マルチメディア工学
マルチメディアデータの解析
基礎数理：直交変換, 直交関数展開

佐藤 嘉伸

大阪大学　大学院医学系研究科
放射線統合医学講座
yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp
http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/
講義ホームページ: 日本語ページ → 授業の資料 → マルチメディア工学

マルチメディア工学：講義計画

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: CG)
- マルチメディアデータの解析

マルチメディア工学：講義計画

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: CG)
- **マルチメディアデータの解析**
  - **基礎数理**
    - **最小二乗法**
    - **直交変換、直交関数展開**
  - **代表的解析手法**

マルチメディアデータの解析

- 基礎数理
  - 最小二乗法
  - 直交変換、直交関数展開
- 代表的解析手法
  - データ圧縮：離散コサイン変換とJPEG
  - データ表現：形状の主成分分析
  - （データ認識：隠れマルコフモデル）
    - 音声・言語を含む時系列データに対して有効
  - （音声の独立成分分析）

基礎数理：直交変換、直交関数展開

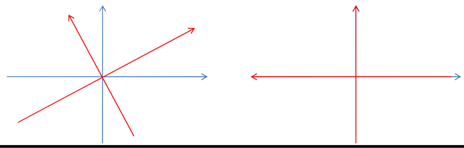
- 直交変換
  - 直交変換（直交行列）定義、正規直交基底
  - 直交変換の利点、直交の必要性
- 直交関数展開
  - ベクトルから関数へ
  - 直交関数系
  - 直交関数展開

直交変換

直交変換（直交行列）の定義
正規直交基底

直交変換・直交行列
(Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換の定義（直観的解釈）
  - ➢内積の値を変えない一次（線形）変換
    - ➢すなわち、2ベクトル間の角度、ベクトルの長さが変わらない変換
      - ➢直交座標系から別の直交座標系への変換（回転、対称変換、Permutation（軸の入れ替え）など）



直交変換・直交行列
(Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換の定義（数学的解釈）
  - – 内積の値を変えない一次（線形）変換
  - – すなわち、任意の2ベクトル$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})$ が成立 （Tは正方行列）

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = (T\boldsymbol{u})^T(T\boldsymbol{v}) = \Sigma_i(\Sigma_j T_{ij}u_j)(\Sigma_k T_{ik}v_k)$$

$$= \Sigma_{ijk} u_j (T^T)_{ji} T_{ik} v_k = \boldsymbol{u}^T T^T T \boldsymbol{v}$$

  - – Tは、$T^TT=TT^T=E$ を満たす正方行列（直交行列）
  - – $\Sigma_j T_{ji}T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ） $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

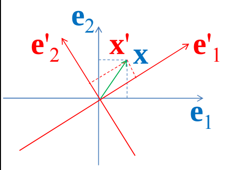
直交変換・直交行列
(Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換 $T^TT=TT^T=E$

$\Sigma_j T_{ji}T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ） $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

回転

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad TT^T = T^TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$

$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$

$$T = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})/2 \\ (-1+2\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$$

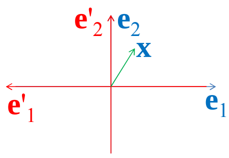
直交変換・直交行列
(Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換 $T^TT=TT^T=E$

$\Sigma_j T_{ji}T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ） $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

対称変換

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad TT^T = T^TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$

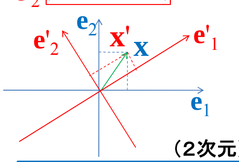
$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

直交変換：正規直交基底

$$T = \begin{array}{c} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta \quad \sin\theta} \\ \boxed{-\sin\theta \quad \cos\theta} \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{array}{cc} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad TT^T = T^TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$

$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{e}'_1) \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}'_2) \end{pmatrix}$$

（2次元）正規直交基底

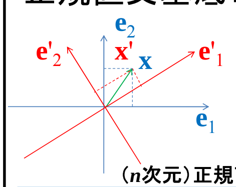
$$\boxed{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1, \ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0}$$

$$\boxed{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad |\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}'_2| = 1, \ (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = 0}$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$$

同一ベクトルを異なる直交座標系（直交基底）で表現

正規直交基底：n次元ベクトル空間への一般化



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{e}'_1) \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}'_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}'_n) \end{pmatrix}$$

（n次元）正規直交基底 （直交座標系の座標軸ベクトル）

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} e'_{11} \\ e'_{12} \\ \vdots \\ e'_{1n} \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} e'_{21} \\ e'_{22} \\ \vdots \\ e'_{2n} \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \mathbf{e}'_n = \begin{pmatrix} e'_{n1} \\ e'_{n2} \\ \vdots \\ e'_{nn} \end{pmatrix}$$

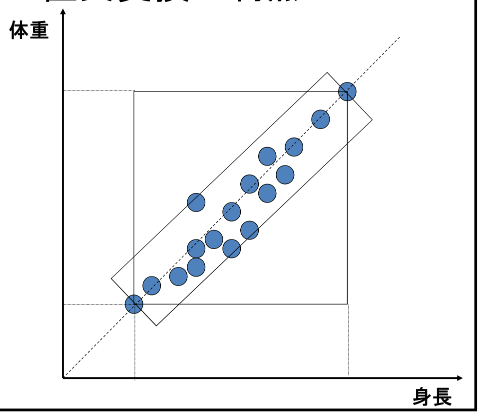
$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots\ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots\ldots + x'_n\mathbf{e}'_n$$

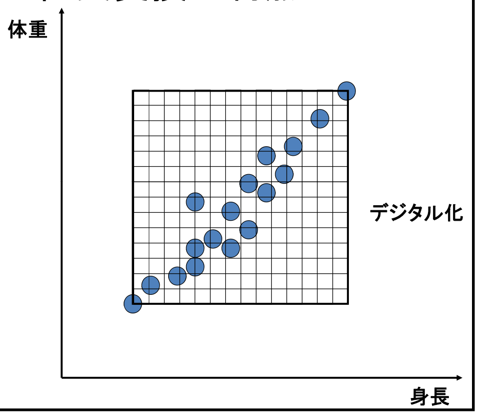
同一ベクトルを異なる直交座標系（直交基底）で表現

直交変換の利点

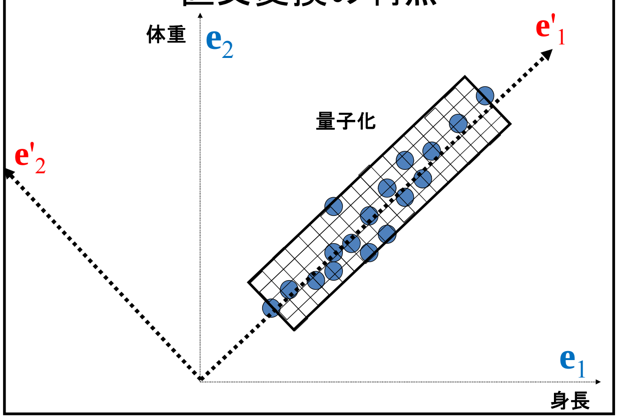
直交変換の利点



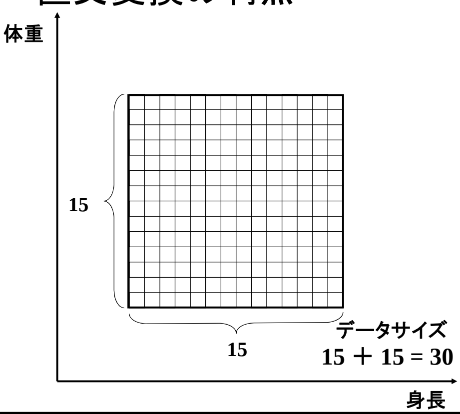
直交変換の利点



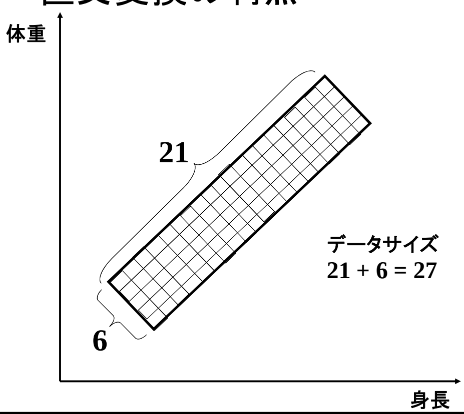
直交変換の利点



直交変換の利点



直交変換の利点



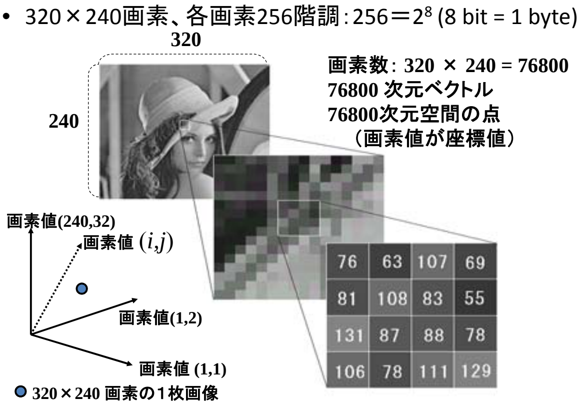
直交変換の利点

- 身長、体重の2変数
  - データサイズ 15 + 15 = 30
  - 身長がわかれば、体重の範囲は限られる。よって、直交変換後
    - データサイズ 21 + 6 = 27
- 身長、体重、胸囲、座高、股下の6変数
  - データサイズ 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75
  - 身長と体重がわかれば、胸囲の範囲はさらに限られる。身長、体重、胸囲がわかれば、座高の範囲はさらにさらに限られる。。。。。。。よって、直交変換後
    - データサイズ 21 + 6 + 5 + 4 + 2 = 38
- 直交変換により、(まったくのランダム雑音＝無相関データ以外は)多変数(＝多次元ベクトル)のデータサイズを大幅に小さくできる。

- 例えば、画像も一種の多次元ベクトルである。

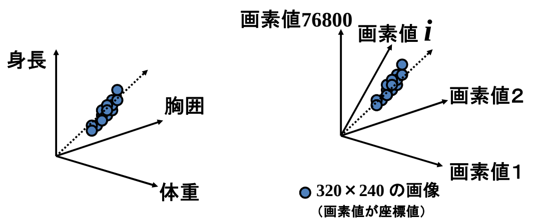
多次元ベクトルとしての画像データ

- 320×240画素、各画素256階調：256＝2^8 (8 bit = 1 byte)



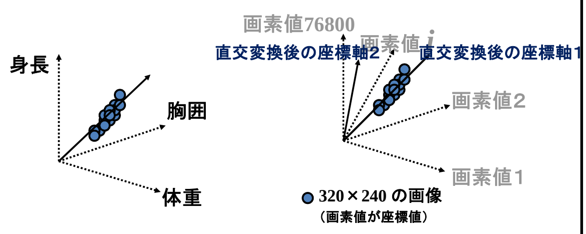
ベクトル空間について

- 各画像は、320×240＝76800次元空間中の点と考えることができるが、76800次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。



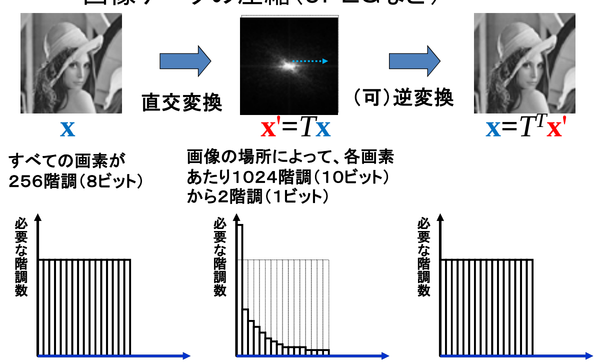
ベクトル空間について

- 各画像は、320×240＝76800次元空間中の点と考えることができるが、76800次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。



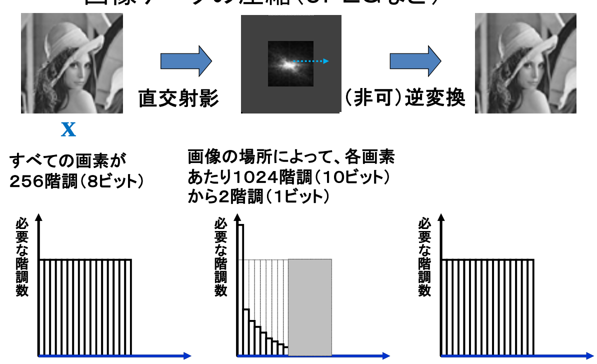
直交変換の応用

- 画像データの圧縮(JPEGなど)

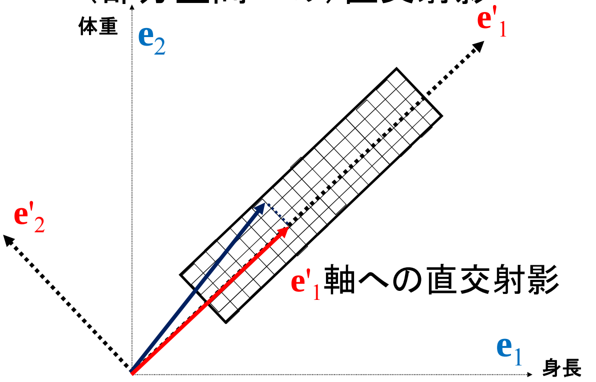


直交変換の応用

- 画像データの圧縮(JPEGなど)

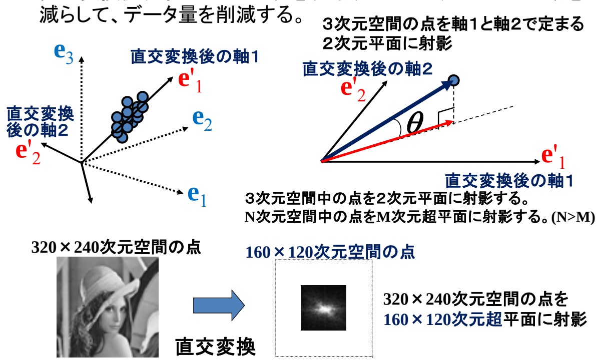


（部分空間への）直交射影



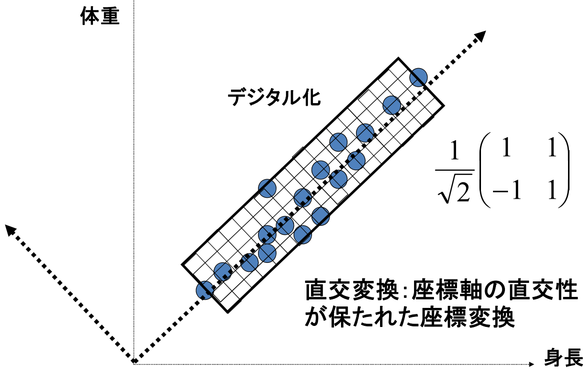
部分空間への直交射影

- 直交変換後、寄与の小さい軸を省略することで、データ次元数を減らして、データ量を削減する。

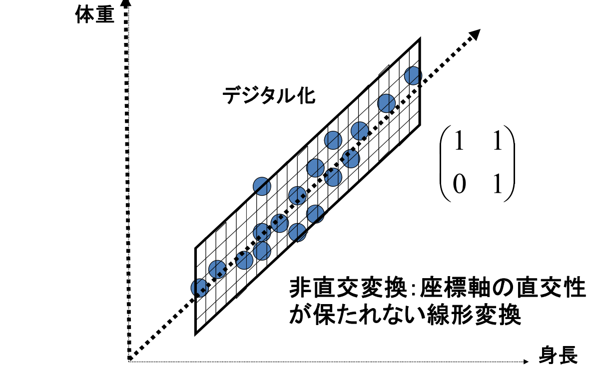


直交（変換）であることの必要性

直交（変換）であることの必要性

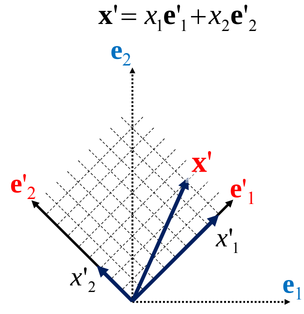


非直交変換（直交でない線形変換）

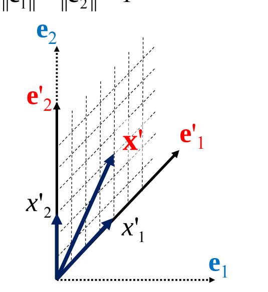


直交（変換）であることの必要性

$$\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$$



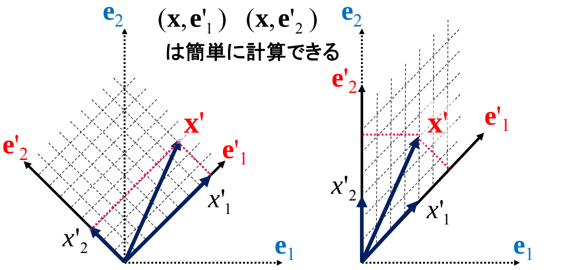
$$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$



$$x'_1 + x'_2(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 + x'_1(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

直交（変換）であることの必要性

$\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$



$x'_1 = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)}$

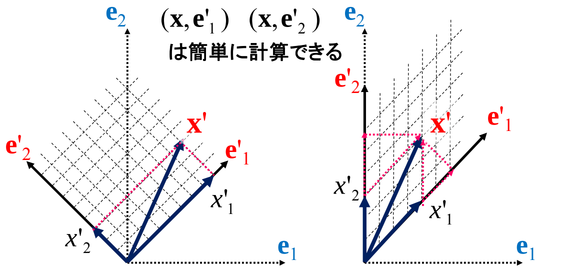
$x'_2 = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)}$

$x'_1 + x'_2(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)}$

$x'_2 + x'_1(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)}$

直交（変換）であることの必要性

$\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$



$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$

$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$

$x'_1 + x'_2(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$

$x'_2 + x'_1(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$

直交（変換）であることの必要性

- 直交変換の場合、変換後の座標値 x'_1, x'_2 は、元のベクトルと座標軸（基底ベクトル）の内積をとるだけで、計算できる。

$$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

- 直交変換でない場合、変換後の座標値 x'_1, x'_2 を求めるためには、連立方程式を解かなければならない。

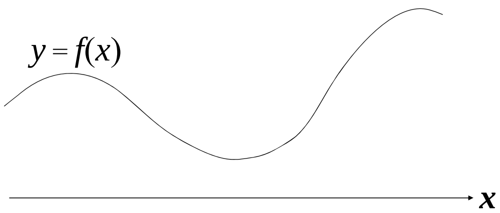
$$x'_1 + x'_2(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 + x'_1(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

- 320×240=76800、160×120=19200などの大量の座標値を求める場合には、大量の未知数の連立方程式を解くのは、計算機でも非常に手間がかかる。

ベクトルから関数へ

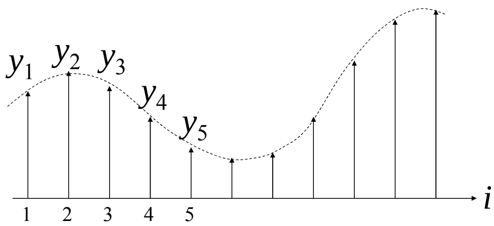
関数はベクトルである

- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$



関数はベクトルである

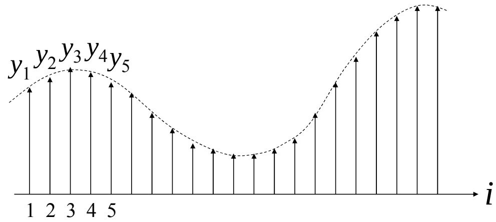
- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$



ある飲食店にいる客の数を1時間おきに調べてみる。

関数はベクトルである

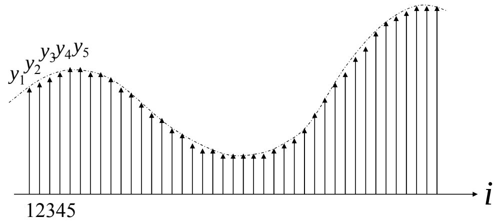
- 関数: $y = f(x)$ 　　nを$2n$にする
- ベクトル: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{2n})$



ある飲食店にいる客の数を30分おきに調べてみる。

関数はベクトルである

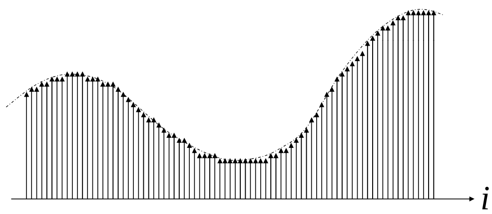
- 関数: $y = f(x)$
- ベクトル: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{4n})$



ある飲食店にいる客の数を15分おきに調べてみる。

関数はベクトルである

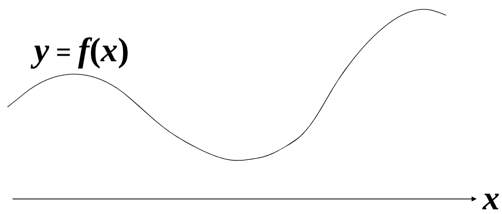
- 関数: $y = f(x)$
- ベクトル: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{8n})$



ある飲食店にいる客の数を7.5分おきに調べてみる。

関数は（無限次元）ベクトルである

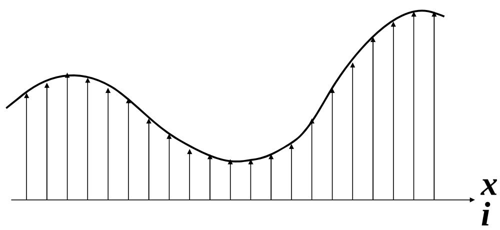
- 関数: $y = f(x)$
- ベクトル: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_\infty)$



ある飲食店にいる客の数を常時調べる。

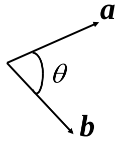
関数は（無限次元）ベクトルである

- 関数: $y = f(x)$ 　連続的
- ベクトル: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ 　離散的



ベクトルの直交条件

- n次元ベクトルの場合



$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)$$

直交条件　＝　内積がゼロ

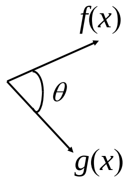
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_ib_i + \ldots + a_nb_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = |a|\cdot|b|\cos\theta = 0$$

関数（無限次元ベクトル）の直交条件

- 関数の場合

$y = f(x)$

$y = g(x)$



直交条件 ＝ 内積がゼロ

$$(f(x), g(x)) = \int f(x)g(x)dx = |f(x)| \cdot |g(x)| \cos\theta$$

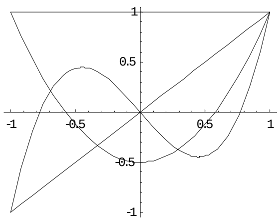
直交関数系

直交関数系

互いに直交する一連の関数の集合

- ルジャンドルの多項式

$$P_n(x), n = 1,2,3,....(-1 \le x \le 1)$$



$P_0(x) = 1$

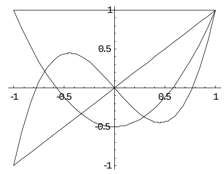
$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

直交関数系

- ルジャンドルの多項式 $P_n(x), n = 1,2,3,....(-1 \le x \le 1)$



$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

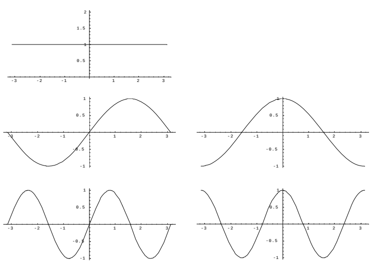
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

演習問題OT-1：ルジャンンドル多項式が直交関数系であること（以下の直交条件が成立していること）を確かめよ。

$$\int_1^{-1} P_i(x)P_j(x)dx = 0 \quad (i \ne j)$$

直交関数系

- 三角関数系 $(-\pi \le x \le \pi)$



$C_0(x) = 1/2$

$S_1(x) = \sin x$

$C_1(x) = \cos x$

$S_2(x) = \sin 2x$

$C_2(x) = \cos 2x$

$S_3(x) = \sin 3x$

$C_3(x) = \cos 3x$

$\vdots$

$(-\pi \le x \le \pi)$

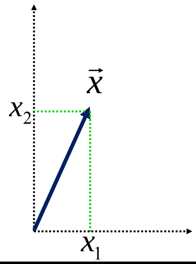
演習問題OT-2：三角関数系が直交関数系であることを確かめよ。

直交関数展開

直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル(以後、内積をドットで表現している)

$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$

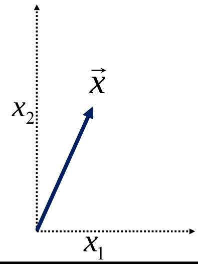


$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル(以後、内積をドットで表現している)

$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$

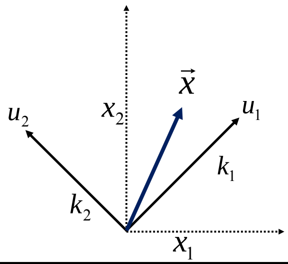


$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル(以後、内積をドットで表現している)

$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$

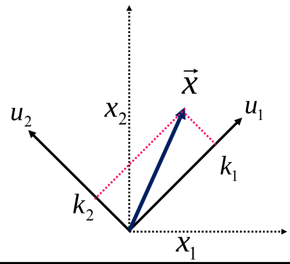


$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル(以後、内積をドットで表現している)

$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$

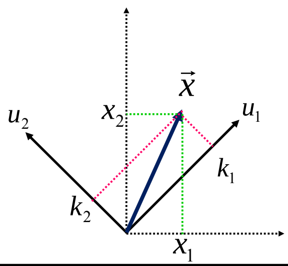


$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル(以後、内積をドットで表現している)

$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$



$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$
$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

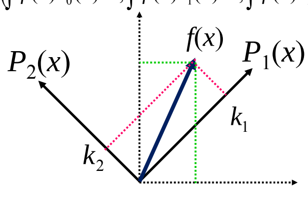
直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $P_0(x), P_1(x), P_2(x),\ldots, P_i(x)$ ….の内積をとる。
- 直交関数展開後の係数

$(k_0, k_1, k_2,\ldots, k_i,\ldots)$

$= (f(x)\cdot P_0(x),\ f(x)\cdot P_1(x),\ f(x)\cdot P_2(x),\ \ldots,\ f(x)\cdot P_i(x),\ldots)$

$= \left(\int f(x)P_0(x)dx, \int f(x)P_1(x)dx, \int f(x)P_2(x)dx,\ldots, \int f(x)P_i(x)dx,\ldots\right)$



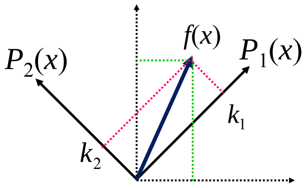
$$k_0 = \int f(x)P_0(x)dx$$
$$k_1 = \int f(x)P_1(x)dx$$
$$k_2 = \int f(x)P_2(x)dx$$

直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$,… , $P_i(x)$ ….の内積をとる。
- 直交関数展開

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_1 P_1(x) + k_2 P_2(x) + ...k_i P_i(x) + ...$$

$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$
$= (f(x) \cdot P_0(x),\ f(x) \cdot P_1(x),\ f(x) \cdot P_2(x), \ldots,\ f(x) \cdot P_i(x), \ldots)$



$$k_0 = \int f(x) P_0(x) dx$$

$$k_1 = \int f(x) P_1(x) dx$$

$$k_2 = \int f(x) P_2(x) dx$$

演習問題OT-3

1. n次元ベクトル $\mathbf{x}$ を正規直交基底$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$で、次のように直交展開できる。展開係数 a_i を示せ。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$$

2. 関数 $f(t)$ を区間$a \leqq t \leqq b$上の正規直交関数系 $\phi_i(t)$ $(i=1,2,\ldots\infty)$で次のように直交関数展開できる。展開係数 c_i を示せ。

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t)$$

なお、区間$a \leqq t \leqq b$上の正規直交関数系 $\phi_i(t)$ は以下を満足する。

3. 以下が成り立つことを証明せよ。

$$\int_a^b \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \delta_{ij}$$ （δ_{ij} は、クロネッカーのデルタ）

$$\int_a^b f^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

4. この証明は、直観的には、「 $f(t)$ という（無限次元）ベクトルを、異なる正規直交基底（直交関数系）で表したとしても、ベクトルの大きさは変わらない。」ということを意味する。無限次元空間を2次元空間に縮退させた状況で、この直観的意味を、図解せよ。

参考文献

- 最小二乗法、直交関数展開などマルチメディアデータ解析の基礎数理に関する参考書
  - これなら分かる応用数学教室
    - 最小二乗法からウェーブレットまで
  - 金谷健一著
  - 共立出版
  - 3045円