マルチメディア工学

マルチメディアデータの解析
データ表現：主成分分析

佐藤 嘉伸

大阪大学　大学院医学系研究科
放射線統合医学講座
yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp
http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

講義ホームページ: 日本語ページ → 授業の資料 → マルチメディア工学

マルチメディア工学：講義計画

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: **CG**)
- マルチメディアデータの解析

マルチメディア工学：講義計画

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: **CG**)
- **マルチメディアデータの解析**
  - **基礎数理**
  - **代表的解析手法**
    - データ圧縮：離散コサイン変換・JPEG
    - データ表現：主成分分析
    - （データ認識：隠れマルコフモデル）
    - （データ認識：独立成分分析）

マルチメディアデータの解析

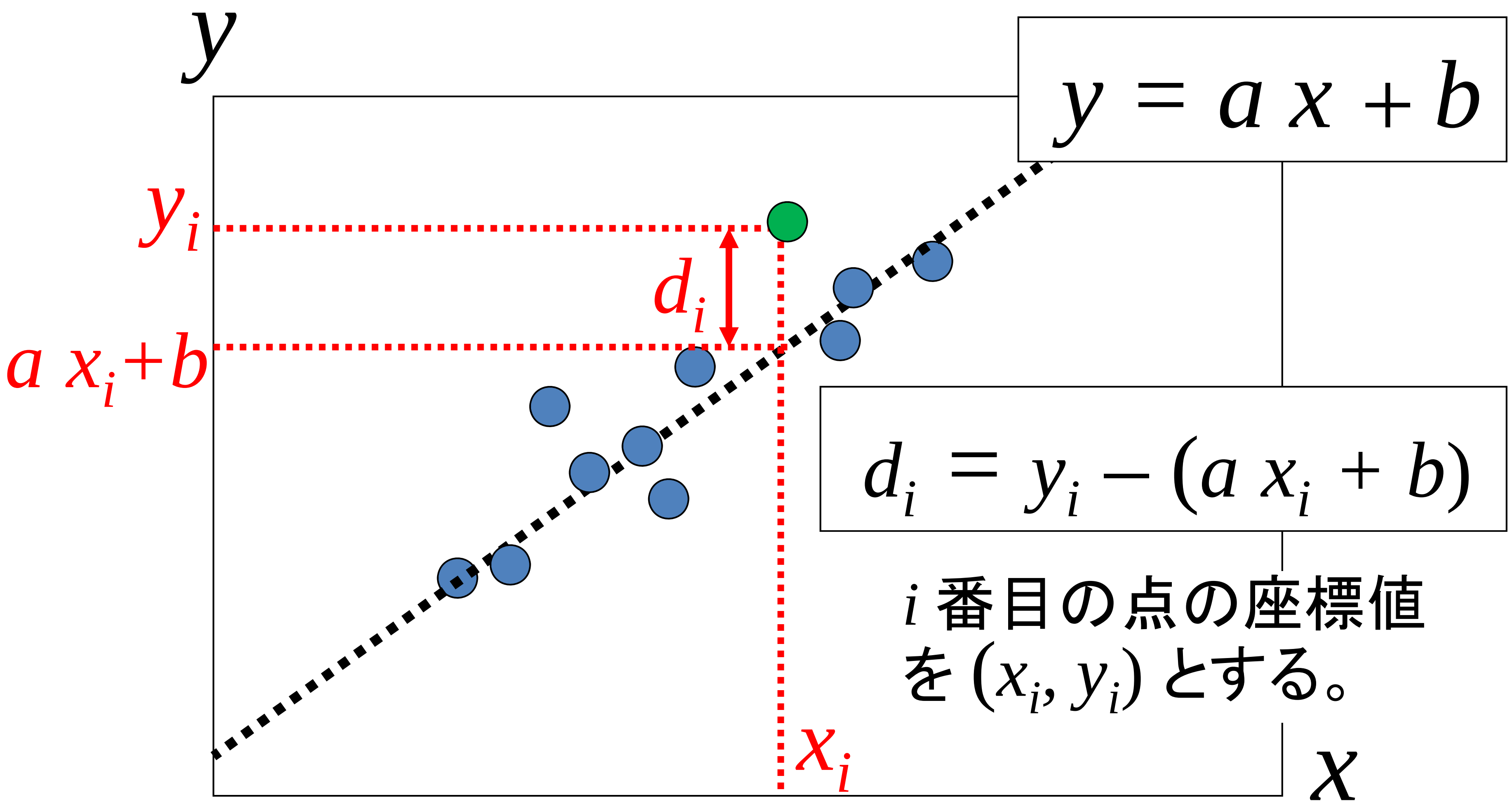
- 基礎数理
  - 最小二乗法
  - 直交変換、直交関数展開
- 代表的解析手法
  - データ圧縮：離散コサイン変換・JPEG
  - データ表現：主成分分析
  - （データ認識：隠れマルコフモデル）
    - 音声・言語を含む時系列データに対して有効
  - （データ認識：独立成分分析）
    - 音声信号の分離に対して有効

データ表現:主成分分析

- 主成分分析 (Principal Component Analysis: PCA)
  - 直線当てはめ:再検討
  - 直交変換:再検討
  - 主成分分析の定式化
- マルチメディアデータの主成分分析
  - 正規化
  - 実例(肝臓3次元形状)

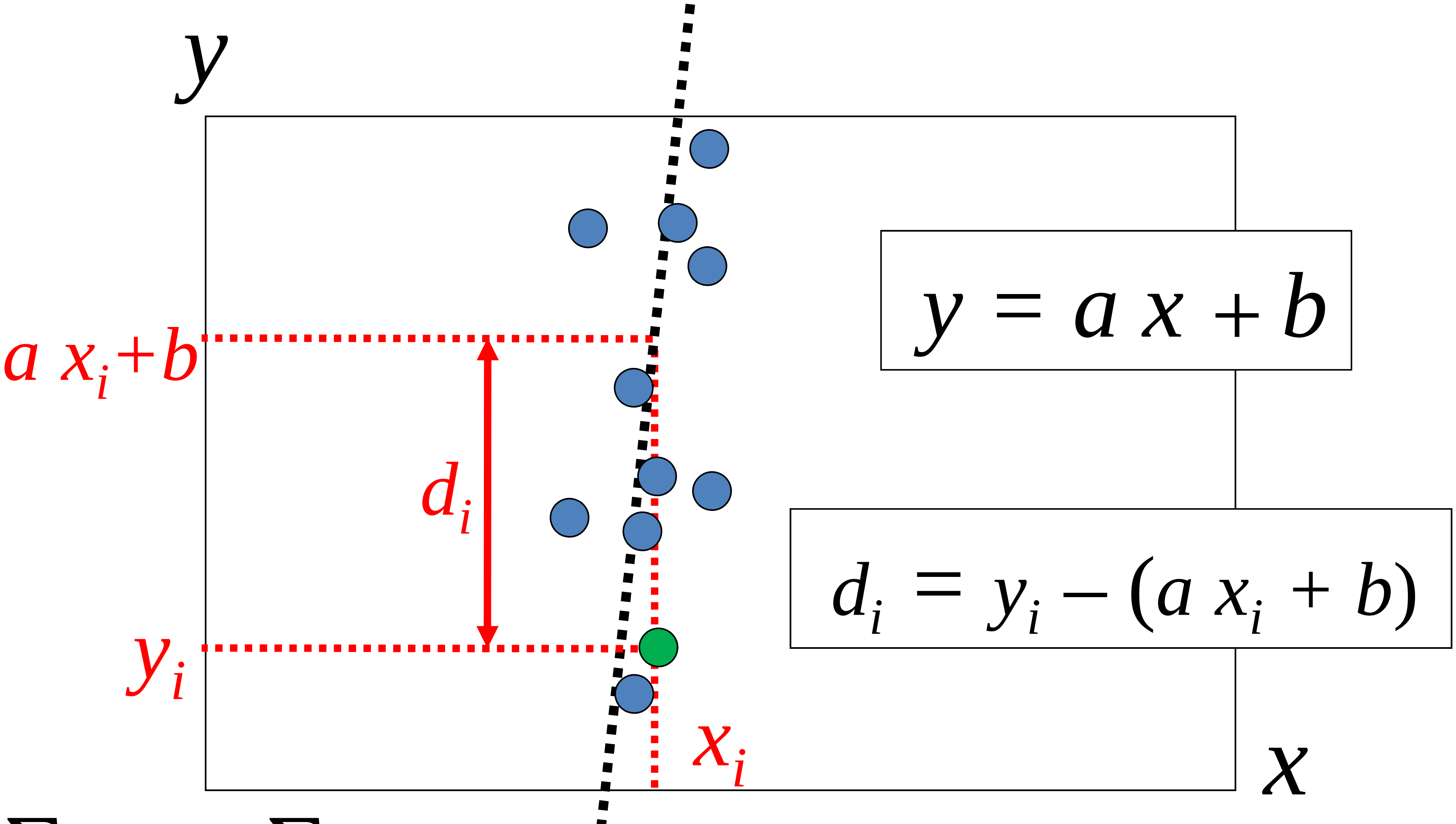
直線当てはめ
再検討

最小二乗基準



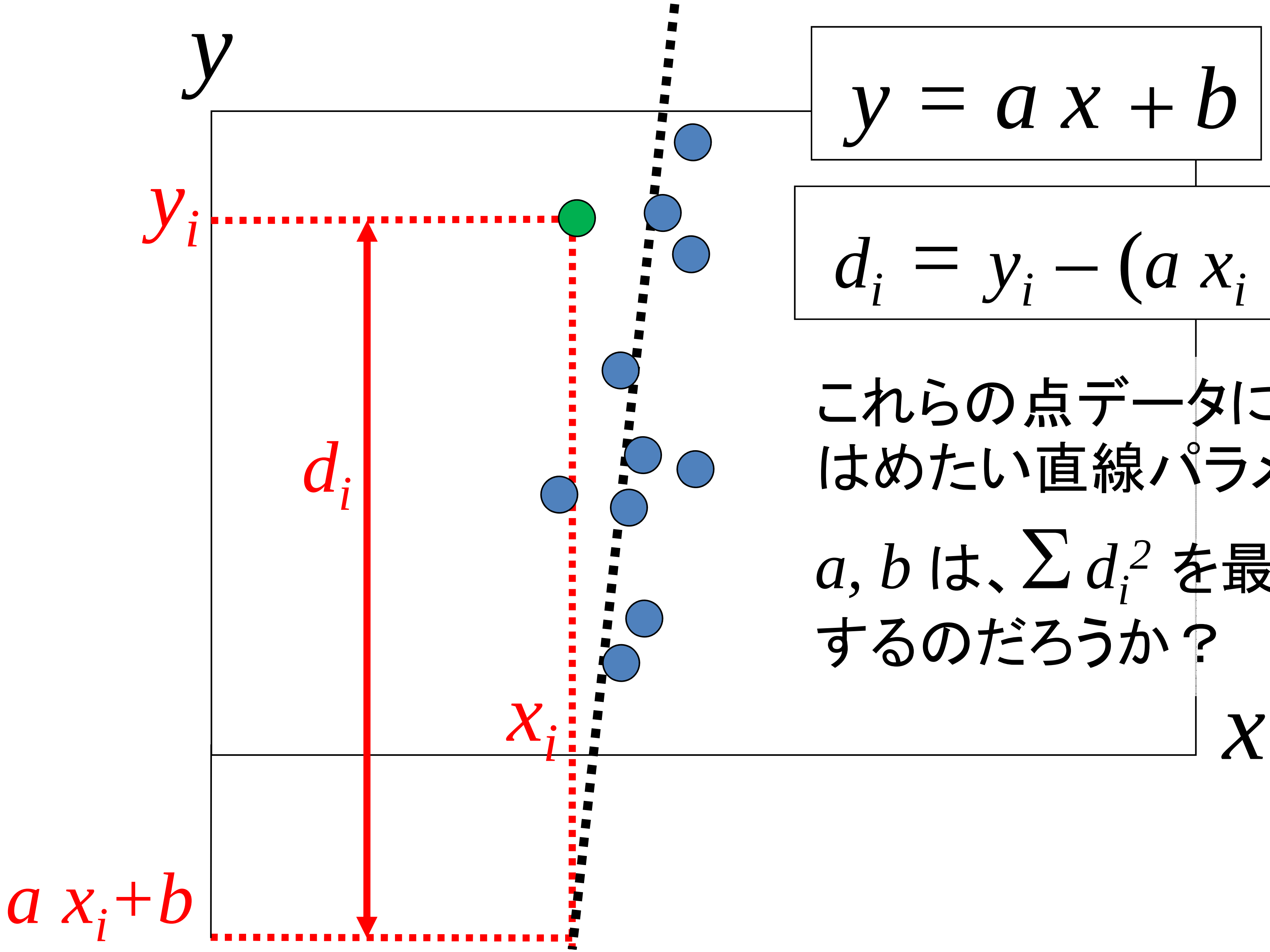
$\sum d_i^2 = \sum\{y_i - (a\,x_i + b)\}^2$ を最小にする a, b を求める。

最小二乗基準



$\sum d_i^2 = \sum\{y_i - (a\,x_i + b)\}^2$ を最小にする a, b を求める。

最小二乗基準



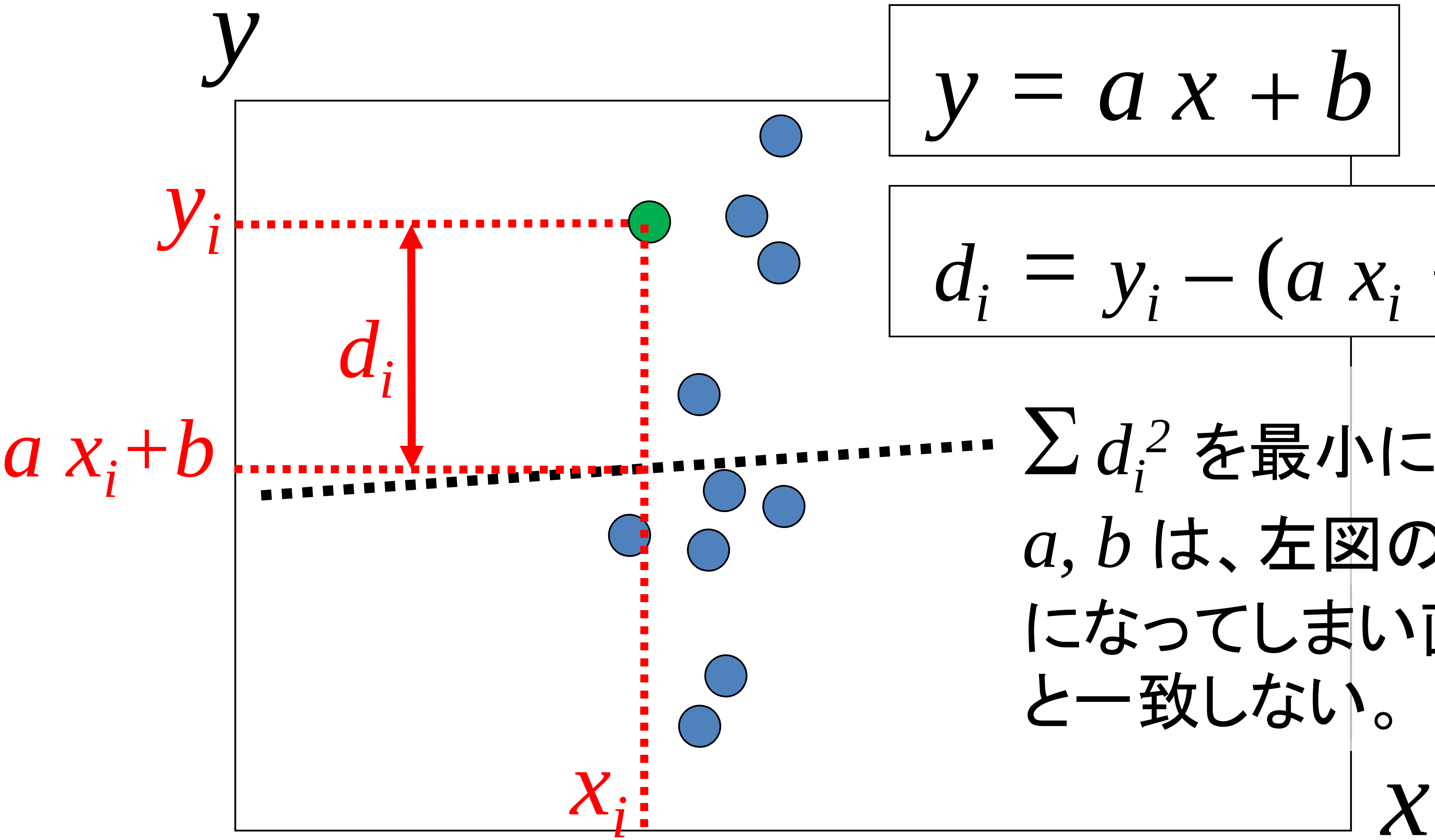
$$y = a\,x + b$$

$$d_i = y_i - (a\,x_i + b)$$

これらの点データに当てはめたい直線パラメータ

a, b は、$\sum d_i^2$ を最小にするのだろうか？

最小二乗基準



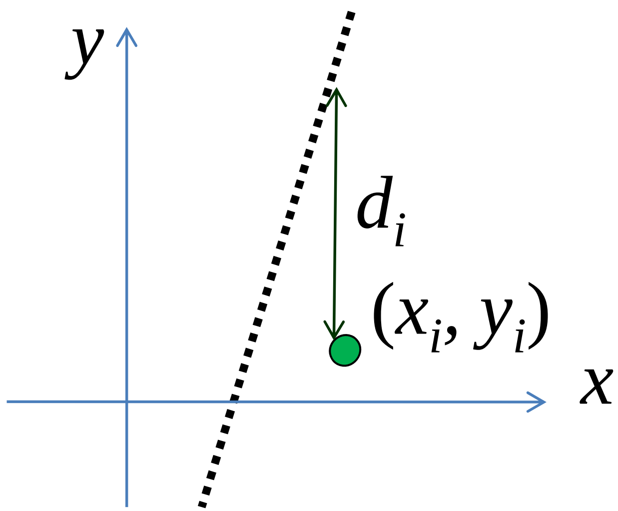
$$y = a\,x + b$$

$$d_i = y_i - (a\,x_i + b)$$

$\sum d_i^2$ を最小にする a, b は、左図のようになってしまい直観と一致しない。

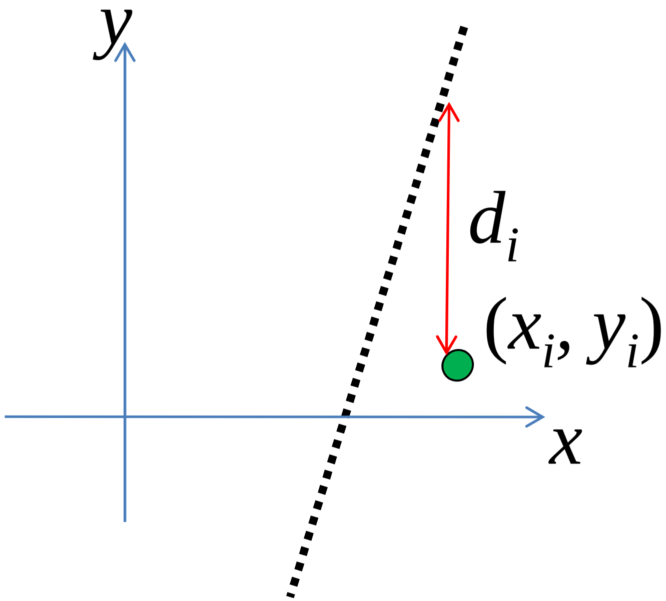
最小二乗法による直線当てはめの問題点とその解決

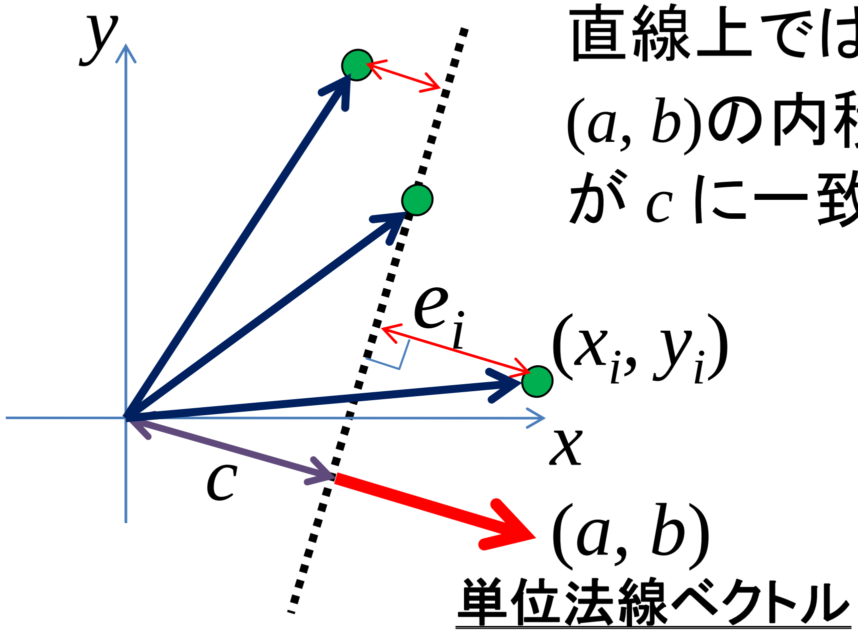
- 問題点
  - 「x_i における計測値 y_i が $y = a\,x_i + b$ という真の値に、ガウス分布に従う誤差 d_i が付加されたものである」という仮定に従うのではない場合、特に、傾きが大きな場合において、直観的に妥当と思われる直線当てはめが得られない。



最小二乗法による直線当てはめの問題点とその解決

- 解決策
  - **<u>直線の表現と誤差</u>**について**<u>座標系に依存しない定義</u>**を用いる。





直線上では、(x_i, y_i) と (a, b)の内積 $a\,x_i+b\,y_i$ が c に一致

<u>直線の式</u>

$$y = a\,x + b$$

<u>誤差の式</u>

$$d_i = y_i - (a\,x_i + b)$$

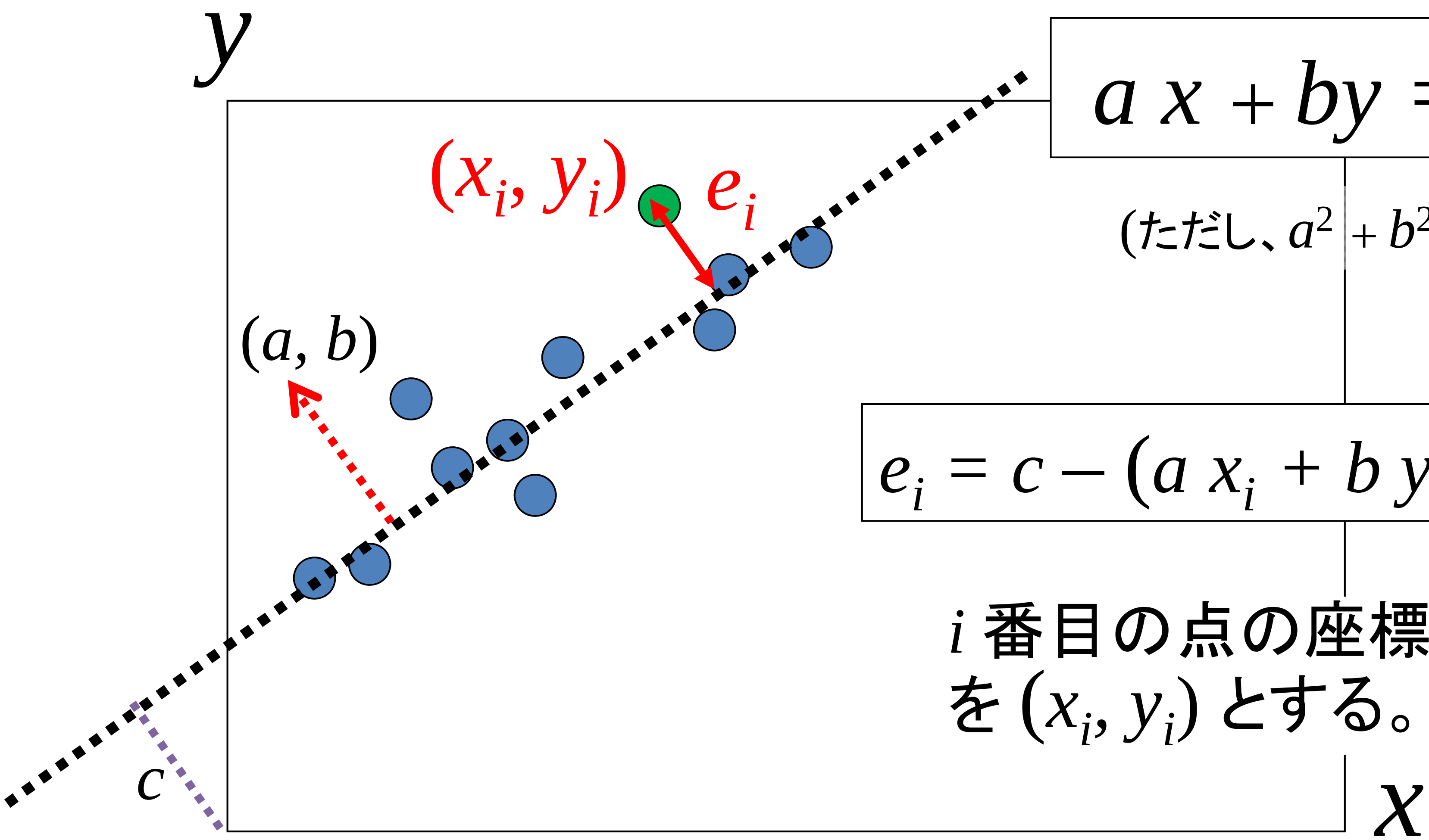
<u>直線の式</u>

$$a\,x + by = c \quad (\text{ただし、}a^2 + b^2 = 1)$$

<u>誤差の式（直線の法線方向への距離）</u>

$$e_i = c - (a\,x_i + b\,y_i)$$

最小二乗基準：再検討



$$a\,x + by = c$$

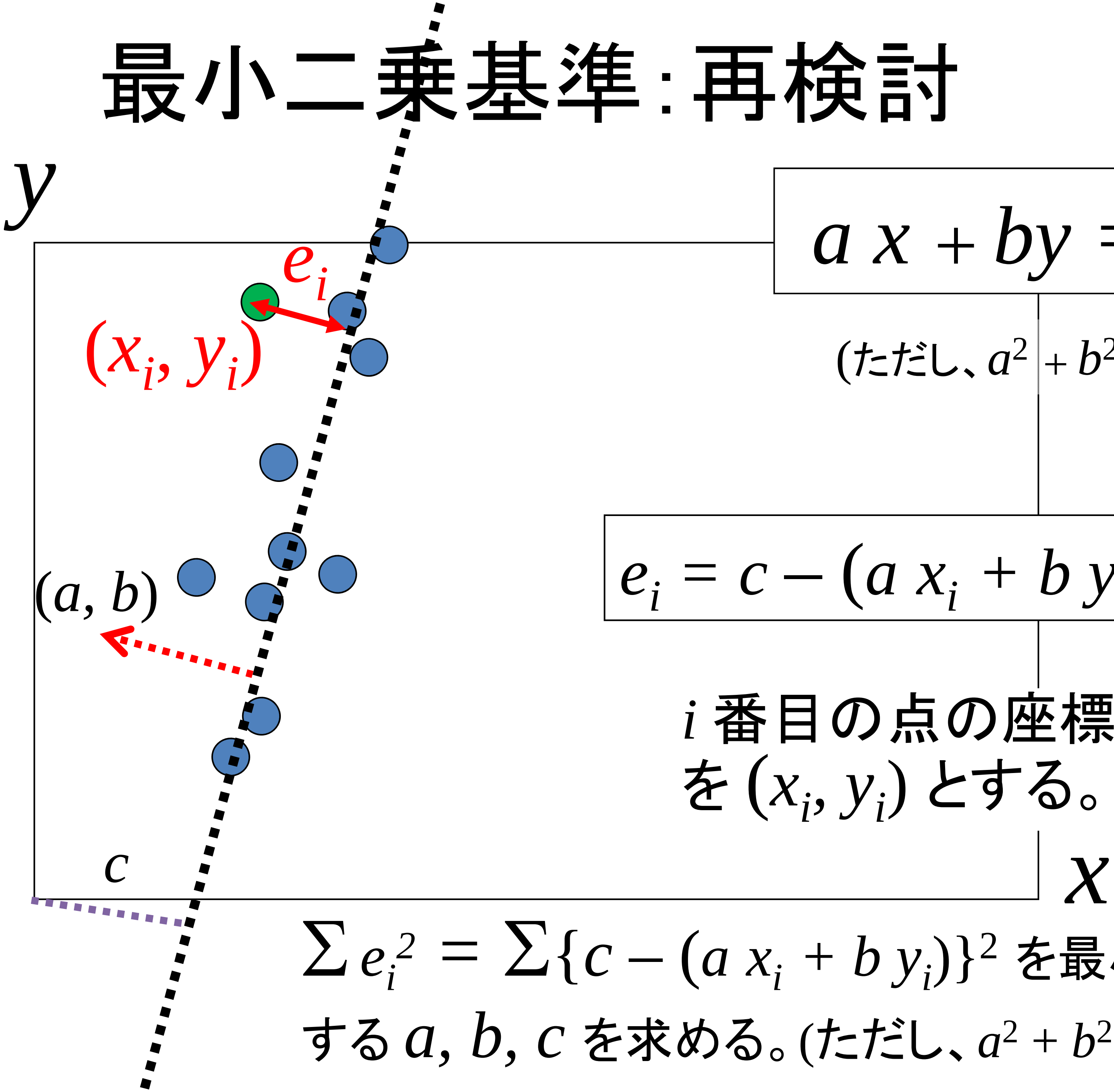
(ただし、$a^2 + b^2 = 1$)

$$e_i = c - (a\,x_i + b\,y_i)$$

i 番目の点の座標値を (x_i, y_i) とする。

$\sum e_i^2 = \sum \{c - (a\,x_i + b\,y_i)\}^2$ を最小にする a, b, c を求める。(ただし、$a^2 + b^2 = 1$)

最小二乗基準：再検討



$$a\,x + by = c$$

(ただし、$a^2 + b^2 = 1$)

$$e_i = c - (a\,x_i + b\,y_i)$$

i 番目の点の座標値を (x_i, y_i) とする。

$\sum e_i^2 = \sum\{c - (a\,x_i + b\,y_i)\}^2$ を最小にする a, b, c を求める。(ただし、$a^2 + b^2 = 1$)

最小二乗基準：再検討

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{c-(ax_i+by_i)\}^2$$ を最小にする a, b, c

を求める。（ただし、$a^2 + b^2 = 1$ ）

$$F(a,b,c) = \frac{1}{n}\sum\{c-(a\,x_i + b\,y_i)\}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum\{a^2x_i^2 + b^2y_i^2 + c^2 + 2abx_iy_i - 2acx_i - 2bcy_i\}$$

$$= \frac{1}{n}\{a^2\Sigma x_i^2 + b^2\Sigma y_i^2 + nc^2 + 2ab\Sigma x_iy_i - 2ac\Sigma x_i - 2bc\Sigma y_i\}$$

$$= \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + nc^2 + 2s_{xy}ab - 2s_xac - 2s_ybc\}$$

$(s_{xx} = \Sigma x_i^2,\ s_{yy} = \Sigma y_i^2,\ s_{yy} = \Sigma x_iy_i,\ s_x = \Sigma x_i,\ s_y = \Sigma y_i\ ,\ n = \Sigma 1)$

$$G(a,b,c) = a^2 + b^2 - 1$$

問題: $G(a,b,c) = 0$ という条件で

$F(a,b,c)$ を最小にする a, b, c を求める。

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題: $G(a,b,c) = 0$ という条件の下で、$F(a,b,c)$ を最小にするa, b, cを求める。

↓

制約条件無し最小化問題:
$F(a,b,c) - \lambda\, G(a,b,c)$ を最小にするa, b, cを求める。

↓

最小化条件: $F(a,b,c) - \lambda\, G(a,b,c)$ の a, b, c での偏微分が0

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a} - \lambda \frac{\partial G}{\partial a},\quad \frac{\partial F}{\partial b} - \lambda \frac{\partial G}{\partial b},\quad \frac{\partial F}{\partial c} - \lambda \frac{\partial G}{\partial c} \right) = (0,0,0)$$

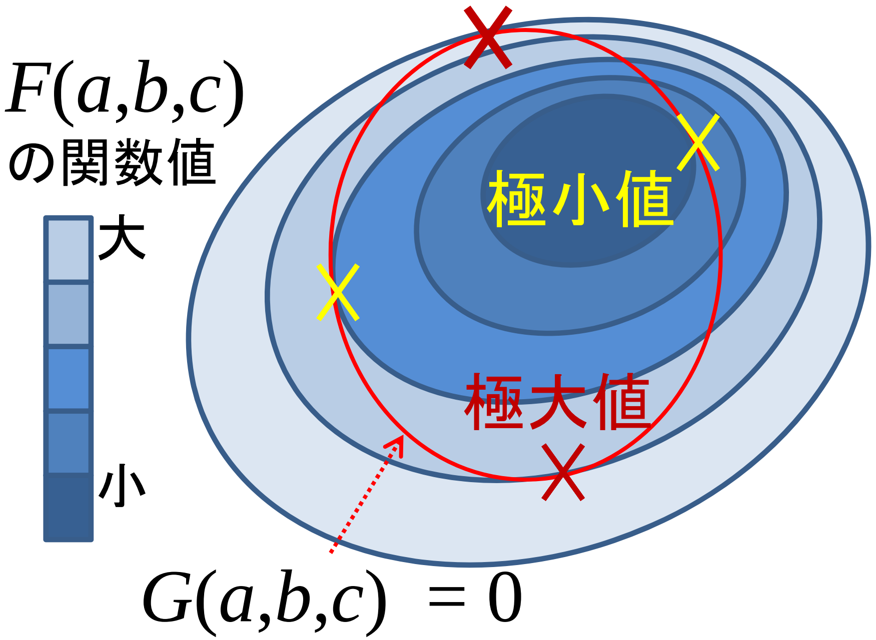
$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c} \right) = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial b}, \frac{\partial G}{\partial c} \right)$$

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題: $G(a,b,c) = 0$ という条件の下で、$F(a,b,c)$ を最小にするa, b, cを求める。

最小化条件: $$\left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c}\right) = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial b}, \frac{\partial G}{\partial c}\right)$$

（$F(a,b,c)$ の勾配ベクトルと$G(a,b,c)$の勾配ベクトルが平行）



勾配ベクトルは、等値線に垂直

$G(a,b,c) = 0$ は、その上で$F(a,b,c)$ の極値をとるとき、$F(a,b,c)$ の等値線と接する。

すなわち、極値をとるとき、$G(a,b,c)$ と $F(a,b,c)$ の勾配ベクトルは平行

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

制約条件　$G(a,b,c) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

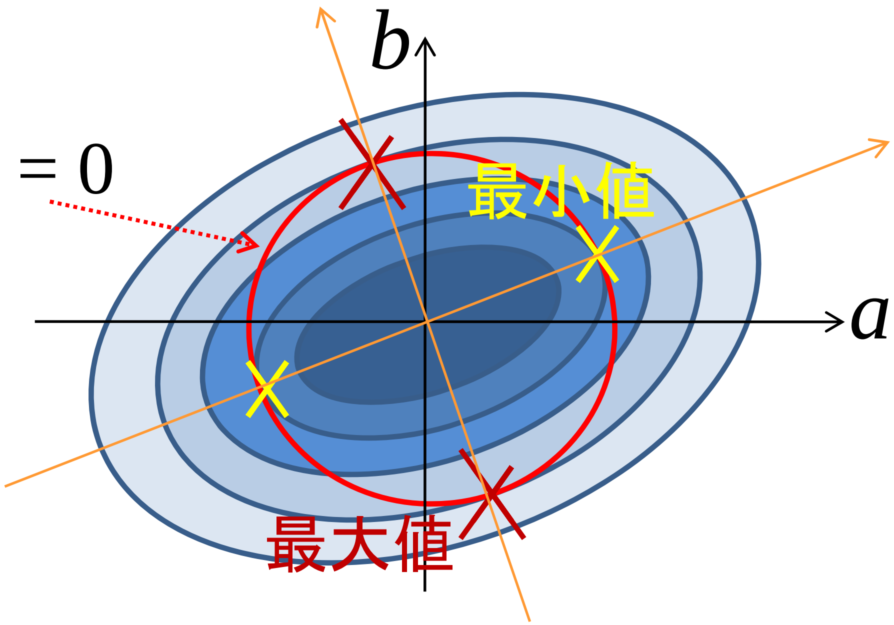
コスト関数　$F(a,b,c) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + nc^2 + 2s_{xy}ab - 2s_x ac - 2s_y bc\}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c}\right) = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial b}, \frac{\partial G}{\partial c}\right)$$

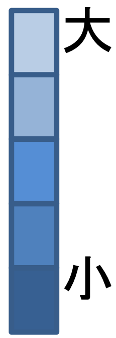
制約条件

$G(a,b,c) = 0$

$a^2 + b^2 - 1 = 0$



コスト関数 $F(a,b,c)$ の関数値



制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

制約条件　$G(a,b,c) = a^2+b^2-1 = 0$

コスト関数　$F(a,b,c) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2+s_{yy}b^2+nc^2+2s_{xy}ab-2s_x ac-2s_y bc\}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a},\frac{\partial F}{\partial b},\frac{\partial F}{\partial c}\right)=\lambda\left(\frac{\partial G}{\partial a},\frac{\partial G}{\partial b},\frac{\partial G}{\partial c}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}=\lambda\frac{\partial G}{\partial a},\quad \frac{\partial F}{\partial b}=\lambda\frac{\partial G}{\partial b},\quad \frac{\partial F}{\partial c}=\lambda\frac{\partial G}{\partial c}$$

３条件の偏微分計算

$$\frac{1}{n}s_{xx}a+s_{xy}b-s_x c=\lambda a$$

$$\frac{1}{n}s_{xy}a+s_{yy}b-s_y c=\lambda b$$

$$\boxed{nc-s_x a-s_y b=0}$$

$s_{xx}=\Sigma x_i^2,\ s_{yy}=\Sigma y_i^2$

$$a\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}+b\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right\}=c$$

$$a\bar{x}+b\bar{y}=c$$

直線は、点$(\bar{x},\bar{y})$を通る！

点群の重心

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

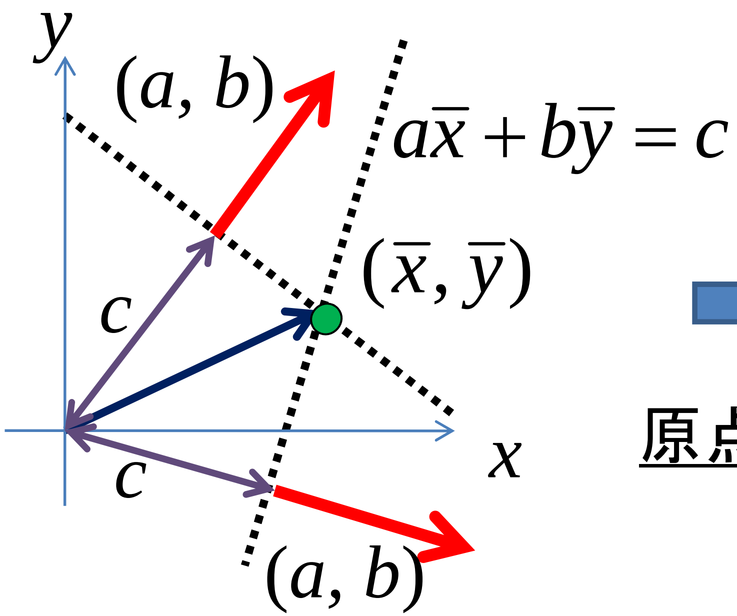
制約条件 $G(a,b,c) = a^2+b^2-1 = 0$

コスト関数 $F(a,b,c) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2+s_{yy}b^2+nc^2+2s_{xy}ab-2s_x ac-2s_y bc\}$

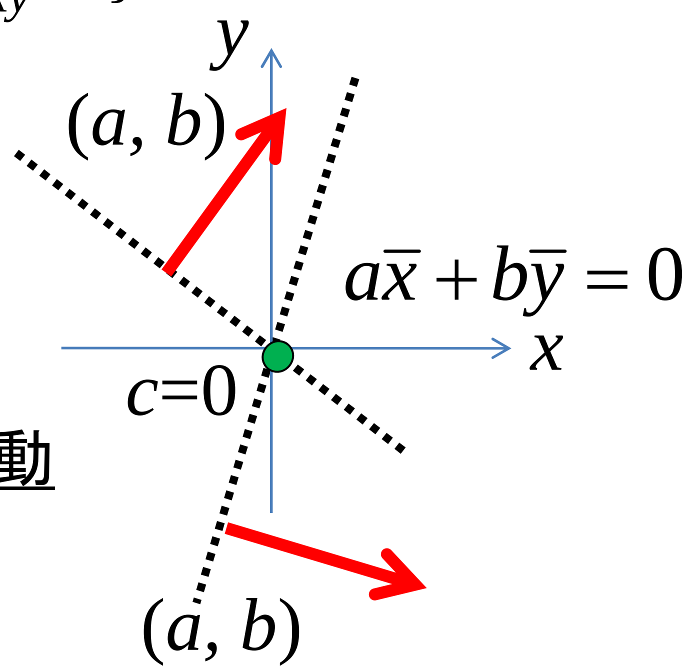
<u>原点を重心に移動させても議論の本質は同じ</u>

$c = 0$

$$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2+s_{yy}b^2+2s_{xy}ab\}$$



<u>原点を重心に移動</u>



制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

制約条件　$G(a,b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

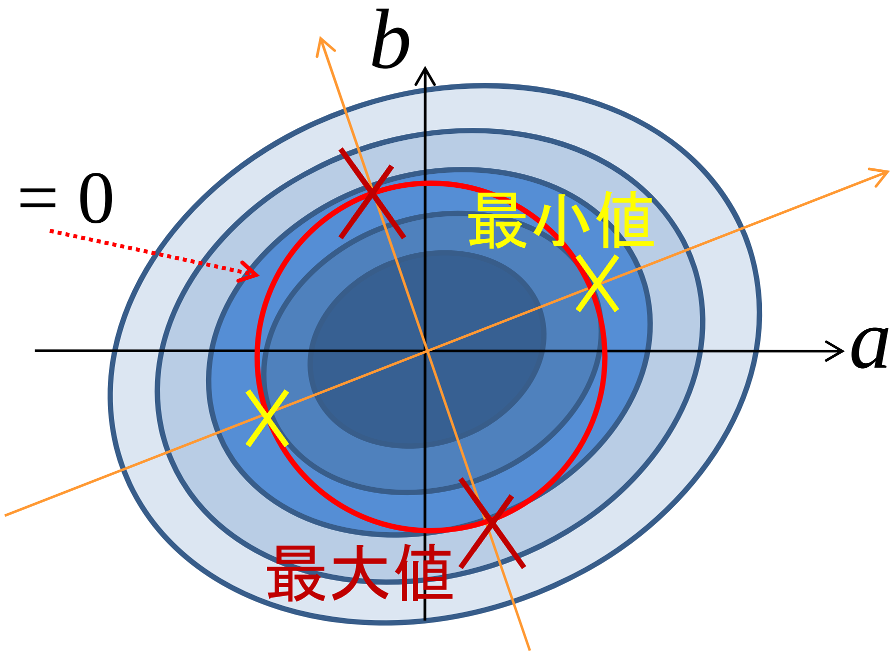
コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}\right) = \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial b}\right) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial a} = \lambda\frac{\partial G}{\partial a}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = \lambda\frac{\partial G}{\partial b}$$

制約条件

$G(a,b,c) = 0$

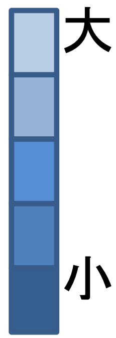
$a^2 + b^2 - 1 = 0$



コスト関数

$F(a,b,c)$

の関数値



制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

制約条件　$G(a,b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}\right) = \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial a}, \frac{\partial G}{\partial b}\right) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial a} = \lambda\frac{\partial G}{\partial a},\quad \frac{\partial F}{\partial b} = \lambda\frac{\partial G}{\partial b}$$

偏微分計算

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\left(s_{xx}a + s_{xy}b\right) = \lambda a \\ \frac{1}{n}\left(s_{xy}a + s_{yy}b\right) = \lambda b \end{cases}$$

行列表記

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{xy} & s_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$s_{xx} = \Sigma x_i^2,\ s_{yy} = \Sigma y_i^2,\ s_{yy} = \Sigma x_i y_i^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum x_i^2 & \frac{1}{n}\sum x_i y_i \\ \frac{1}{n}\sum x_i y_i & \frac{1}{n}\sum y_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

共分散行列

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

制約条件　$G(a,b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$C\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

$$(C - \lambda I)\mathbf{a} = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

直線の単位法線ベクトル $\mathbf{a} = (a,b)$ を求める問題は、共分散行列 C の固有ベクトル $\mathbf{a}$ を求める問題に帰着される。

（共分散行列は対称行列。対称行列の固有ベクトルは直交。）

制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

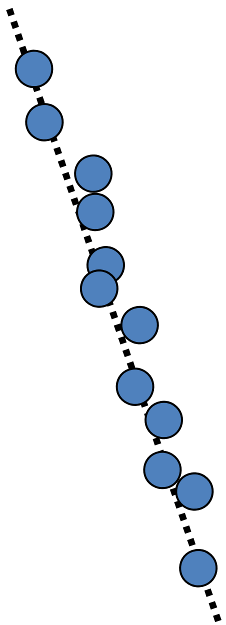
制約条件　$G(a,b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

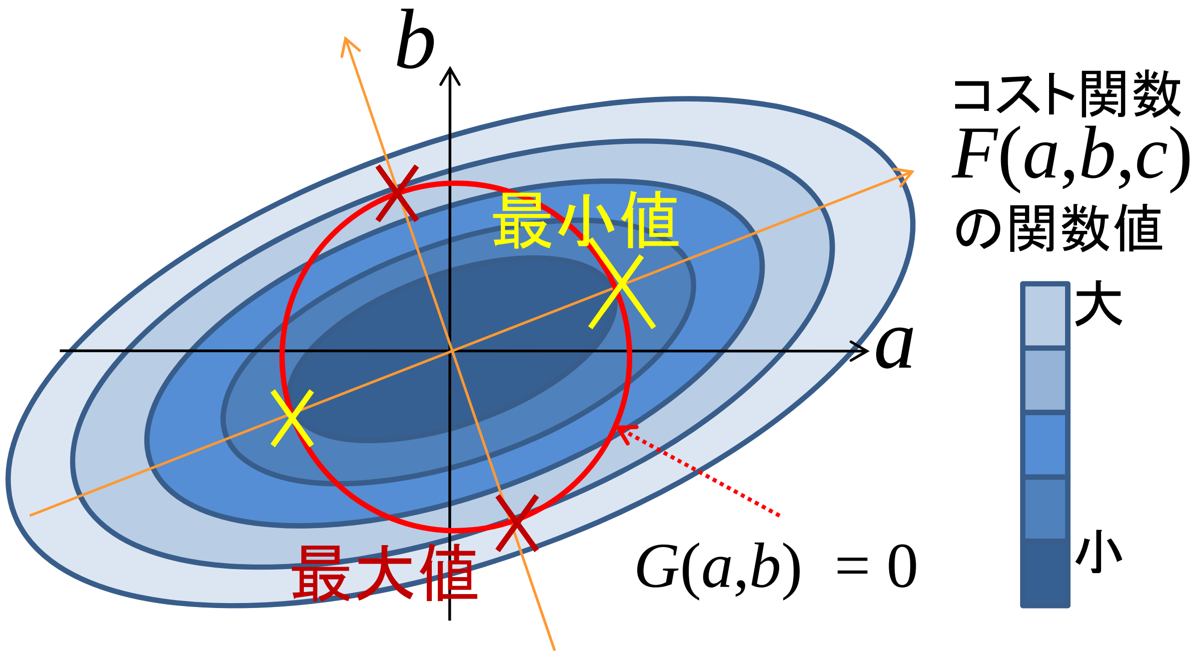
コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$C\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$

$$(C - \lambda I)\mathbf{a} = 0$$

共分散行列 $C = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$





制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

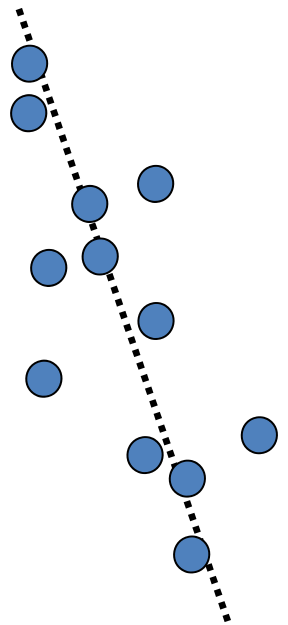
制約条件　$G(a,b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$

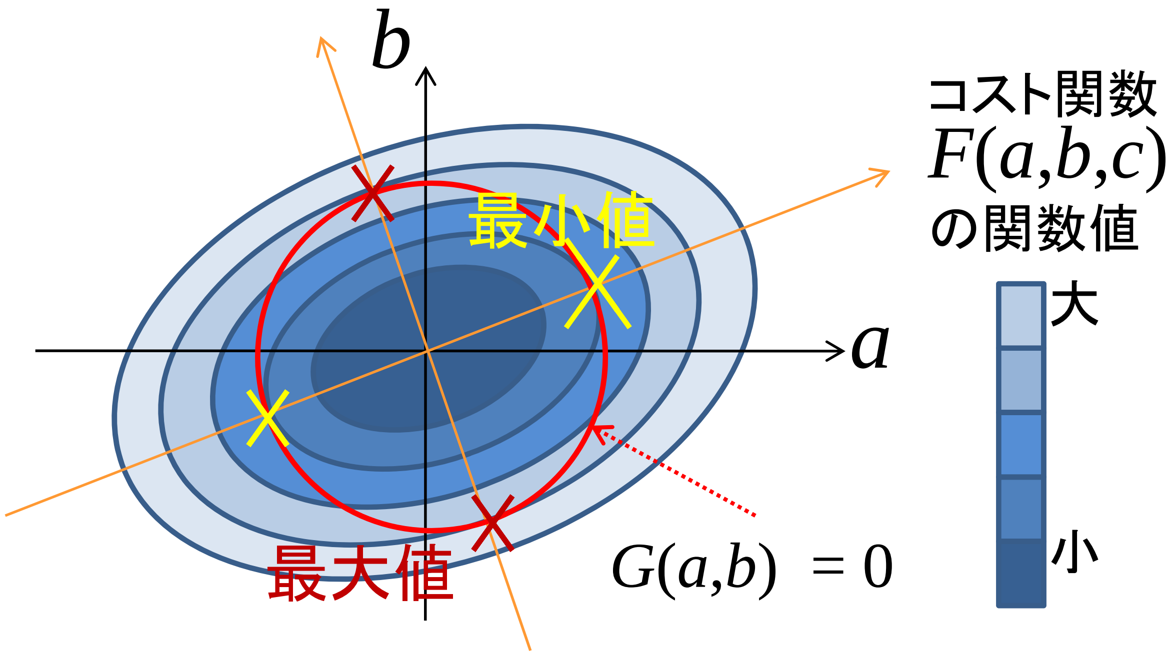
コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$C\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

$$(C - \lambda I)\mathbf{a} = 0$$

共分散行列 $C = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$





制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

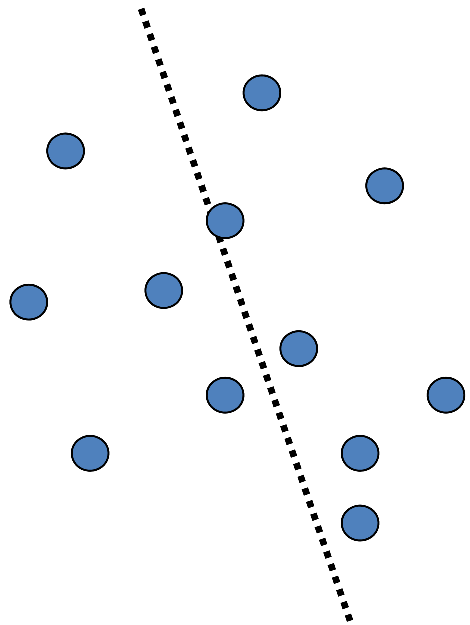
制約条件　$G(a,b) \;=a^2+b^2-1=0$

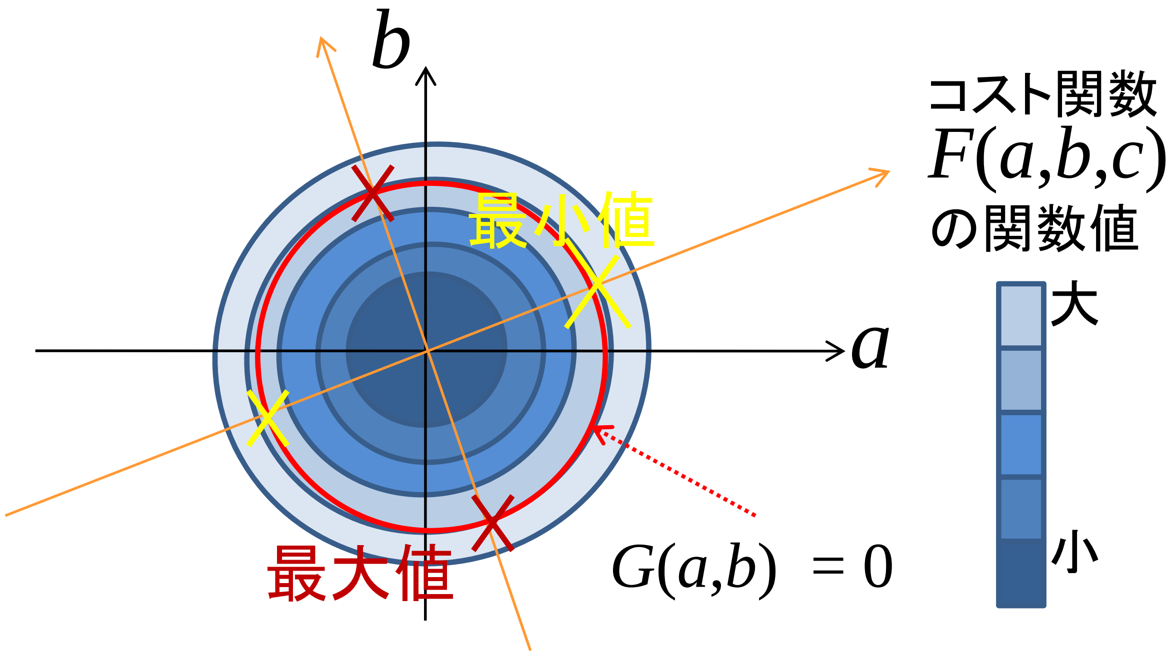
コスト関数　$F(a,b)=\frac{1}{n}\{s_{xx}a^2+s_{yy}b^2+2s_{xy}ab\}$

$$C\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}$$

$$(C-\lambda I)\mathbf{a}=0$$

共分散行列 $C=\begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy}\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$





制約条件付き最小化問題
ラグランジュ未定乗数法

制約条件付き最小化問題:

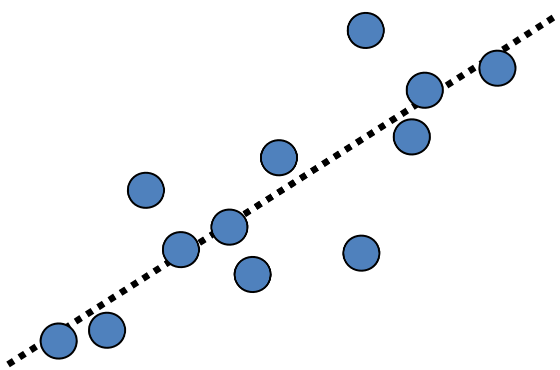
制約条件　$G(a,b)\ = a^2 + b^2 - 1 = 0$

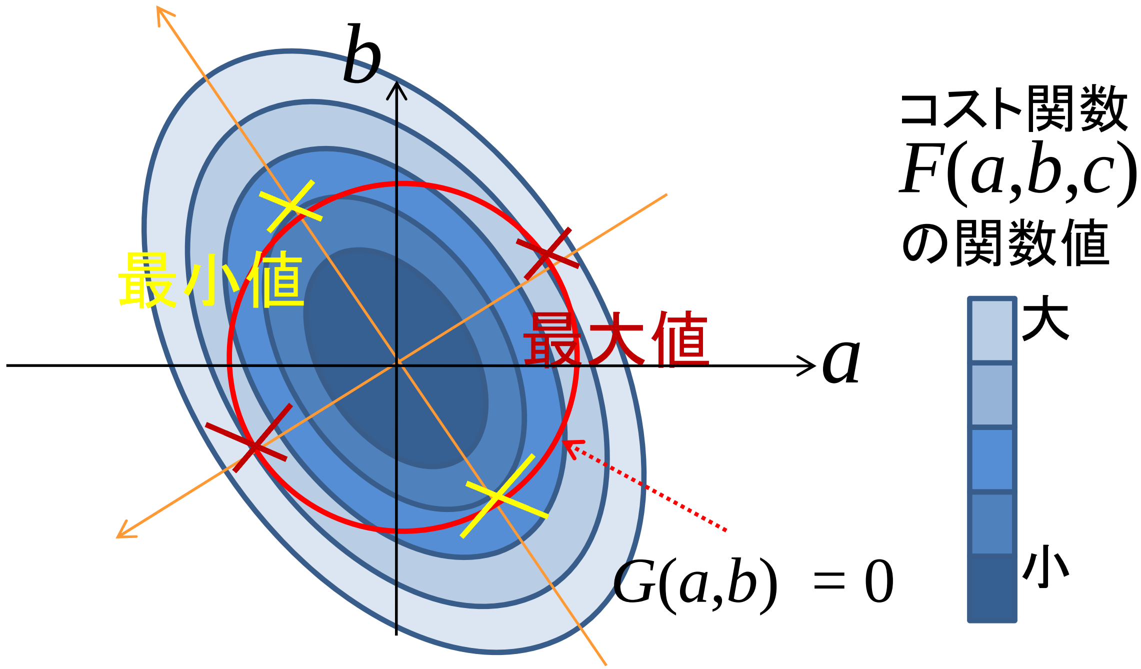
コスト関数　$F(a,b) = \frac{1}{n}\{s_{xx}a^2 + s_{yy}b^2 + 2s_{xy}ab\}$

$$C\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

$$(C - \lambda I)\mathbf{a} = 0$$

共分散行列 $C = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$





直線当てはめ：まとめ

- 点群への直線当てはめにおいて、点と直線の誤差を、直線の法線方向にとる場合：
  - 直線は点群の重心を通る。
  - 直線の単位法線ベクトル **a** = (a,b) を求める問題は、共分散行列 C の固有ベクトル **a** を求める問題に帰着される。

$$C\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

$$(C - \lambda I)\mathbf{a} = 0$$

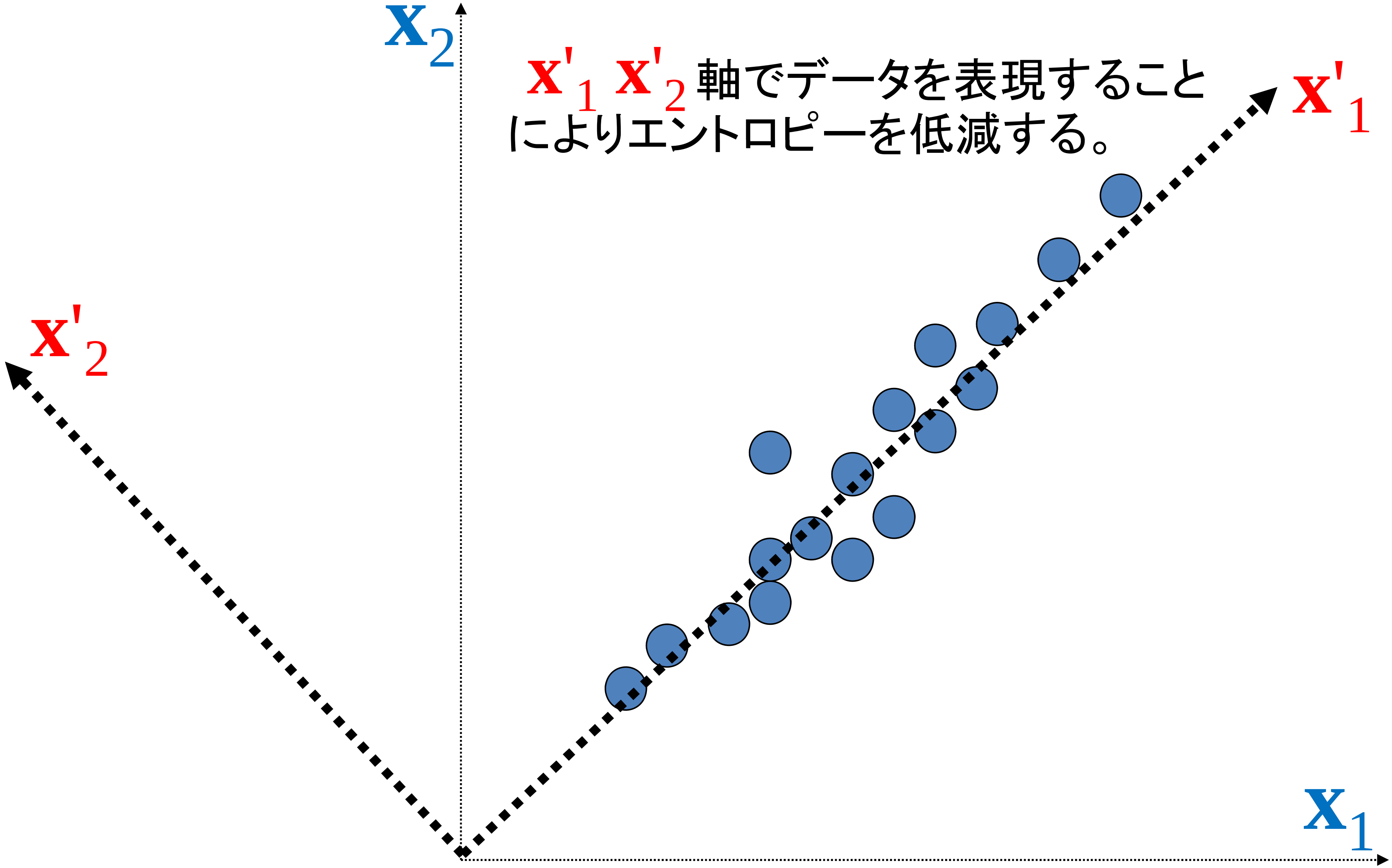
$$C = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

演習問題 10-A

- ２つの固有ベクトルが得られるが、直線の法線に対応する固有ベクトルは、最小固有値 λ_{min} に対応する固有ベクトルである。
  1. 最小固有値 λ_{min}は、どのような値になるか？　最小固有値に対応する固有ベクトル（直線の法線方向） (a,b) を、点群の座標値 (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots,n$ を用いて表現せよ。これは、どのような量を表していると言えるか？
  2. 同様に、最大固有値 λ_{max}は、どのような値になるか？ これはどのような量を表していると言えるか？

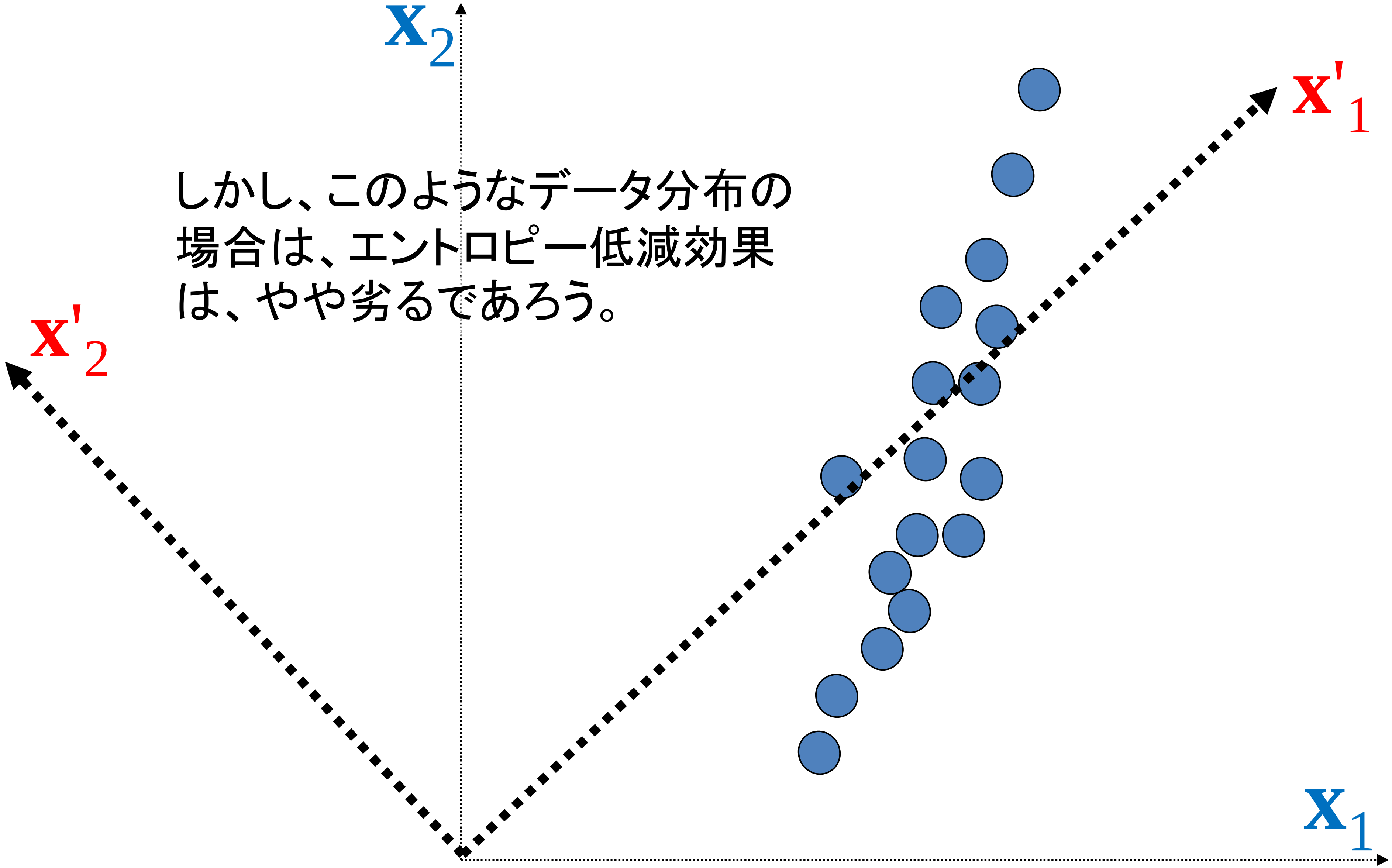
直交変換
再検討

直交変換:再検討


$\mathbf{x}_2$
$\mathbf{x}'_1$ $\mathbf{x}'_2$ 軸でデータを表現すること
によりエントロピーを低減する。
$\mathbf{x}'_1$
$\mathbf{x}'_2$
$\mathbf{x}_1$

直交変換：再検討

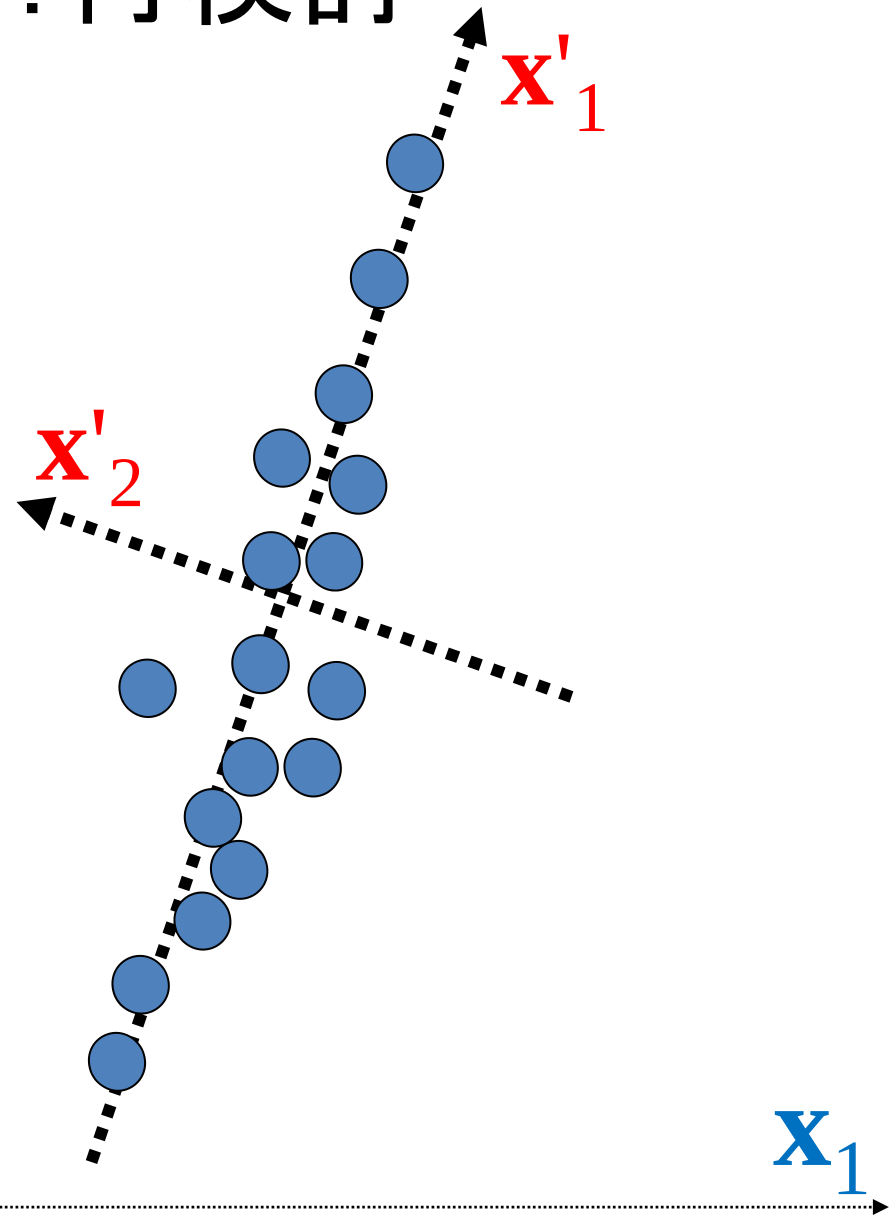
しかし、このようなデータ分布の
場合は、エントロピー低減効果
は、やや劣るであろう。



直交変換：再検討

データ分布に対して、エントロピー削減効果を最大にする軸を適応的に選んでやればよいのではないか？

２次元の場合は、誤差を法線方向にとった場合の直線当てはめを行い、重心を原点とし、２つの固有ベクトルを2軸にとれば、エントロピー削減効果の大きい直交変換を実現できる。



主成分分析の定式化

直交変換の一種である

KL (Karhunen–Loéve) 変換と等価

主成分分析:2次元の場合

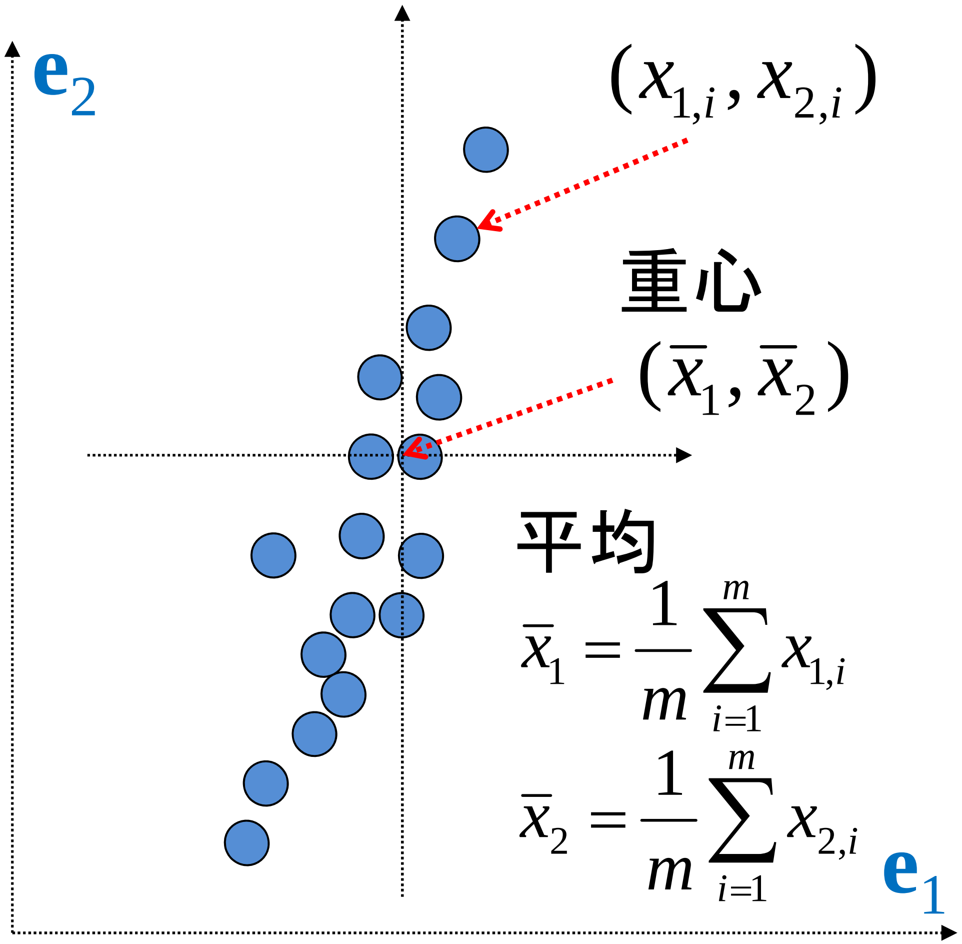
2×2共分散行列

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)^2$$

$$c_{22} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)^2$$

$$c_{12} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)$$



共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2$
対応する固有ベクトル　$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

主成分分析：2次元の場合

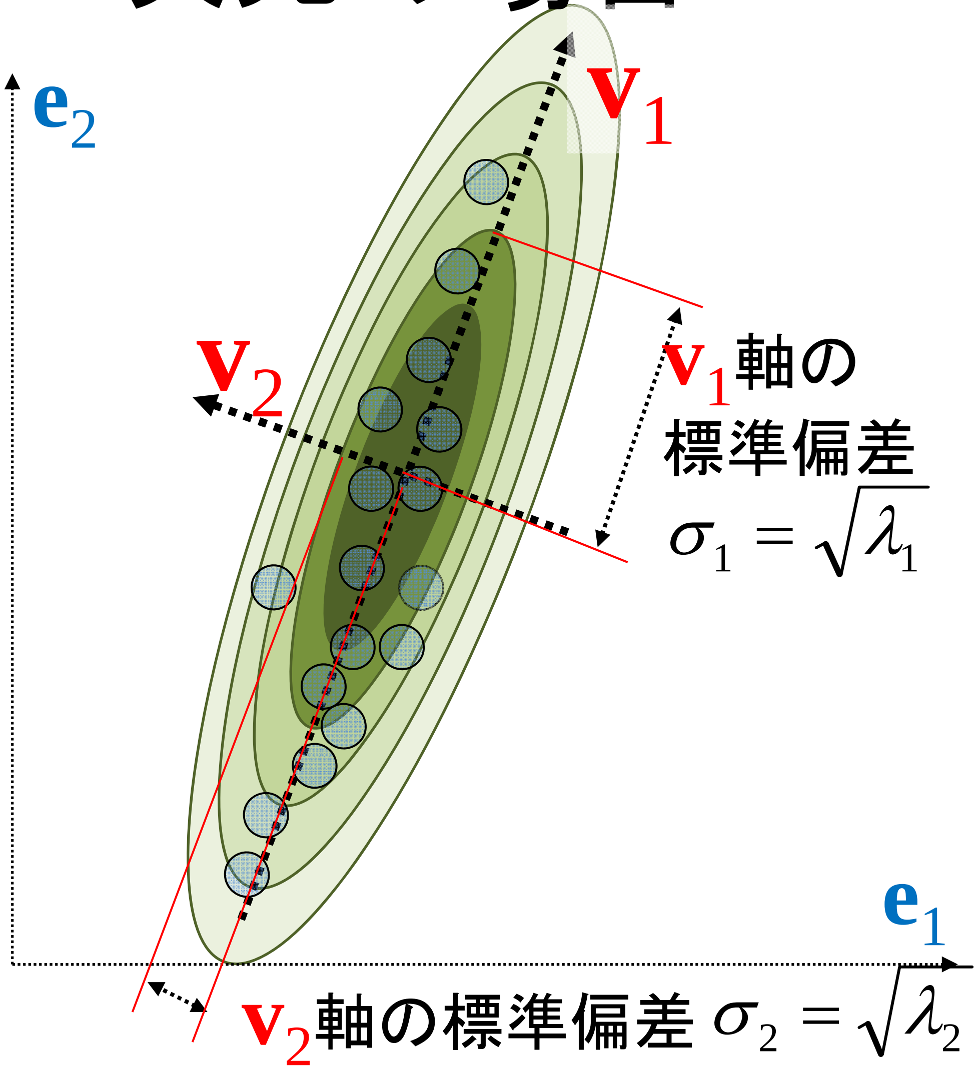
2×2共分散行列

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)^2$$

$$c_{22} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)^2$$

$$c_{12} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)$$



共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2$

対応する固有ベクトル　$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

主成分分析：2次元の場合

$$\mathbf{X} = u_1 \mathbf{v}_1 + u_2 \mathbf{v}_2 + \overline{\mathbf{X}}$$

$$u_i = (\mathbf{v}_i, \mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})$$

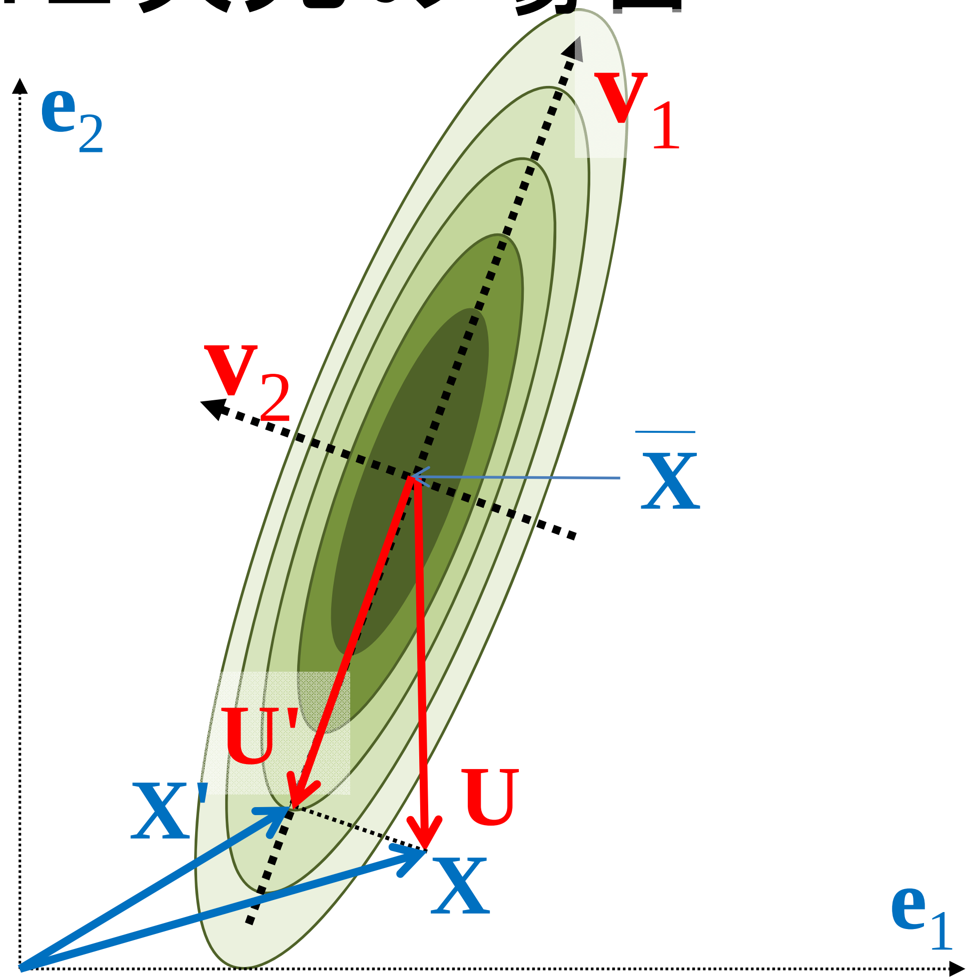
部分空間（$\mathbf{v}_1$軸）への射影

$$\mathbf{X}' = u_1 \mathbf{v}_1 + \overline{\mathbf{X}}$$

変換後の係数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{U}' = (u_1, 0)$$



共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2$

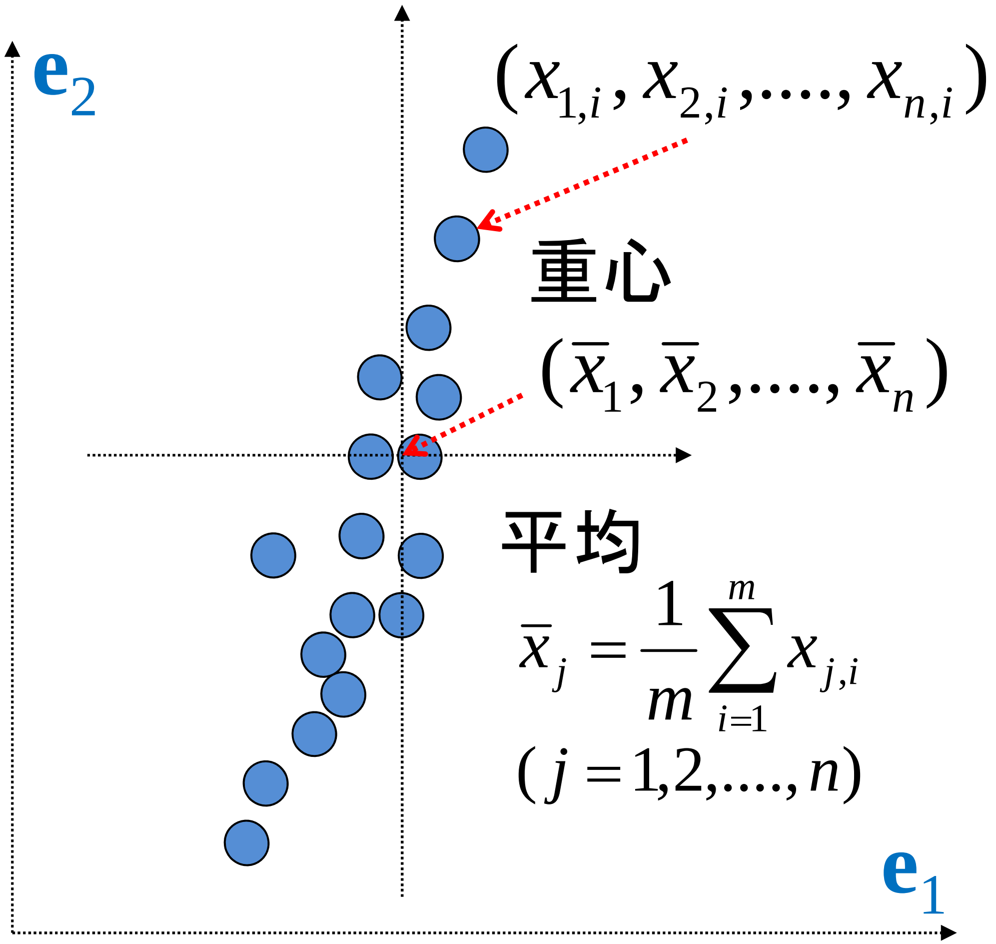
対応する固有ベクトル　$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

主成分分析: n次元の場合

$n \times n$ 共分散行列

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1,n} \\ c_{12} & c_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{1,n} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$c_{j,k} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_{j,i} - \bar{x}_j\right)\left(x_{k,i} - \bar{x}_k\right)$$



$$\bar{x}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{j,i}$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\ldots > \lambda_n$

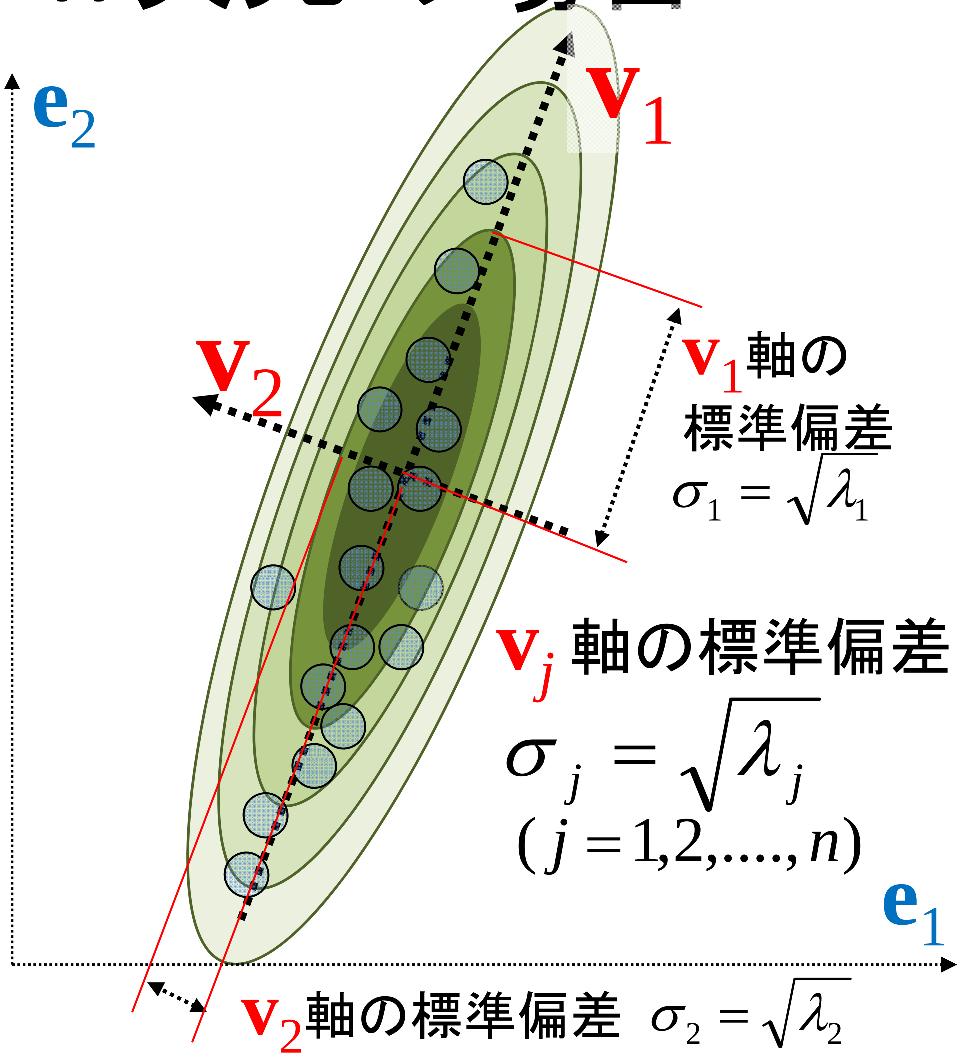
対応する固有ベクトル　$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots, \mathbf{v}_n$

主成分分析: n次元の場合

$n \times n$ 共分散行列

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1,n} \\ c_{12} & c_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{1,n} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$c_{j,k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(x_{j,i} - \bar{x}_j\right)\left(x_{k,i} - \bar{x}_k\right)$$



共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots.. > \lambda_n$

対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots.., \mathbf{v}_n$

主成分分析: n次元の場合

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{v}_i + \overline{\mathbf{X}}$$

$$u_i = (\mathbf{v}_i, \mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})$$

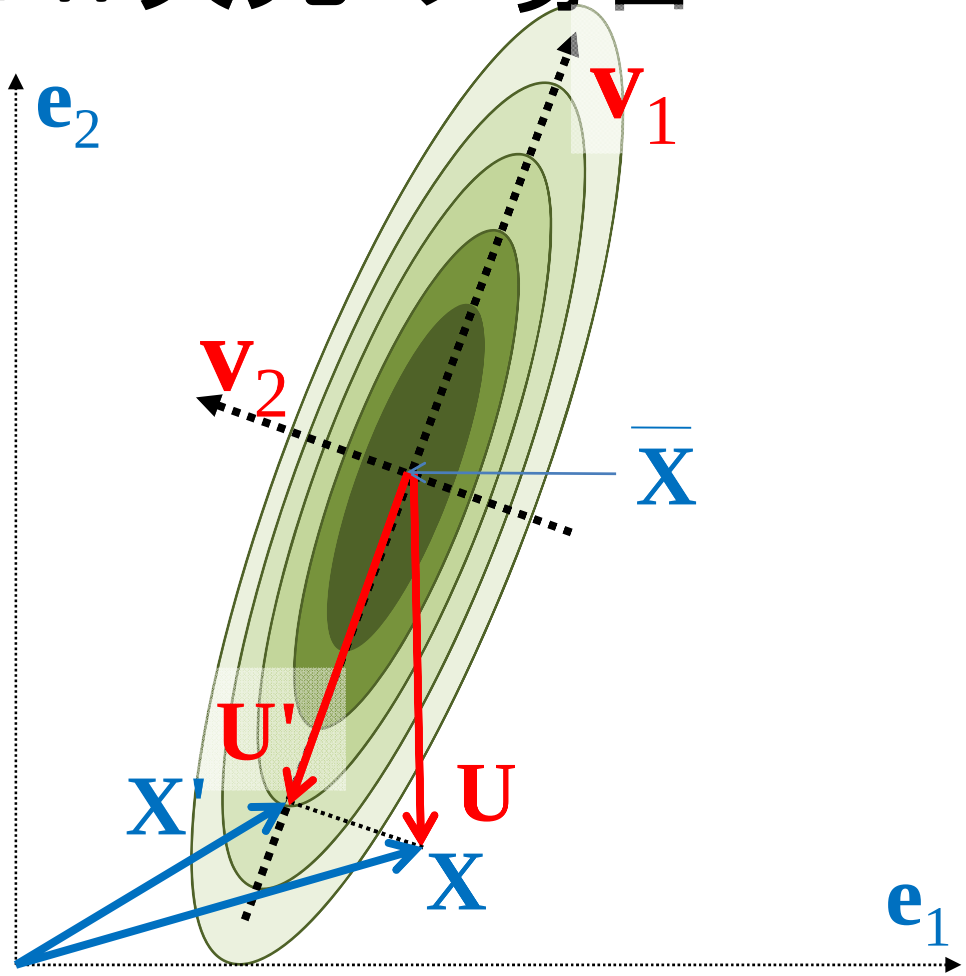
n'次元部分空間($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n'}$が張る空間)への射影 $(n' < n)$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n'} u_i \mathbf{v}_i + \overline{\mathbf{X}}$$

変換後の係数ベクトル

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_n)$$

$$\mathbf{U'} = (u_1, u_2, \ldots u_{n'}, 0, 0, \ldots, 0)$$



共分散行列 C の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\ldots > \lambda_n$

対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots, \mathbf{v}_n$

演習問題 10-B

- n 変数の主成分分析により得られた固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\ldots > \lambda_n$ に対して、各成分の寄与率、累積寄与率が以下のように定義される。（ただし、$n > n'$）

n' 番目の成分の寄与率 $$\frac{\lambda_{n'}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

n'番目までの成分の累積寄与率 $$\frac{\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

これらはどのように利用できるか考えよ。

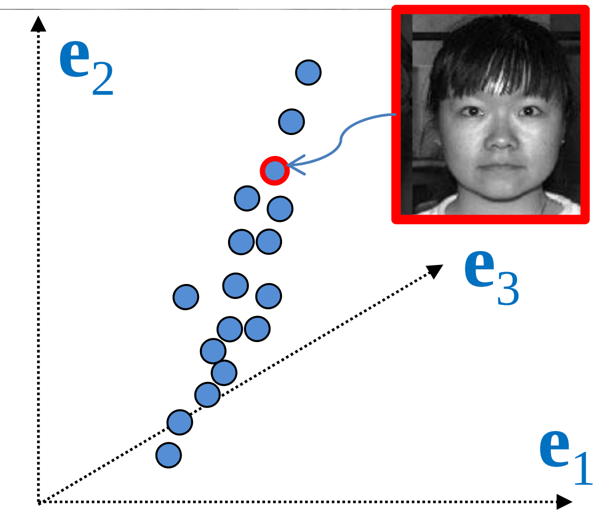
マルチメディアデータの
主成分分析

画像・形状データへの主成分分析の応用

- 顔画像・形状
- 人体形状（体型・足形や人体内部の骨格・臓器なども含む）
- 生物（魚、植物）の形状

The Yale Face Database B
http://cvc.yale.edu/projects/yalefacesB/yalefacesB.html

*n*次元空間



*n*次元空間中の各点が、各顔画像に対応する。

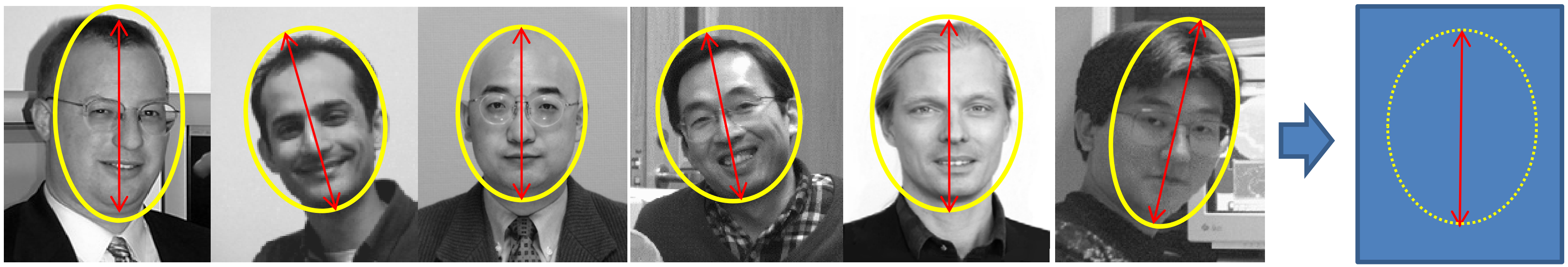
画像・形状データの
主成分分析の目的

- データ圧縮
  - 特定のデータ集合（例えば、顔正面画像）に対して、データ圧縮効果の最も高い直交変換を行える。
- データ認識
  - データ間の比較を行う際、少数の重要な軸の値のみで比較することにより、認識効率・精度を高める。
- データ復元
  - 一部が欠落しているデータ、解像度が悪いデータなどから、高解像度の原データ復元を行う。
- 個体群データ解析
  - 例えば、人種、性別などにより分類した２つのデータ集合を別々に主成分分析することにより、平均および分布の違いを定量的に比較する。

画像・形状データ(特に形状データ)の主成分分析における問題点:正規化

- 画像・形状データの正規化
  - 画像・形状データをベクトル化した際の各成分の値は、(できるだけ)同じ意味をもつ値になるよう、データの補正を行う。
- 画像(各要素に輝度値が格納された2次元配列)の場合
  - 顔の撮影領域、顔の向き、照明条件、背景、眼鏡の有無などについて、条件をそろえることが望ましい(しかし、すべての条件をそろえるのは難しい。)

画像データ正規化の例

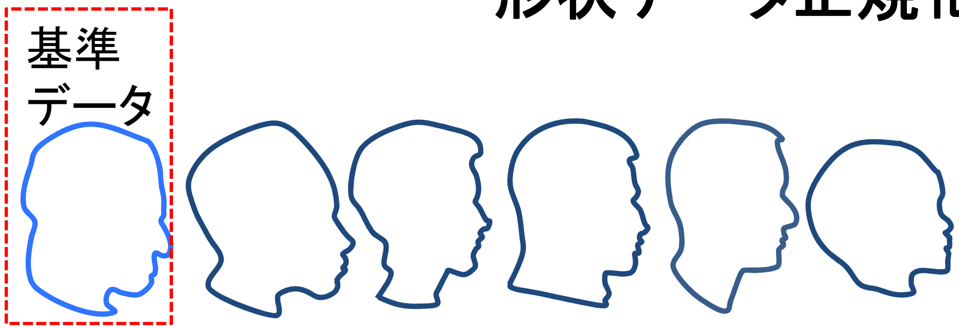


赤矢印の位置と長さが画像中の同じ位置にくるよう、各画像の位置、向き、スケールを補正する。(多くのデータベースでは撮影段階で必要な正規化を行っている。)

画像・形状データ（特に形状データ）の主成分分析における問題点：正規化

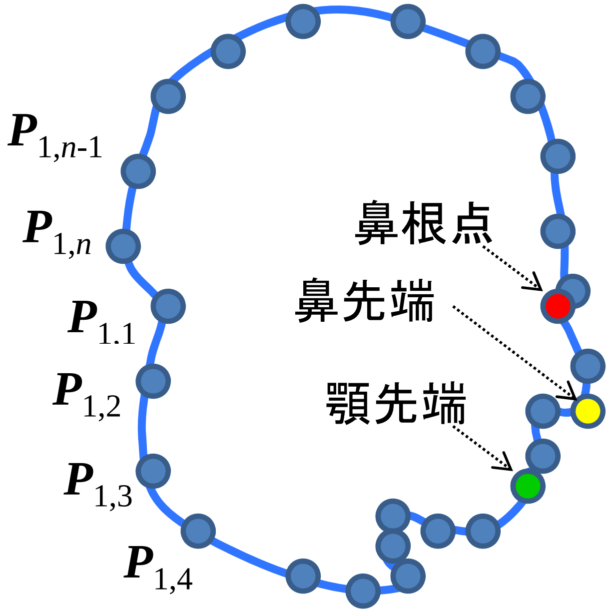
- 形状（2次元輪郭、3次元表面）データの場合
  - 輪郭（表面）が存在する2次元（3次元）空間中の位置、向きの補正に加えて、輪郭（表面）に沿った補正が必要になる。

形状データ正規化の例



$\boldsymbol{X}_1$

基準データの
節点配置



各データにおいて
- 輪郭を表現する点の数は同じである。
- 同じ特徴点には同じ番号の節点が対応する。

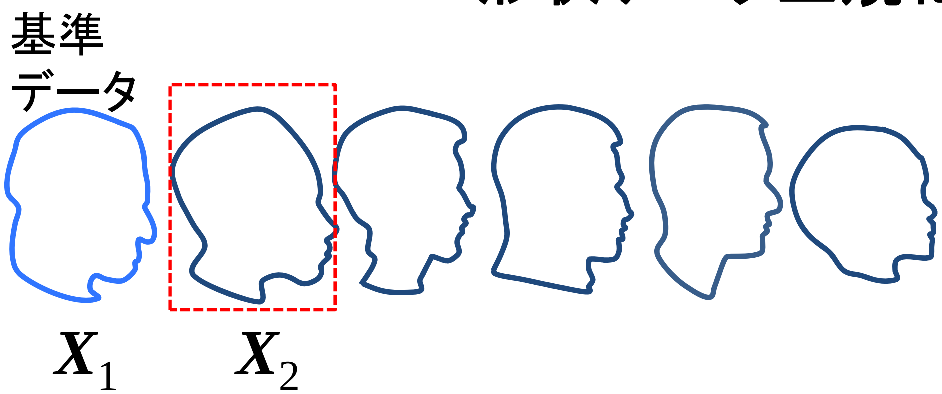
$$\boldsymbol{X}_1 = (\boldsymbol{P}_{1,1}, \boldsymbol{P}_{1,2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{P}_{1,n})$$
$$\boldsymbol{X}_1 = (x_{1,1}, y_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, \ldots\ldots, x_{1,n}, y_{1,n})$$

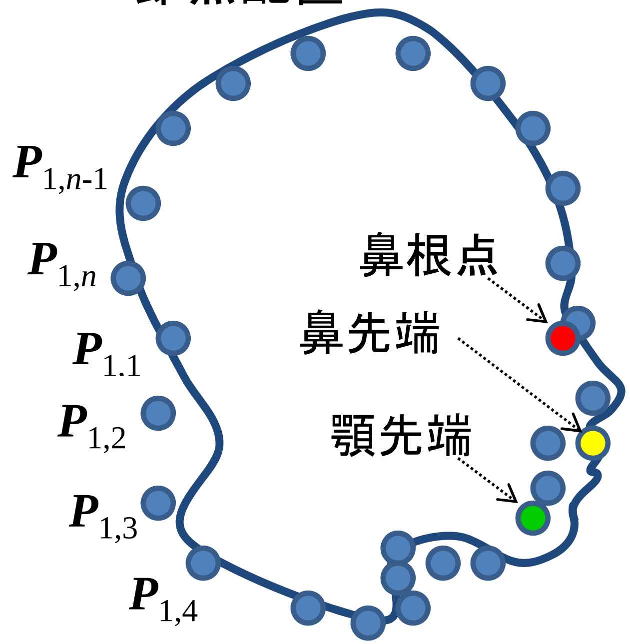
$2n$次元ベクトル（n 節点の2次元形状）

画像・形状データ(特に形状データ)の主成分分析における問題点:正規化

- 形状(2次元輪郭、3次元表面)データの場合
  - 輪郭(表面)が存在する2次元(3次元)空間中の位置、向きの補正に加えて、輪郭(表面)に沿った補正が必要になる。

形状データ正規化の例





各データにおいて
- 輪郭を表現する点の数は同じである。
- 同じ特徴点には同じ番号の節点が対応する。

$$X_2 = (P_{2,1}, P_{2,2}, \dots\dots\dots\dots, P_{2,n})$$
$$X_2 = (x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}, \dots\dots, x_{2,n}, y_{2,n})$$

$2n$次元ベクトル(n 節点の2次元形状)

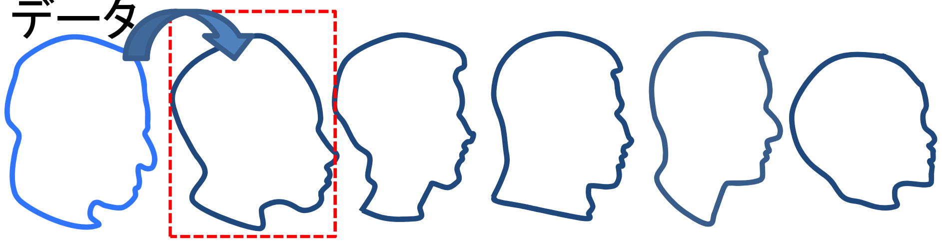
画像・形状データ（特に形状データ）の主成分分析における問題点：正規化

- 形状（2次元輪郭、3次元表面）データの場合
  - 輪郭（表面）が存在する2次元（3次元）空間中の位置、向きの補正に加えて、輪郭（表面）に沿った補正が必要になる。

形状データ正規化の例

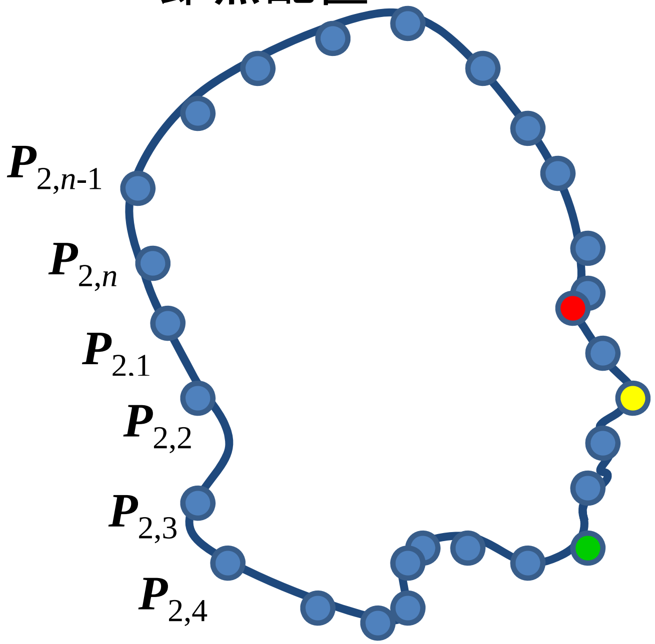
非剛体
位置合わせ

基準
データ



$\boldsymbol{X}_1$　　$\boldsymbol{X}_2$

個々のデータの
節点配置



非剛体位置合わせ

各データにおいて
- 輪郭を表現する点の数は同じである。
- 同じ特徴点には同じ番号の節点が対応する。

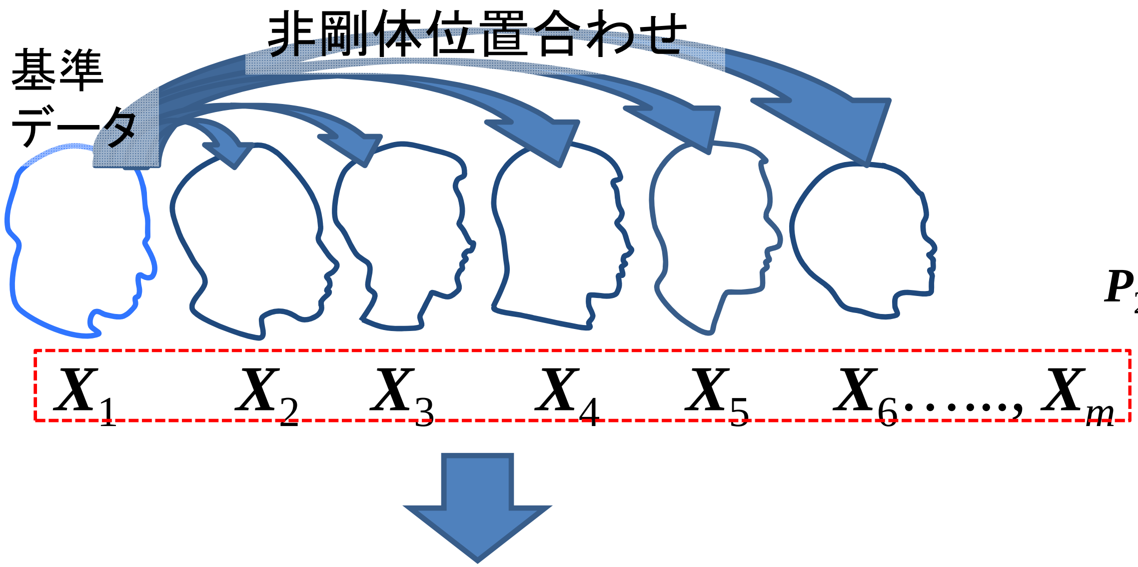
$$\boldsymbol{X}_2 = (\boldsymbol{P}_{2,1}, \boldsymbol{P}_{2,2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{P}_{2,n})$$
$$\boldsymbol{X}_2 = (x_{2,1}, y_{2,1}, x_{2,2}, y_{2,2}, \ldots\ldots, x_{2,n}, y_{2,n})$$

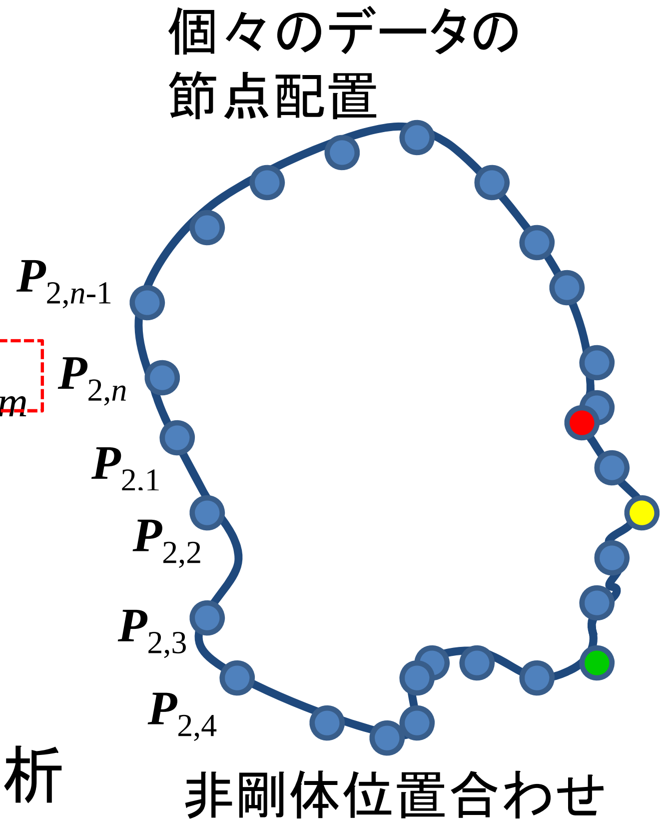
2n次元ベクトル（n 節点の2次元形状）

画像・形状データ(特に形状データ)の
主成分分析

- 形状(2次元輪郭、3次元表面)データの場合

形状データ正規化





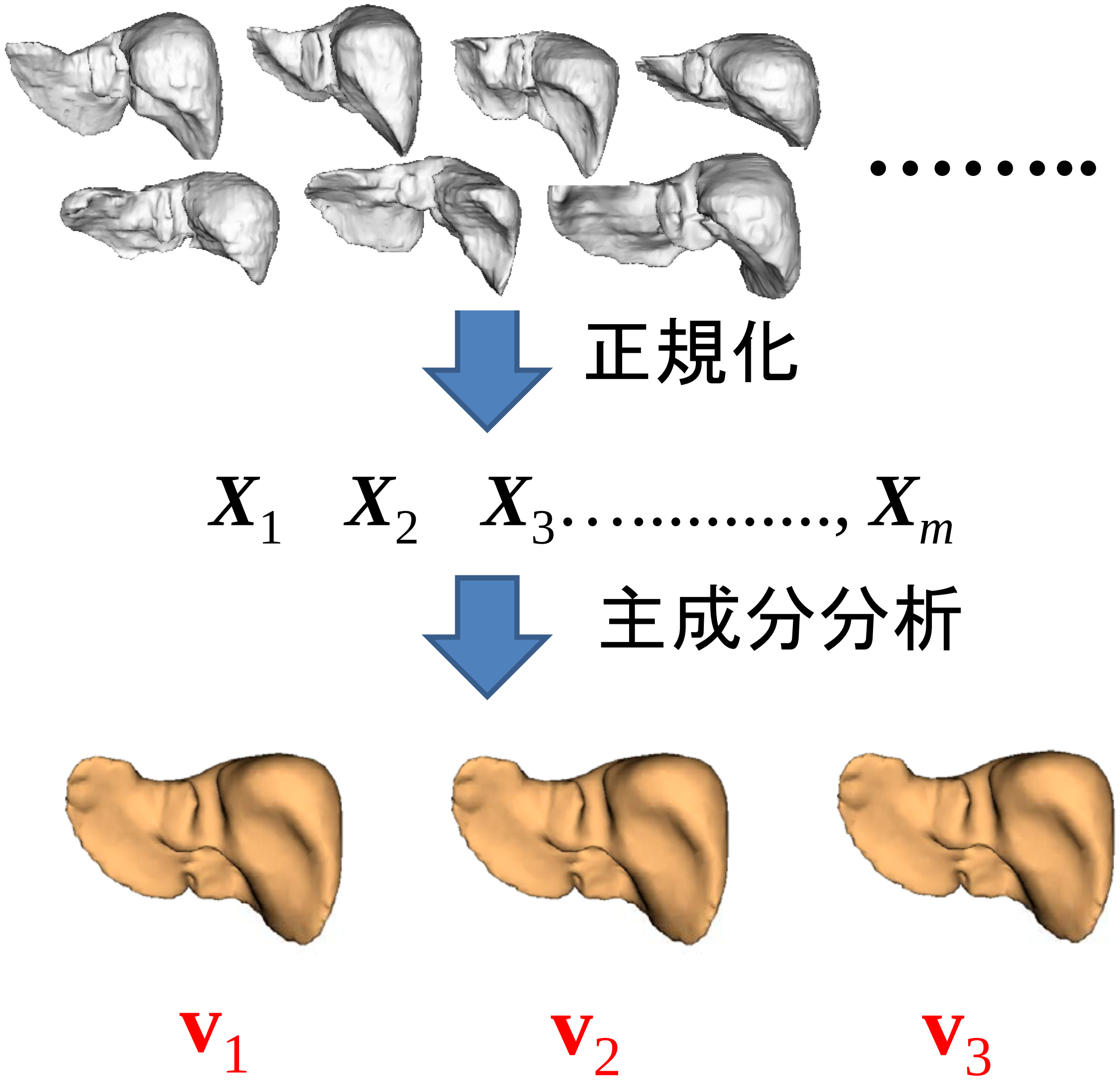
2n次元ベクトルの主成分分析

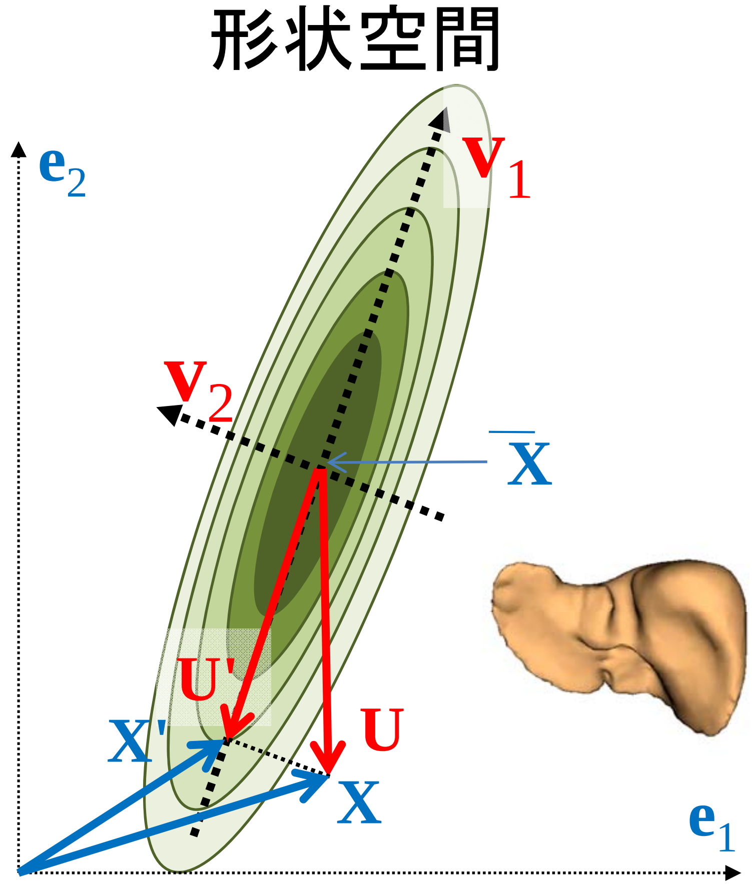
３次元表面データの場合

3n次元ベクトルの主成分分析

３次元形状主成分分析の実例

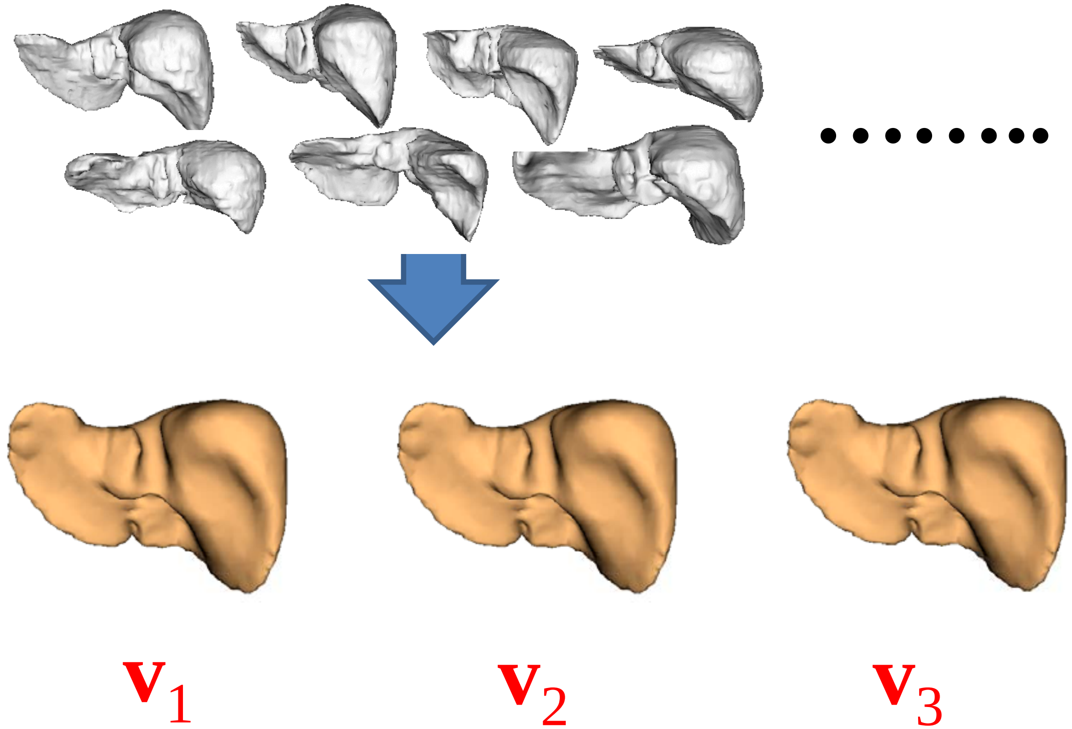
- 肝臓形状（３次元表面）データの主成分分析

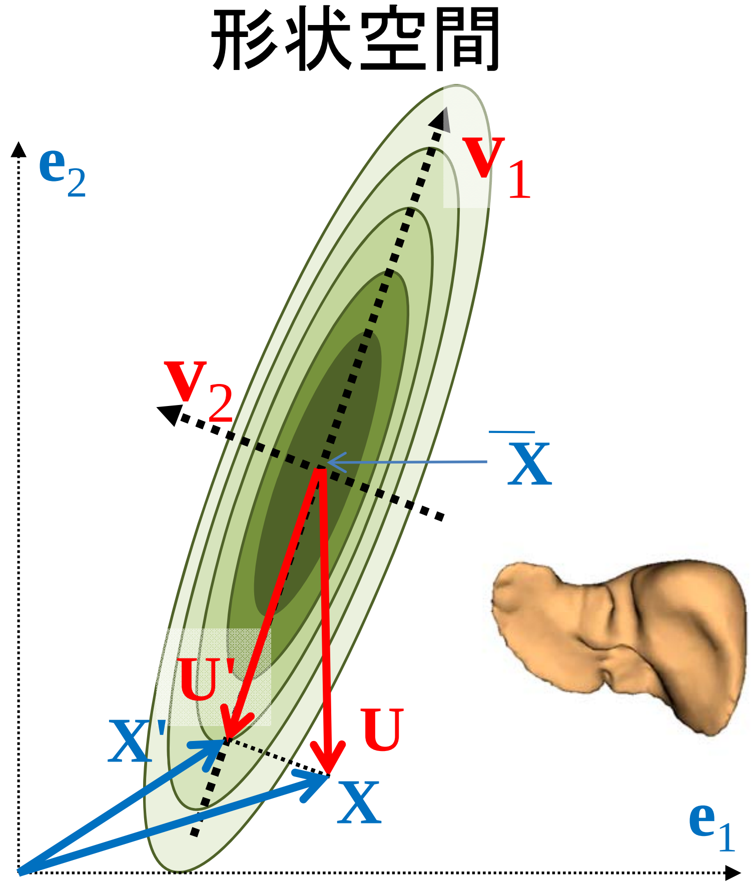




3次元形状主成分分析の利点

- 複雑な3次元形状を少数の軸（すなわちパラメータ）で（近似）表現可能
- 3次元形状復元の際、少数のパラメータのみを最適化すればよいので、安定かつ効率的である。（対象に関する制約条件を利用できる。）





マルチメディアデータの主成分分析：まとめ

- 画像・形状（その他、マルチメディア）データ集合が与えられ、それらに対して主成分分析することにより、圧縮効果の最も高い直交変換を得ることができる。
- 画像・形状データを、主成分分析に入力する固定次元のベクトルデータに変換する際、適切な正規化を行うことがポイントになる。
- 主成分分析により、少数のパラメータで画像・形状を表現でき、データ復元・認識において、効率と安定性が向上する。