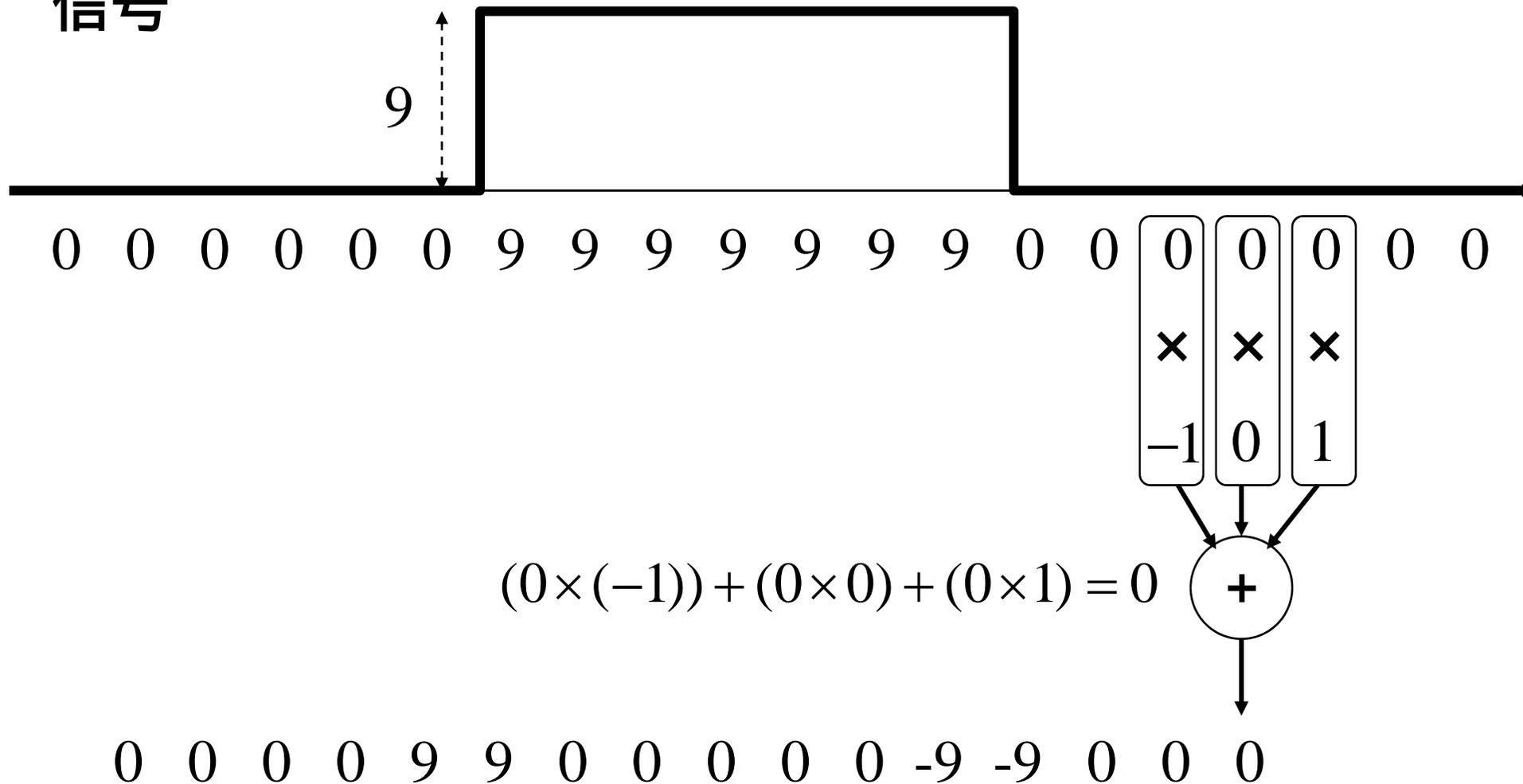
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



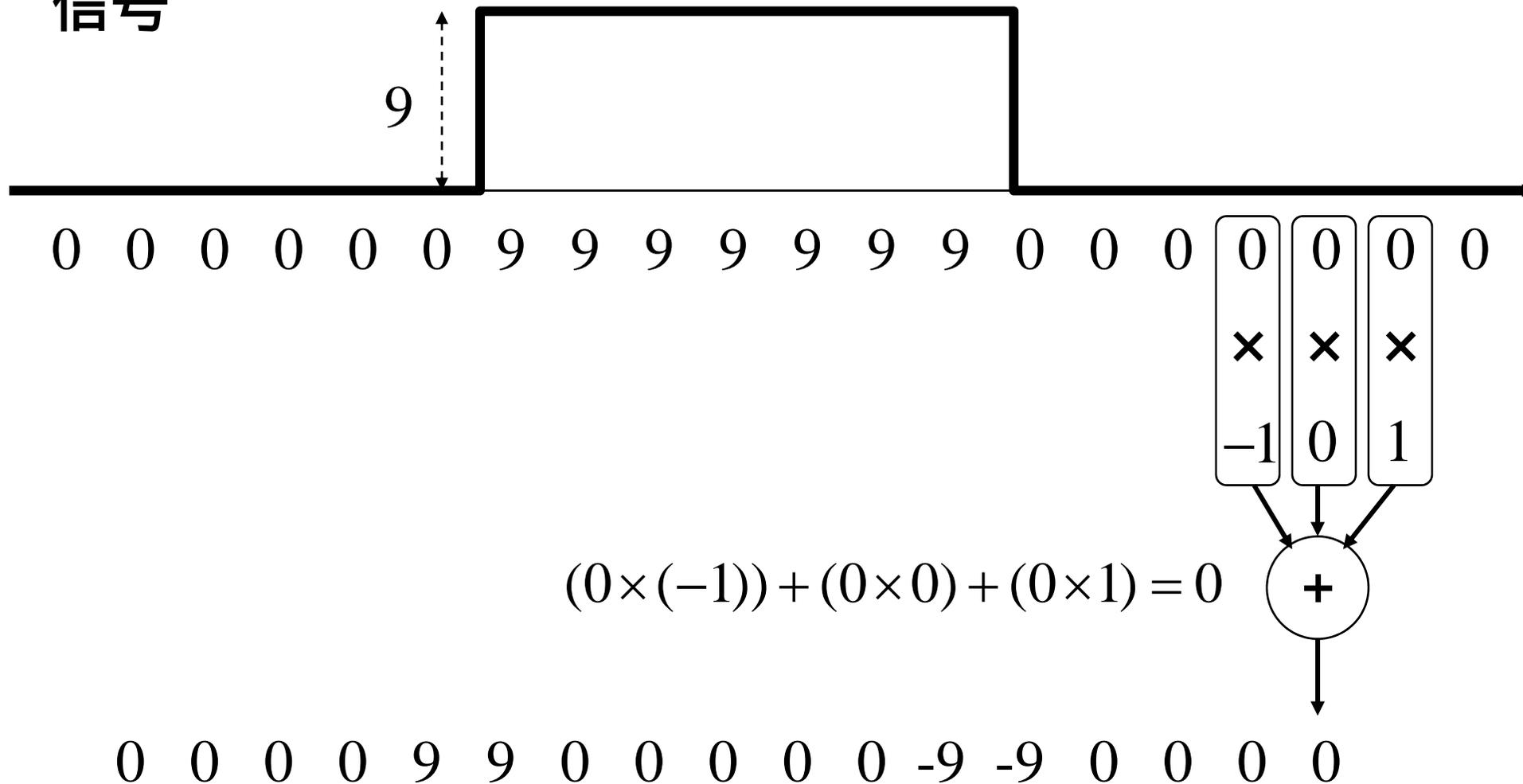
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



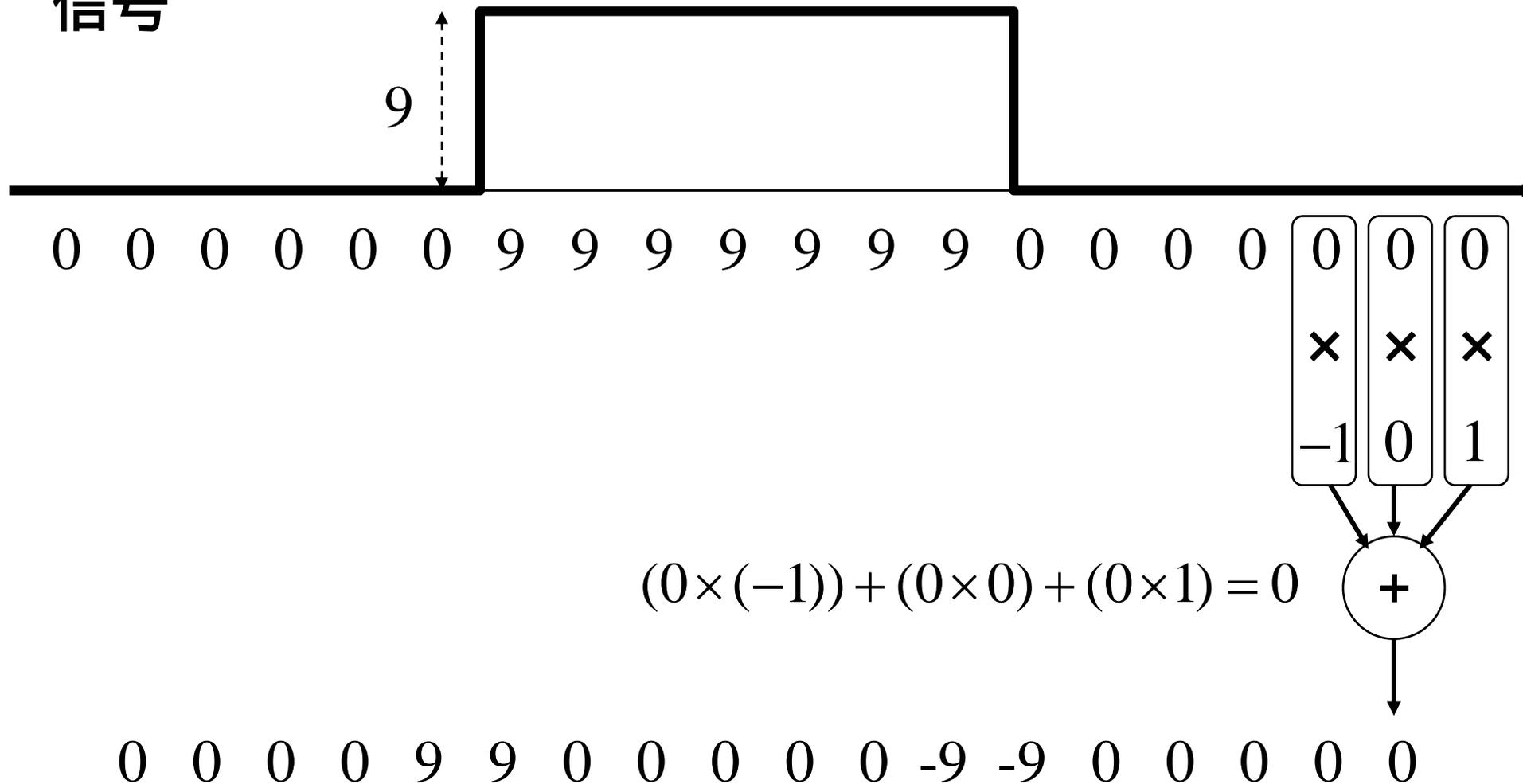
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



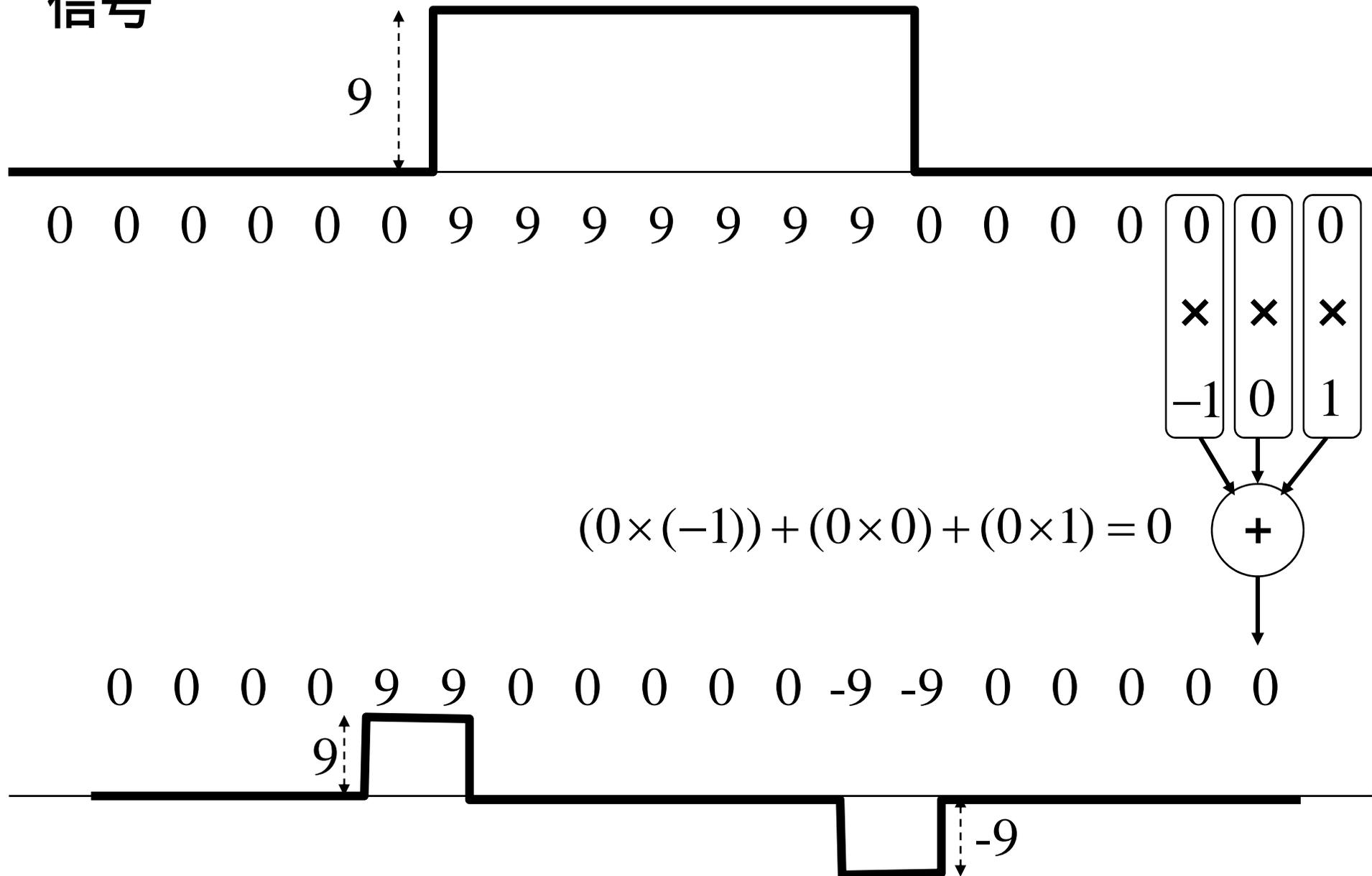
# たたみこみ積分(Convolution)

信号



# たたみこみ積分(Convolution)

信号

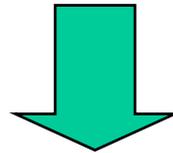


# たたみこみ積分(Convolution)

信号  $f$

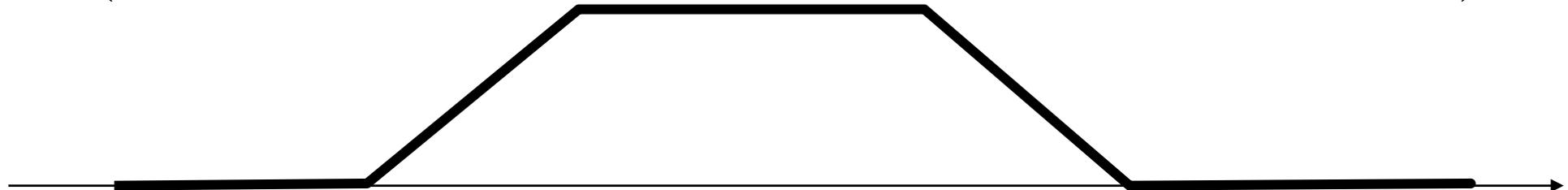


平滑化 たたみ込み核  $g$   $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



たたみこみ積分の結果  $f * g$

( 0 0 0 0 3 6 9 9 9 9 9 6 3 0 0 0 0 0 )



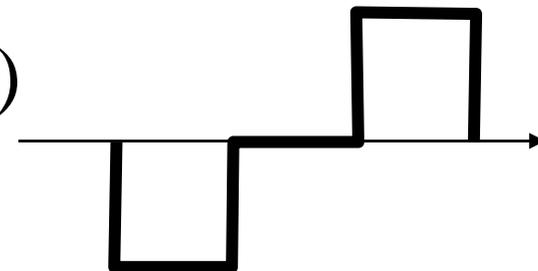
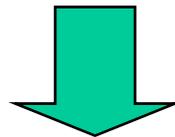
# たたみこみ積分(Convolution)

信号  $f$



微分

たたみ込み核  $g (-1,0,1)$



たたみこみ積分の結果  $f * g$

( 0 0 0 0 9 9 0 0 0 0 0 -9 -9 0 0 0 0 0 )

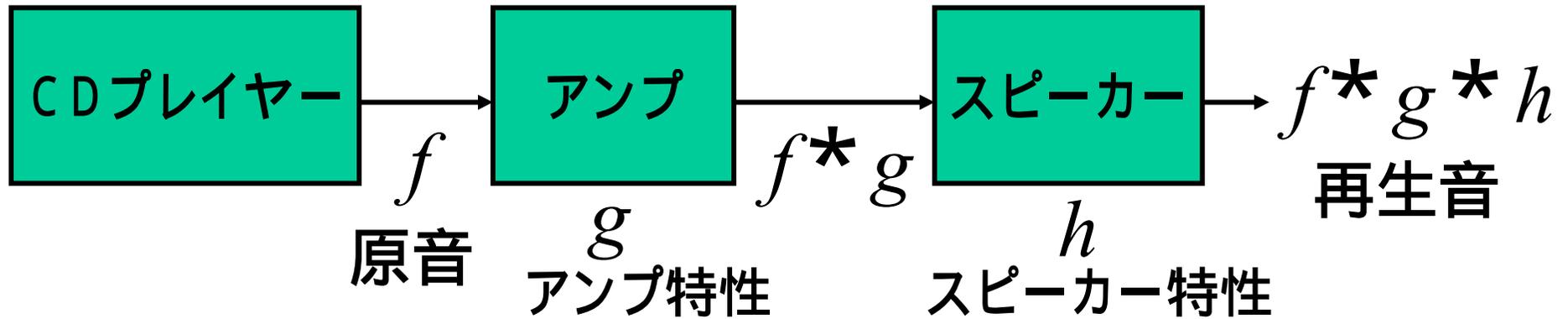


# たたみこみ積分(Convolution)

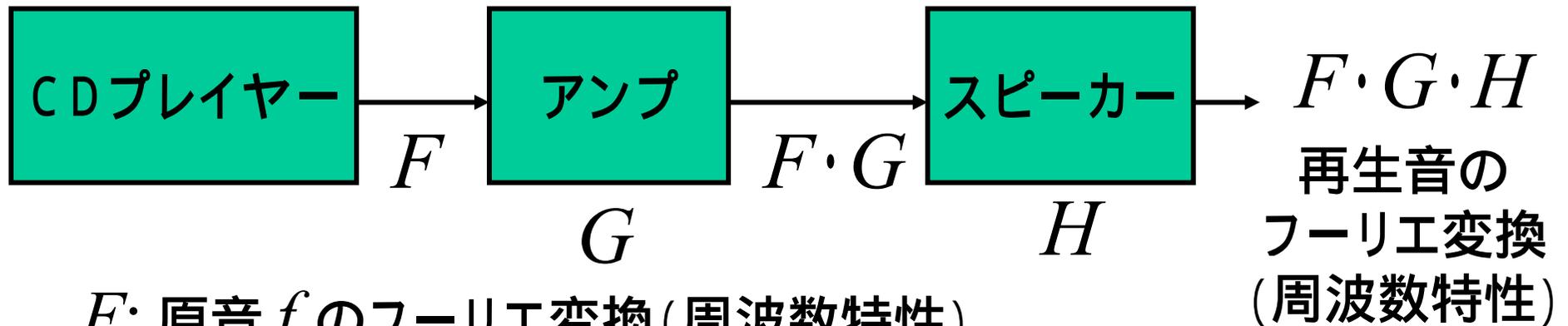
## 重要事項 その2

- 多くの音響システムや画像システムなどが、たたみこみ積分として数学的にモデル化できる。
- 時間・空間領域におけるたたみ込み積分は、周波数領域(フーリエ変換後)では、掛け算になる。

# 音響システムの例



\* は「たたみ込み積分」を表す。

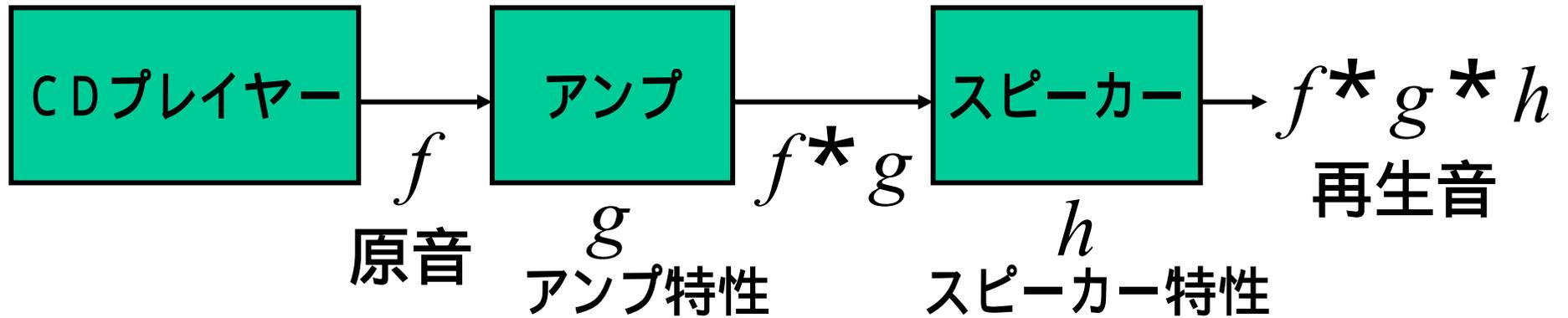


$F$ : 原音  $f$  のフーリエ変換 (周波数特性)

$G$ : アンプ特性  $g$  のフーリエ変換 (周波数特性)

$H$ : スピーカー特性  $h$  のフーリエ変換 (周波数特性)

# 理想的な音響システムの特徴は？



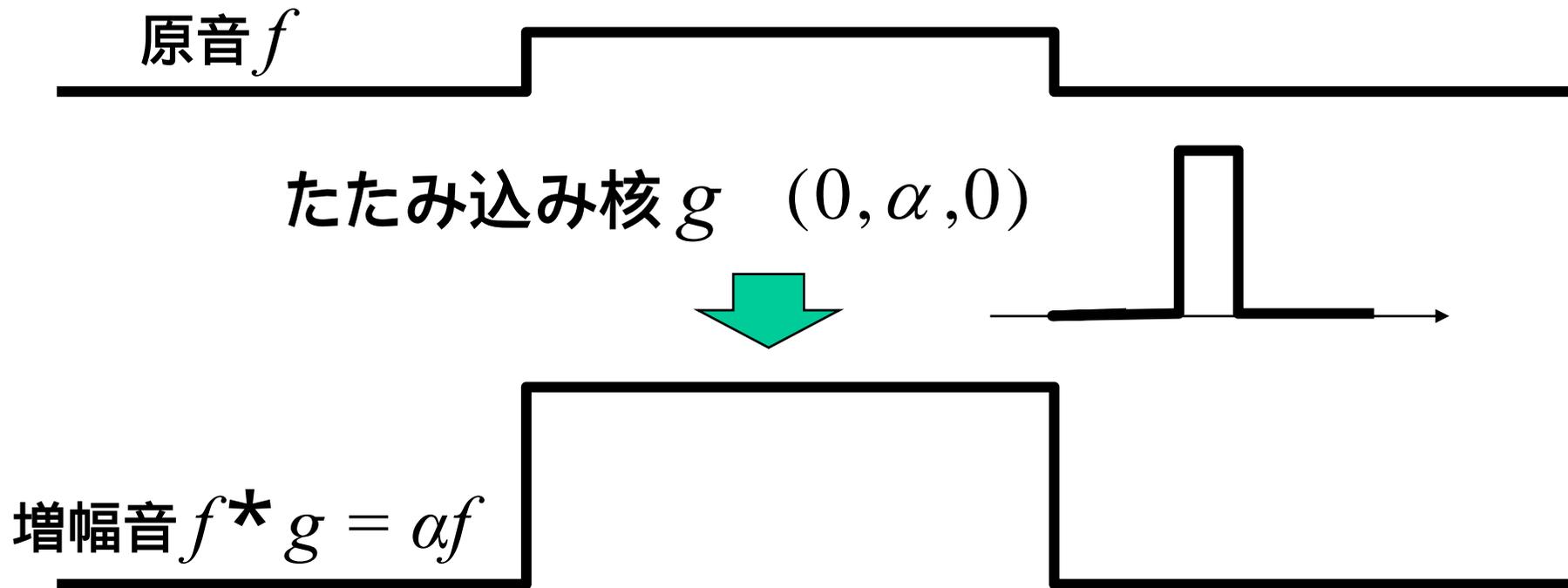
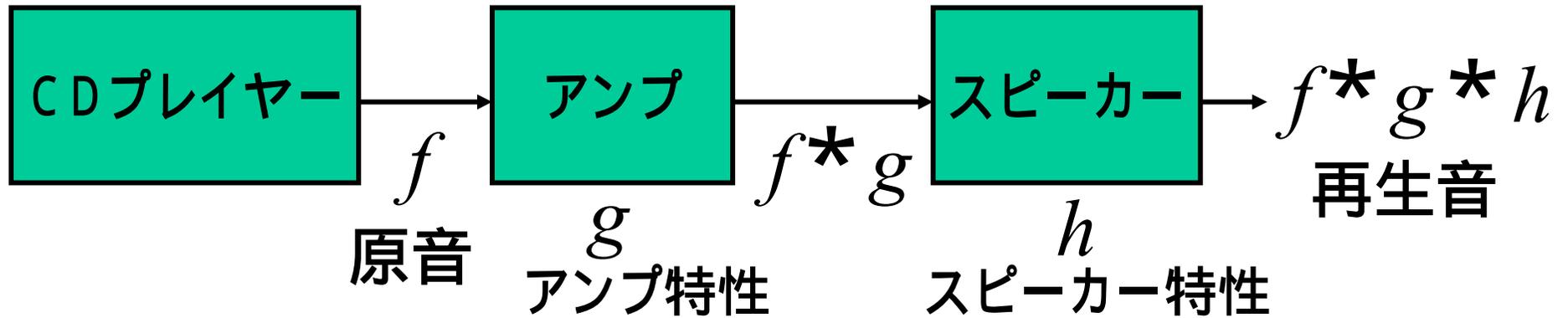
原音  $f$

たたみ込み核  $g$



増幅音  $f^* g = \alpha f$

# 理想的な音響システムの特徴は？



# 演習問題：Mathematicaによる「たたみ込み積分」

- 授業ホームページ ([www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/](http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/) 日本語ページの「授業の資料」) の、以下のデジタル信号データファイルをダウンロードせよ。
  - 信号データ (生成データ雑音なし)

- 以上をグラフとしてプロットせよ。

```
data = ReadList["d:/presen/oecu_game_lecture/bar_data0.txt", {Number, Number}];  
ListPlot[data, PlotJoined -> True];
```

マックでは、おそらく、/Users/w学籍番号/Desktop/...../bar\_data0.txt  
プルダウンメニュー 入力 -> ファイルパスの取得  
Terminal にフォルダをおく

- フーリエ変換をして、結果をグラフとしてプロットせよ。(以下では、データには、xlist という名前がつけられている。)

```
trdata = Transpose[data];  
xlist = trdata[[2]];  
ft = Fourier[xlist];  
ListPlot[Abs[ft], PlotRange -> {{1, 128}, {0, 200}}, PlotJoined -> True];
```

## 演習問題：Mathematicaによる「たたみ込み積分」

- **たたみ込み核  $\{-1, 0, 1\}$  を用いて、たたみ込み積分をせよ。(すなわち、微分処理せよ。)**

```
ListPlot[ListConvolve[{-1, 0, 1}, xlist], PlotRange -> All, PlotJoined -> True];
```

- **たたみ込み核  $\{1/13, 3/13, 5/13, 3/13, 1/13\}$  を用いて、たたみ込み積分して(平滑化して)、結果をプロットをせよ。(平滑化されたデータには、xlist1 という名前がつけられている。)**

```
xlist1 = ListConvolve[{1/13, 3/13, 5/13, 3/13, 1/13}, xlist];
```

```
ListPlot[xlist1, PlotJoined -> True];
```

- **上のたたみ込み積分(平滑化)を何度も繰り返せ。**

```
xlist1 = ListConvolve[{1/13, 3/13, 5/13, 3/13, 1/13}, xlist1];
```

```
ListPlot[xlist1, PlotJoined -> True];
```

- **何度も平滑化した結果に、フーリエ変換と微分処理を行え。**

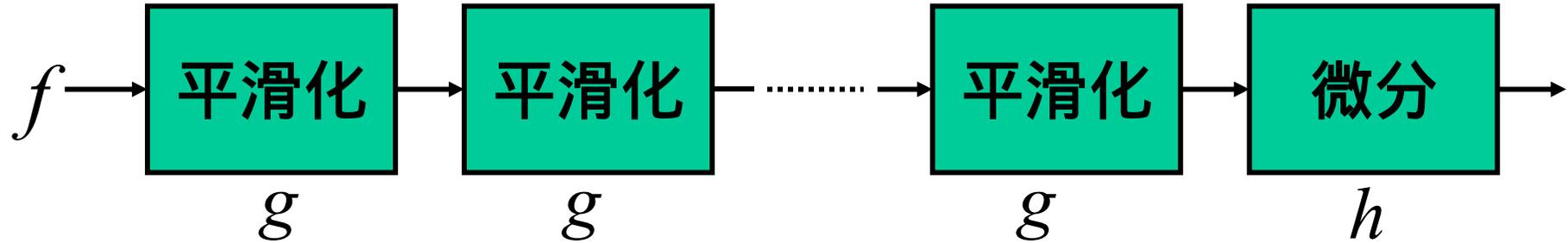
```
ListPlot[Abs[Fourier[xlist1]], PlotRange -> {{1, 128}, {0, 200}}, PlotJoined -> True]
```

```
ListPlot[ListConvolve[{-1, 0, 1}, xlist1], PlotRange -> All, PlotJoined -> True];
```

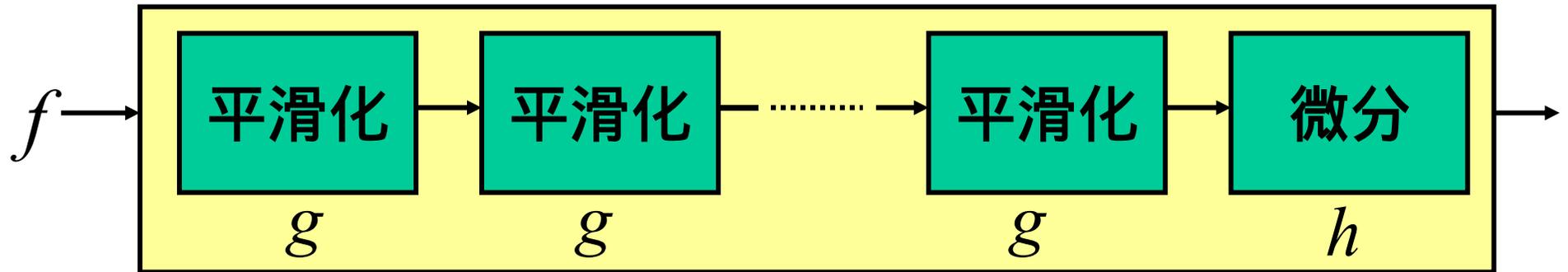
# 演習問題：Mathematicaによる「たたみ込み積分」

- 授業ホームページ ([www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/](http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/) の授業ページ) の、以下のデジタル信号データファイルをダウンロードせよ。
  - 信号データ(生成データ 雑音あり)
  - 信号データ(生成データ 5倍雑音)
  - 信号データ(生成データ 10倍雑音)
- さきほどと同様の処理を行え。
- 雑音なし、雑音あり、5倍雑音、10倍雑音のそれぞれに対して、以下について、論ぜよ。
  - 微分処理の結果
  - 平滑化処理の結果
  - 平滑化処理後の微分処理の結果
  - 平滑化前後でのフーリエ変換の結果の変化
- 以上の処理を式を用いて表現せよ。

# 平滑化と微分処理



$$\begin{aligned} & f * g * g * \dots * g * g * h \\ &= f * (g * g * \dots * g * g) * h \\ &= f * ((g * g * \dots * g * g) * h) \end{aligned}$$



$$((g * g * \dots * g * g) * h)$$