# マルチメディア工学

## マルチメディアデータの解析

## 基礎数理：直交変換, 直交関数展開

佐藤 嘉伸

大阪大学　大学院医学系研究科
放射線統合医学講座
yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp
http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

講義ホームページ: 日本語ページ → 授業の資料 → マルチメディア工学

# マルチメディア工学：講義計画

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: **CG**)
- マルチメディアデータの解析

# マルチメディア工学：**講義計画**

- イントロダクション
- コンピュータグラフィックス (Computer Graphics: **CG**)
- マルチメディアデータの解析
  - 基礎数理
    - 最小二乗法
    - 直交変換、直交関数展開
  - 代表的解析手法

# マルチメディアデータの解析

- 基礎数理
  - 最小二乗法
  - 直交変換、直交関数展開
- 代表的解析手法
  - データ圧縮：離散コサイン変換とJPEG
  - データ表現：形状の主成分分析
  - （データ認識：隠れマルコフモデル）
    - 音声・言語を含む時系列データに対して有効
  - （音声の独立成分分析）

# 基礎数理:
# 直交変換、直交関数展開

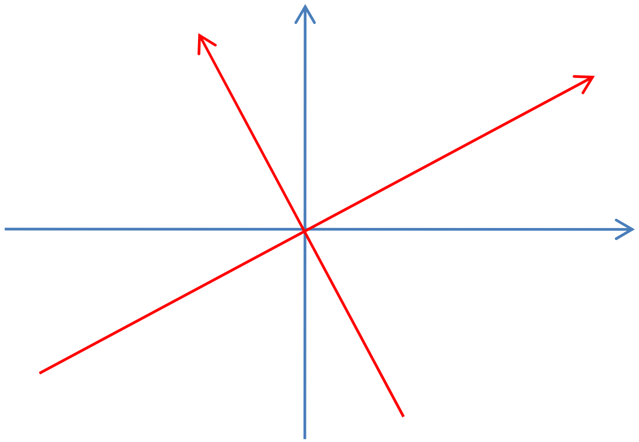
- 直交変換
  - 直交変換（直交行列）定義、正規直交基底
  - 直交変換の利点、直交の必要性
- 直交関数展開
  - ベクトルから関数へ
  - 直交関数系
  - 直交関数展開

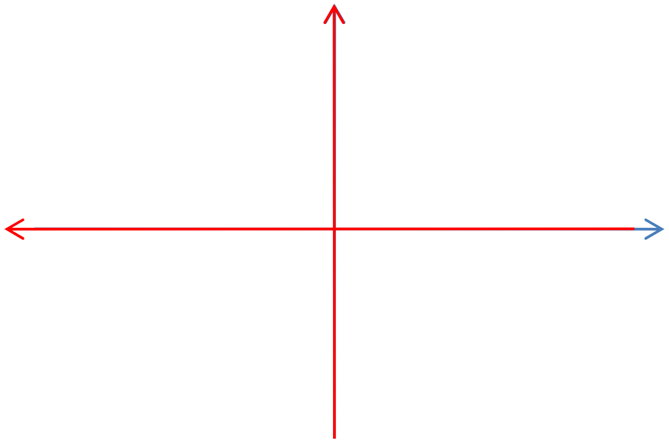
# 直交変換

## 直交変換（直交行列）の定義
## 正規直交基底

# 直交変換･直交行列
## (Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換の定義（直観的解釈）
  - 内積の値を変えない一次（線形）変換
    - すなわち、2ベクトル間の角度、ベクトルの長さが変わらない変換
      - 直交座標系から別の直交座標系への変換（回転、対称変換、Permutation（軸の入れ替え）など）





# 直交変換･直交行列
## (Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換の定義（数学的解釈）
  - 内積の値を変えない一次（線形）変換
  - すなわち、任意の２ベクトル$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して、
    $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})$ が成立 （$T$は正方行列）

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = (T\boldsymbol{u})^T(T\boldsymbol{v}) = \Sigma_i(\Sigma_j T_{ij}u_j)(\Sigma_k T_{ik}v_k)$$

$$= \Sigma_{ijk}u_j\,(T^T)_{ji}T_{ik}v_k = \boldsymbol{u}^T T^T T\boldsymbol{v}$$

  - $T$は、$T^TT=TT^T=E$ を満たす正方行列（直交行列）
  - $\Sigma_j T_{ji}T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ）$\delta_{ik}= \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

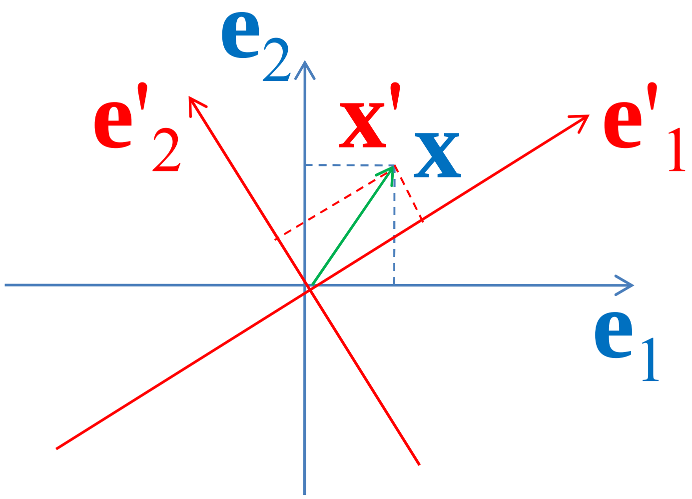
# 直交変換・直交行列
## (Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換　$T^T T = T T^T = E$

$\Sigma_j T_{ji} T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ）　$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

回転

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T T^T = T^T T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$$

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})/2 \\ (-1+2\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$$

# 直交変換・直交行列

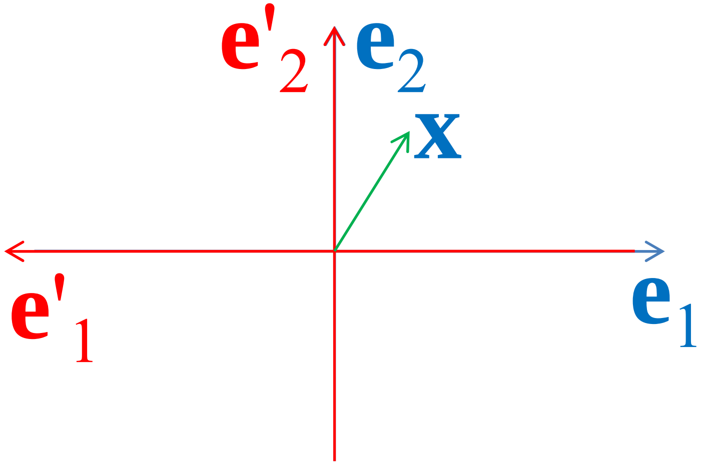
## (Orthogonal Transformation, Orthogonal Matrix)

- 直交変換　$T^TT=TT^T=E$

$\Sigma_j T_{ji} T_{jk} = \delta_{ik}$（クロネッカーのデルタ）$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

対称変換

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad TT^T = T^TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{x'} = T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x'}$$

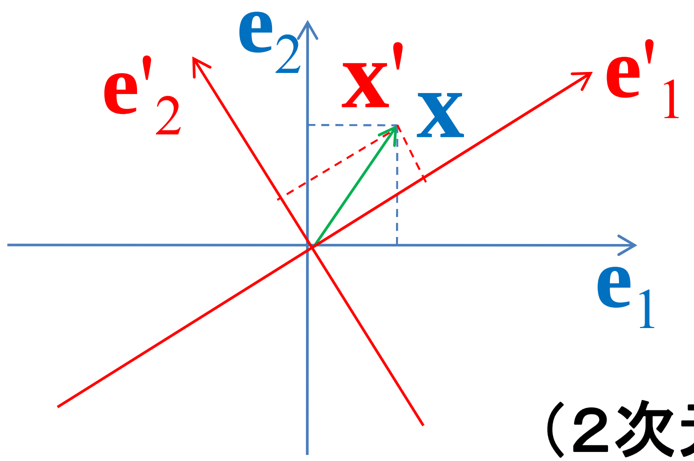
$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x'}|$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# 直交変換:正規直交基底

$$\begin{array}{r} \mathbf{e}'_1 \\ \\ \mathbf{e}'_2 \end{array} T = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta \quad \sin\theta} \\ \boxed{-\sin\theta \quad \cos\theta} \end{pmatrix}, \quad T^T = \overset{\mathbf{e}'_1}{} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix}^{\mathbf{e}'_2}, \quad TT^T = T^T T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$$

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'|$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2) \end{pmatrix}$$

**（2次元）正規直交基底**

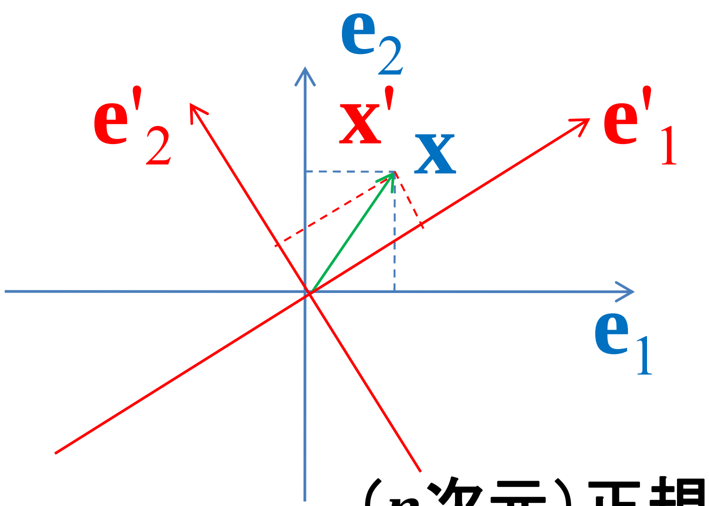
$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1, \ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ |\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}'_2| = 1, \ (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = 0 \end{matrix}}$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$$

同一ベクトルを異なる直交座標系（直交基底）で表現

# 正規直交基底：*n*次元ベクトル空間への一般化



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_n) \end{pmatrix}$$

**（*n*次元）正規直交基底**　（直交座標系の座標軸ベクトル）

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ （クロネッカーのデルタ）

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} e'_{11} \\ e'_{12} \\ \vdots \\ e'_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} e'_{21} \\ e'_{22} \\ \vdots \\ e'_{2n} \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \mathbf{e}'_n = \begin{pmatrix} e'_{n1} \\ e'_{n2} \\ \vdots \\ e'_{nn} \end{pmatrix}$$

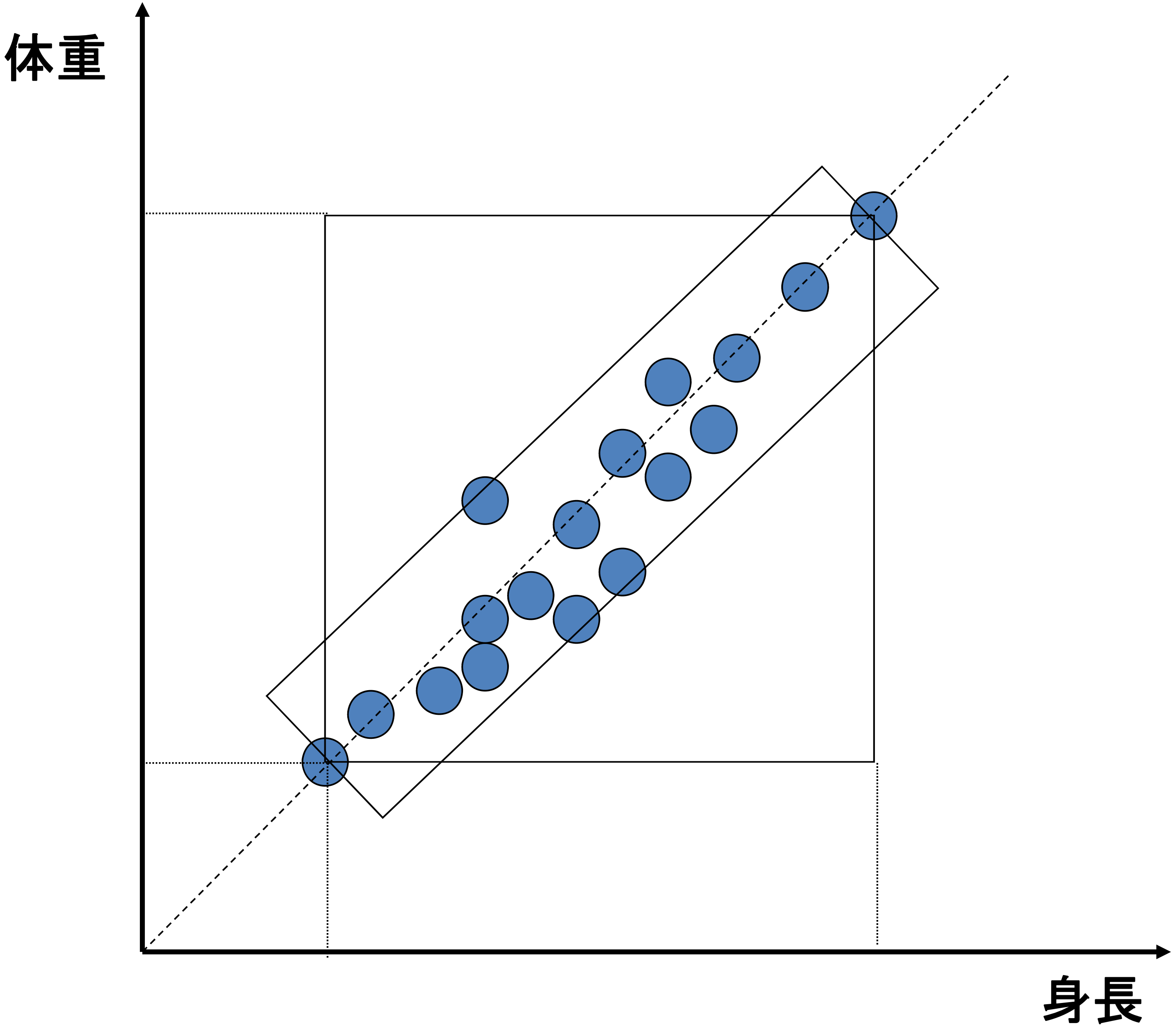
$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$ （クロネッカーのデルタ）

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots\ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots\ldots + x'_n\mathbf{e}'_n$$

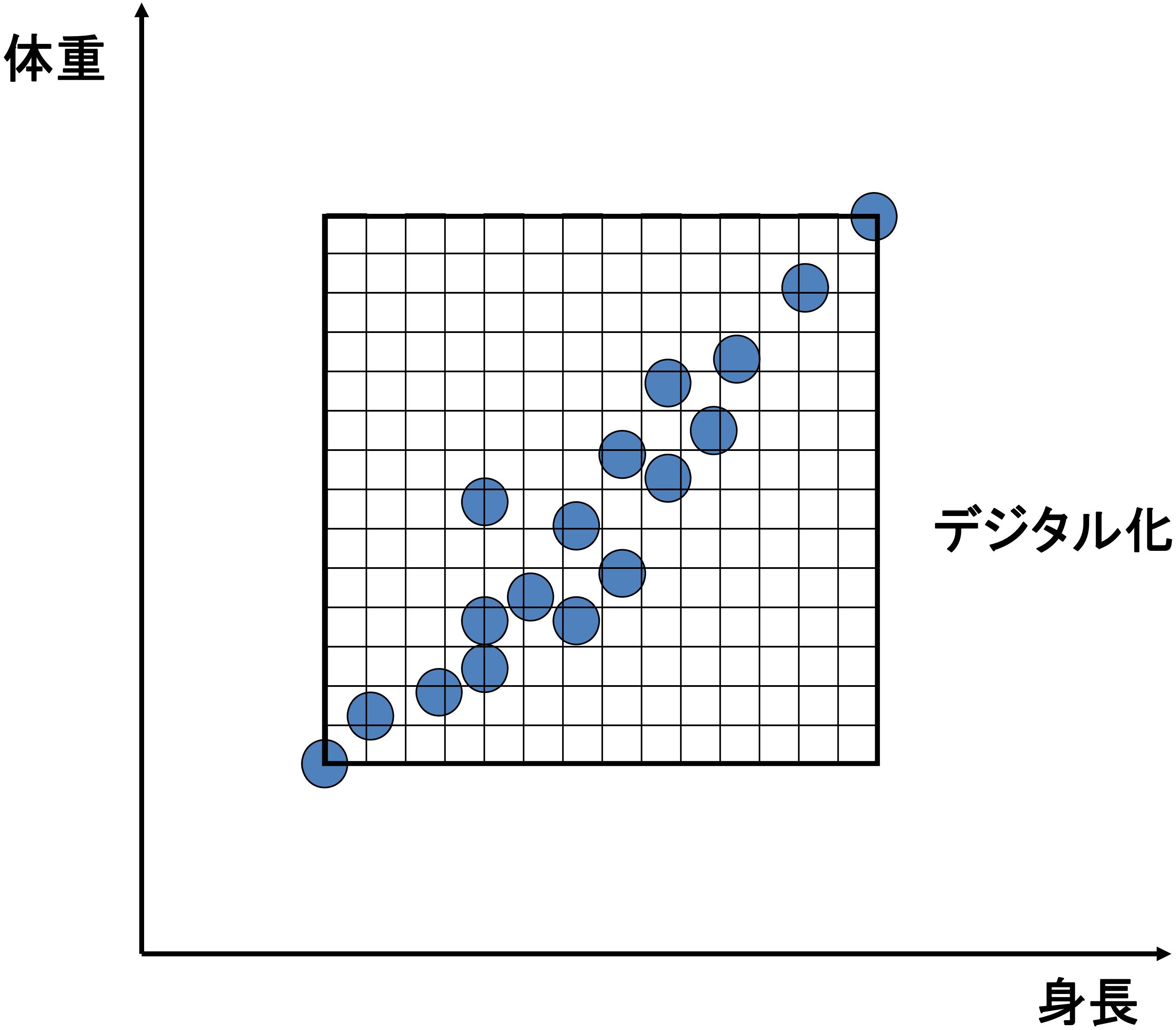
**同一ベクトルを異なる直交座標系（直交基底）で表現**

# 直交変換の利点

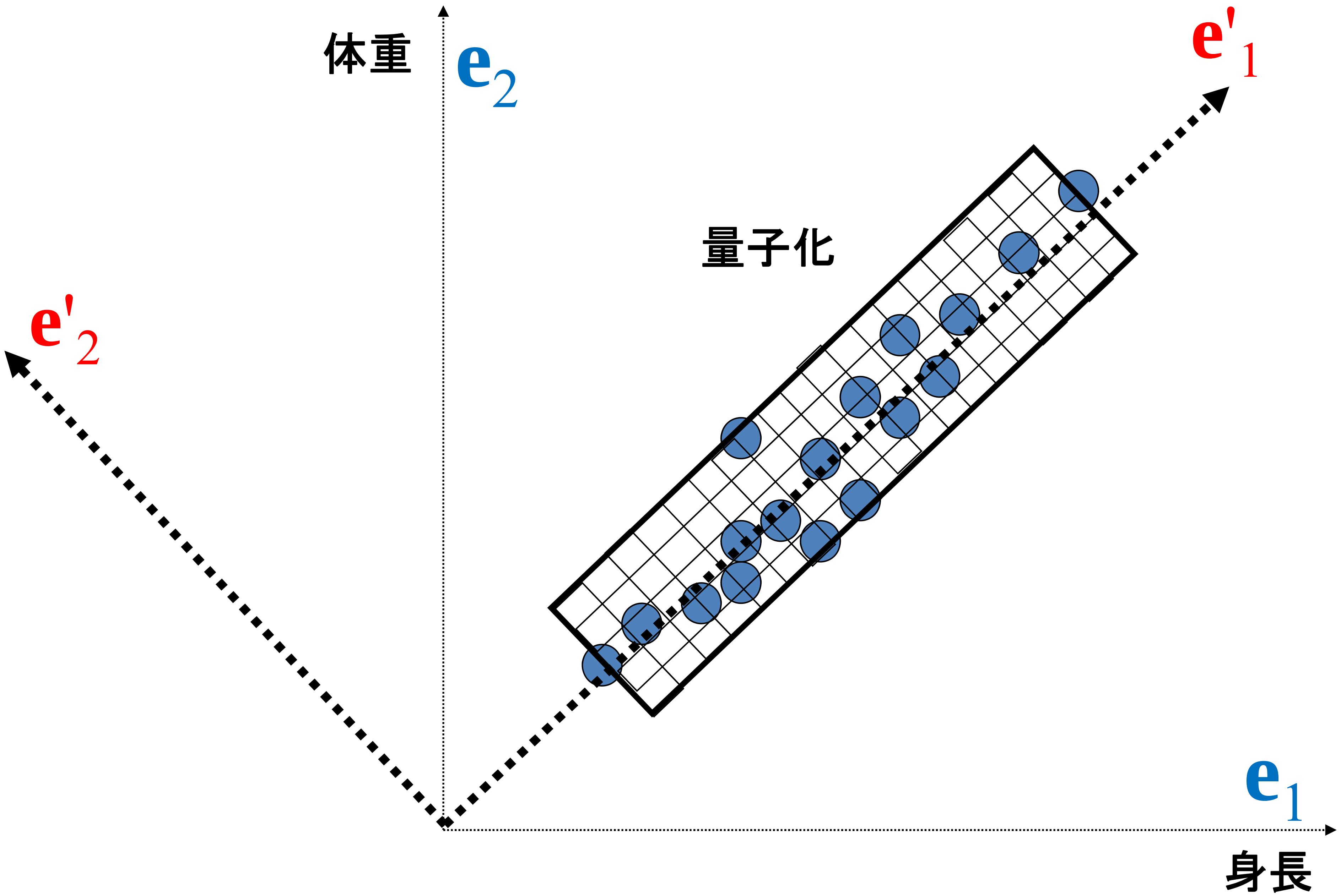
# 直交変換の利点



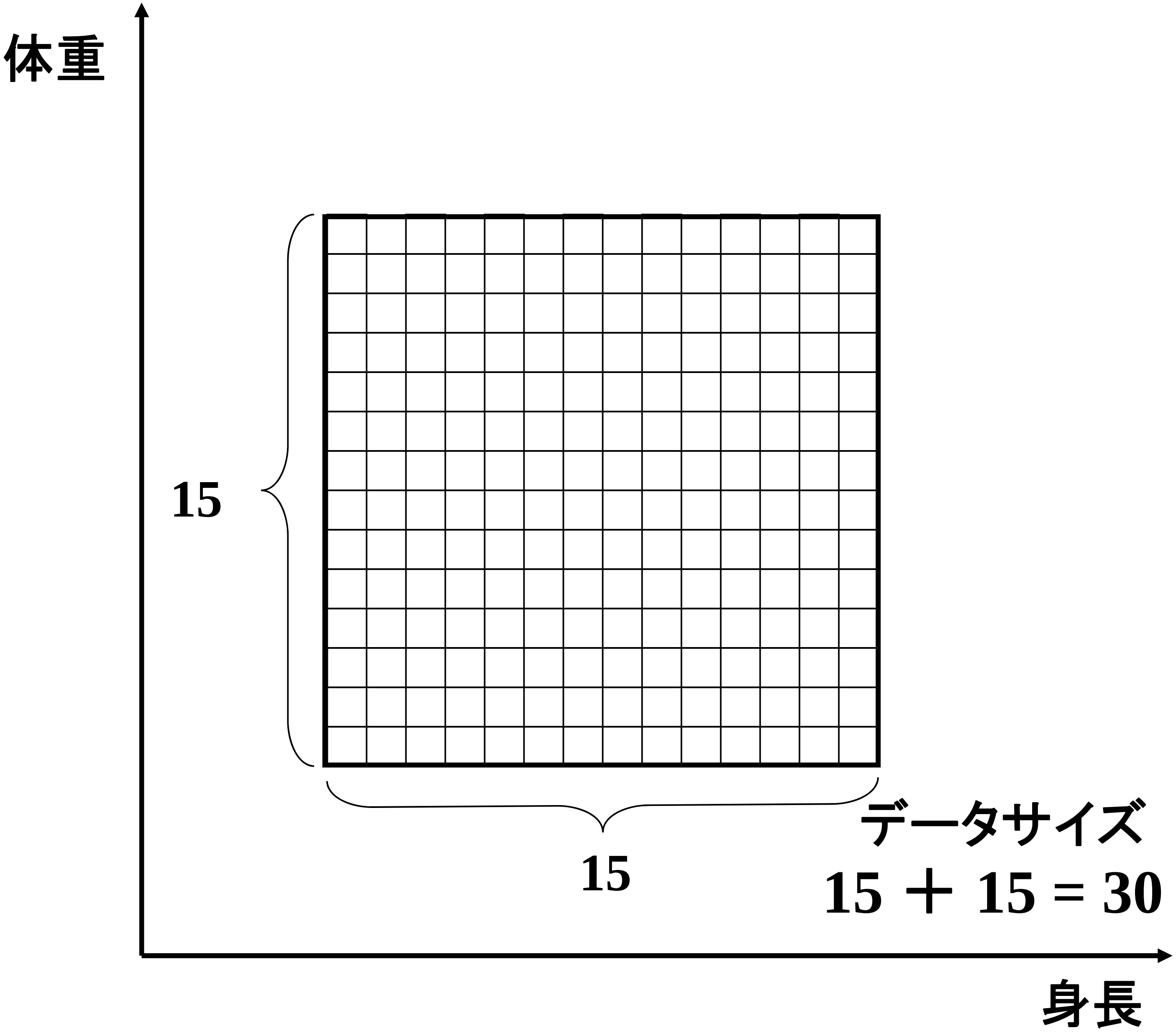
# 直交変換の利点



# 直交変換の利点

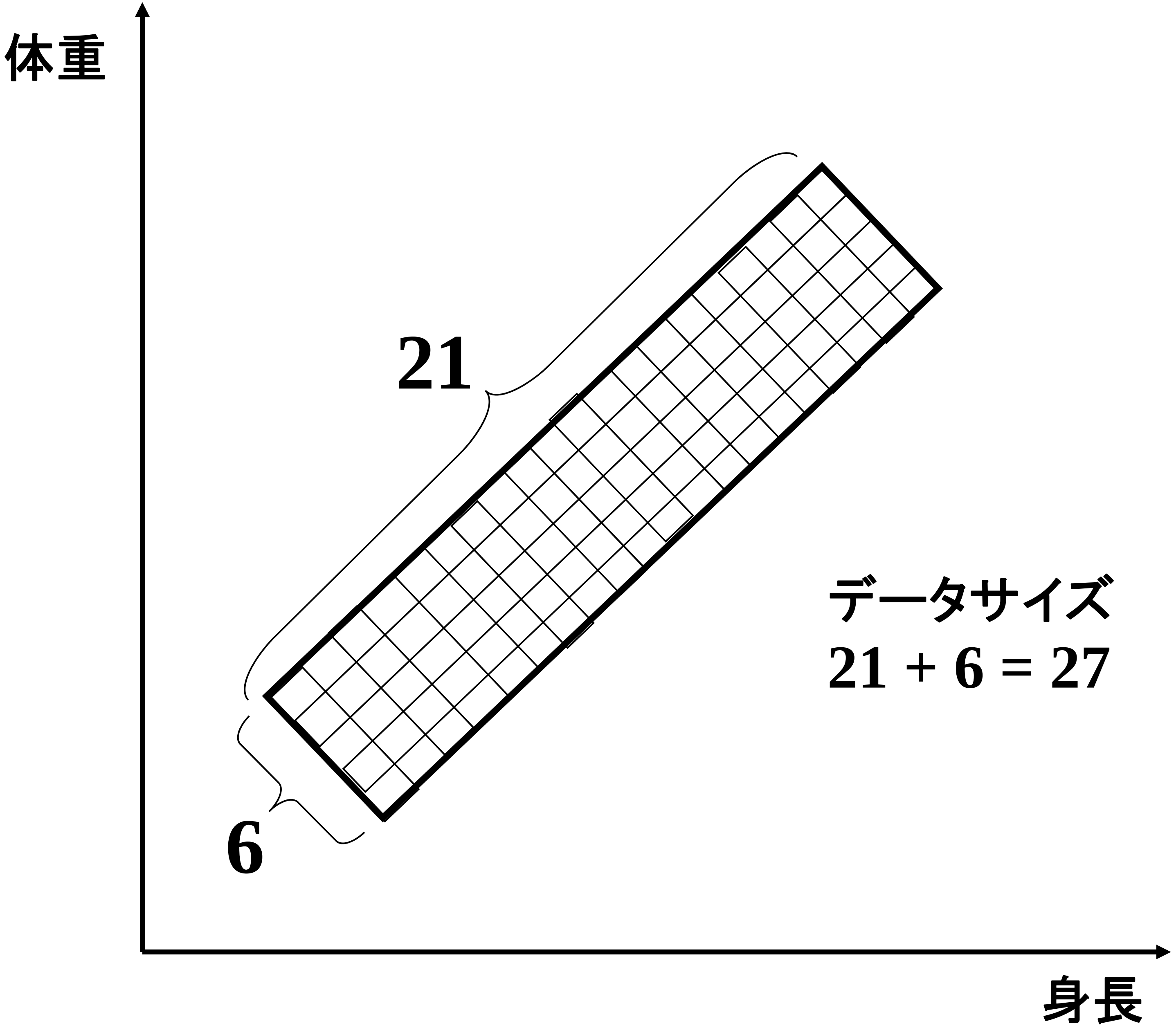


# 直交変換の利点



データサイズ
15 ＋ 15 = 30

# 直交変換の利点



データサイズ
21 + 6 = 27

# 直交変換の利点

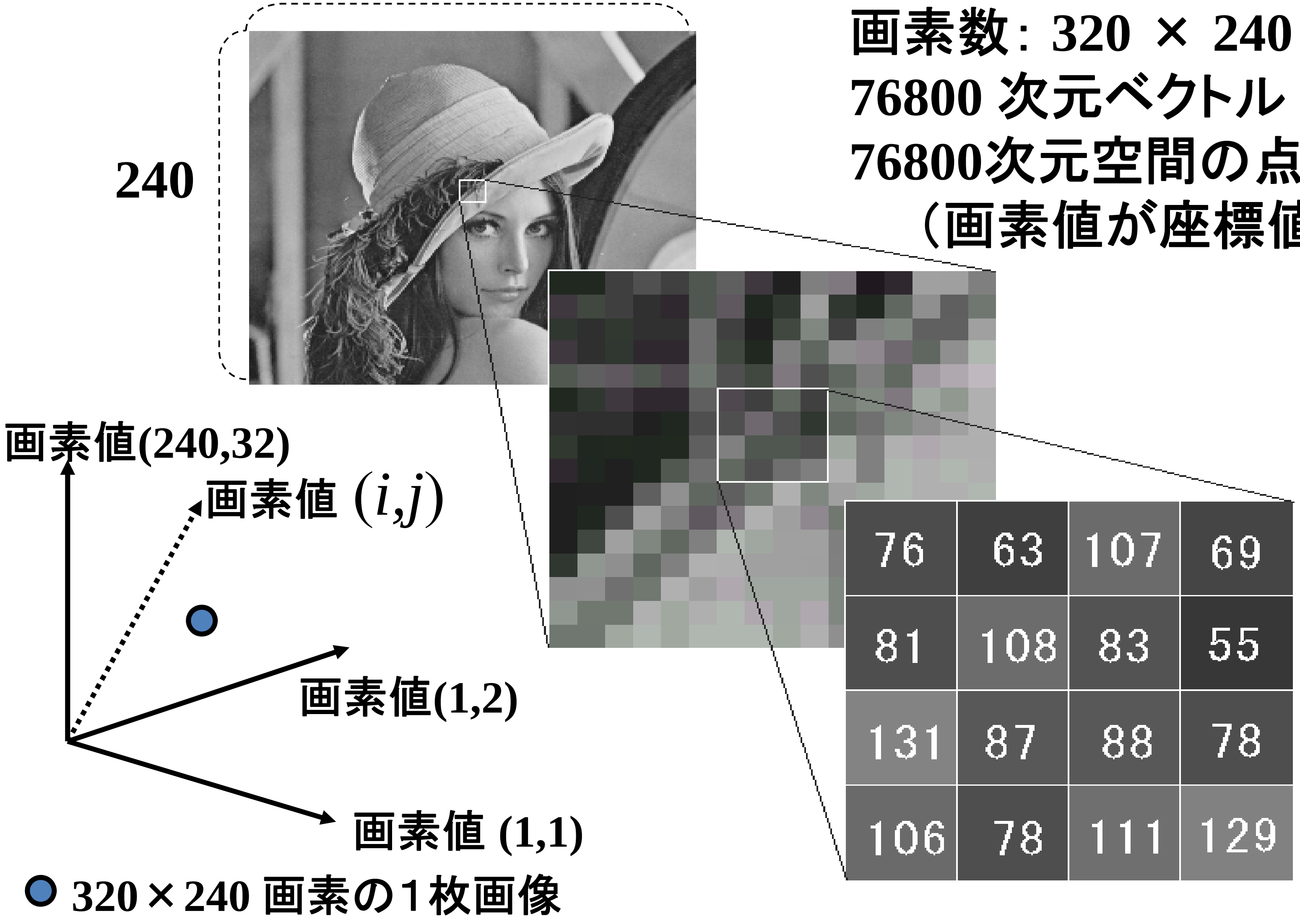
- 身長、体重の２変数
  - データサイズ 15 + 15 = 30
  - 身長がわかれば、体重の範囲は限られる。よって、直交変換後
    - データサイズ 21 + 6 = 27
- 身長、体重、胸囲、座高、股下の６変数
  - データサイズ 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75
  - 身長と体重がわかれば、胸囲の範囲はさらに限られる。身長、体重、胸囲がわかれば、座高の範囲はさらにさらに限られる。。。。。。。よって、直交変換後
    - データサイズ 21 + 6 + 5 + 4 + 2 = 38
- 直交変換により、（まったくのランダム雑音＝無相関データ以外は）多変数（＝多次元ベクトル）のデータサイズを大幅に小さくできる。

- 例えば、画像も一種の多次元ベクトルである。

# 多次元ベクトルとしての画像データ

- 320×240画素、各画素256階調：256＝$2^8$ (8 bit = 1 byte)

**画素数: 320 × 240 = 76800**
**76800 次元ベクトル**
**76800次元空間の点**
**（画素値が座標値）**

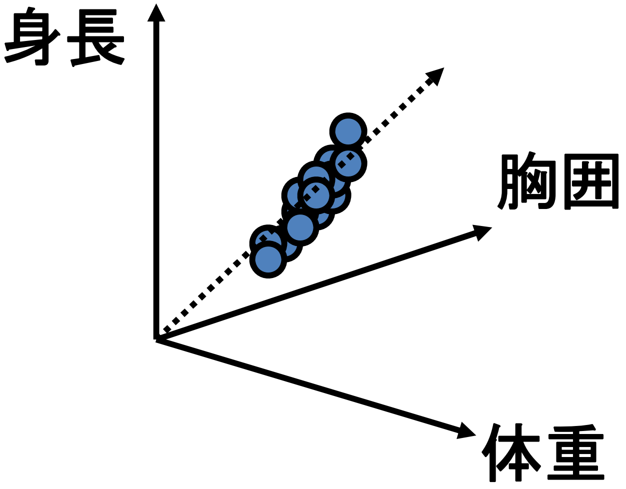


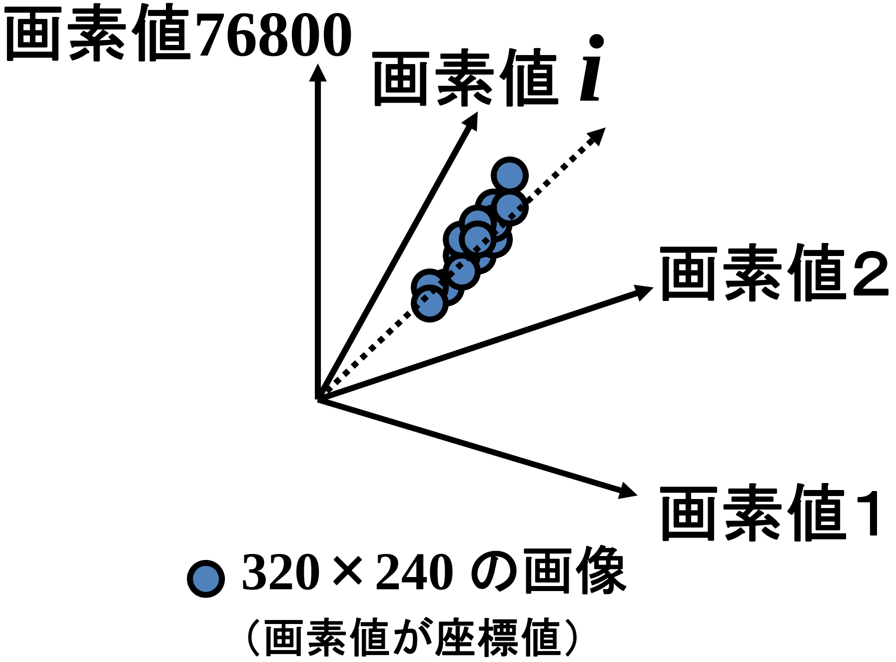
| | | | |
|---|---|---|---|
| 76 | 63 | 107 | 69 |
| 81 | 108 | 83 | 55 |
| 131 | 87 | 88 | 78 |
| 106 | 78 | 111 | 129 |

● **320×240 画素の１枚画像**

# ベクトル空間について

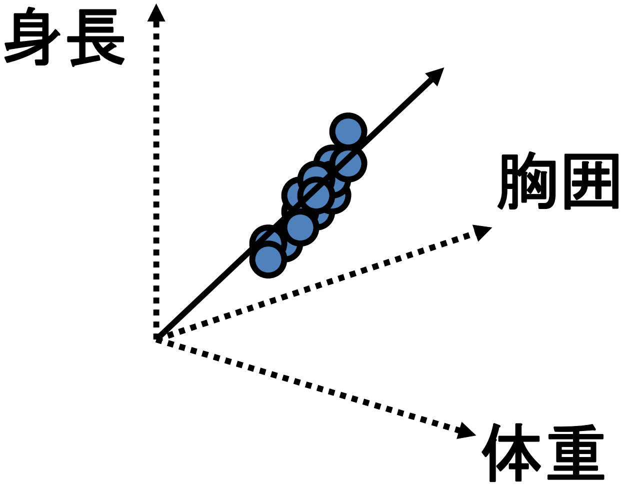
- 各画像は、320×240＝76800次元空間中の点と考えることができるが、76800次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。

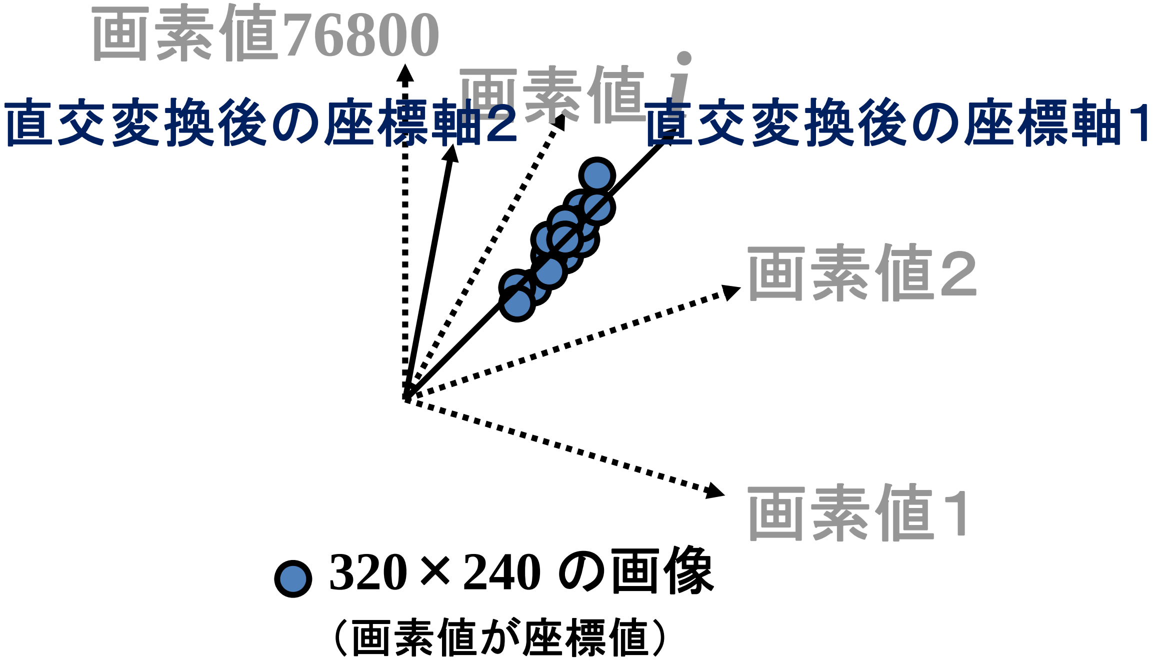




# ベクトル空間について

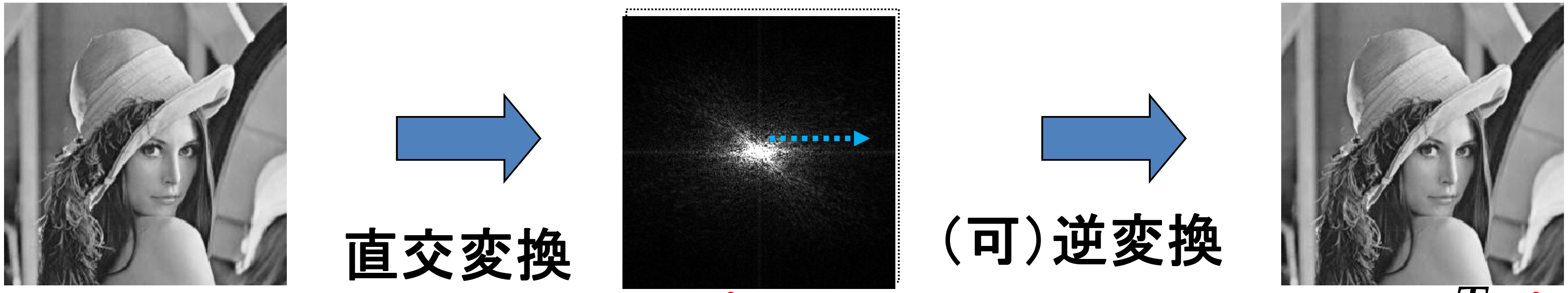
- 各画像は、320×240＝76800次元空間中の点と考えることができるが、76800次元空間の中で、普通の画像は、その空間の一部に密集しており、そのことが、データ圧縮を行える根拠になる。





# 直交変換の応用

- 画像データの圧縮（JPEGなど）



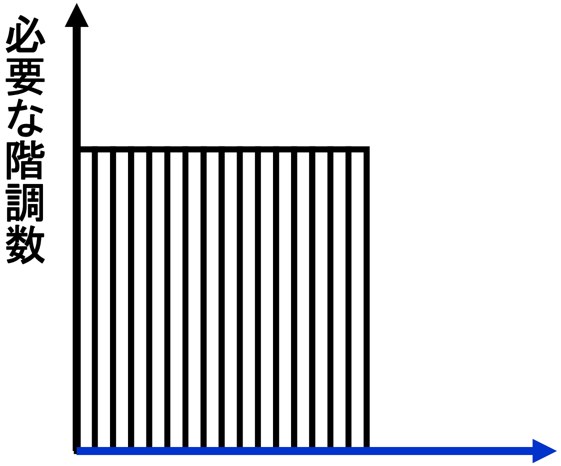
$\mathbf{x}$

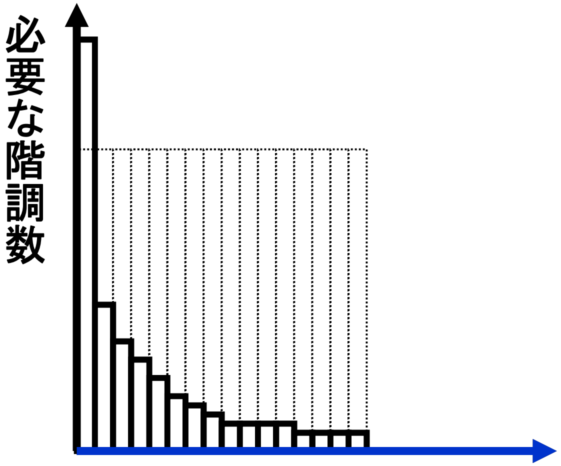
$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

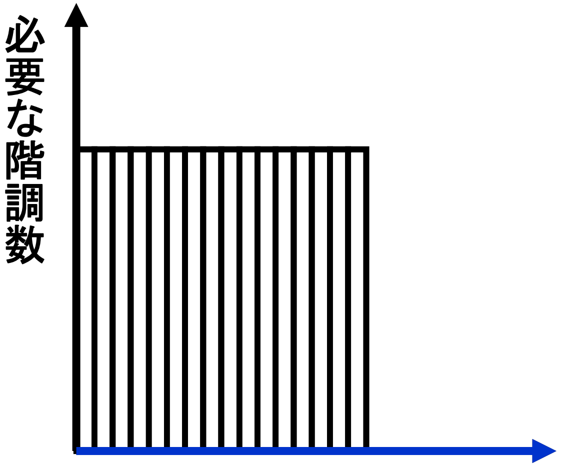
$\mathbf{x} = T^T\mathbf{x}'$

すべての画素が
256階調（8ビット）

画像の場所によって、各画素
あたり1024階調（10ビット）
から2階調（1ビット）

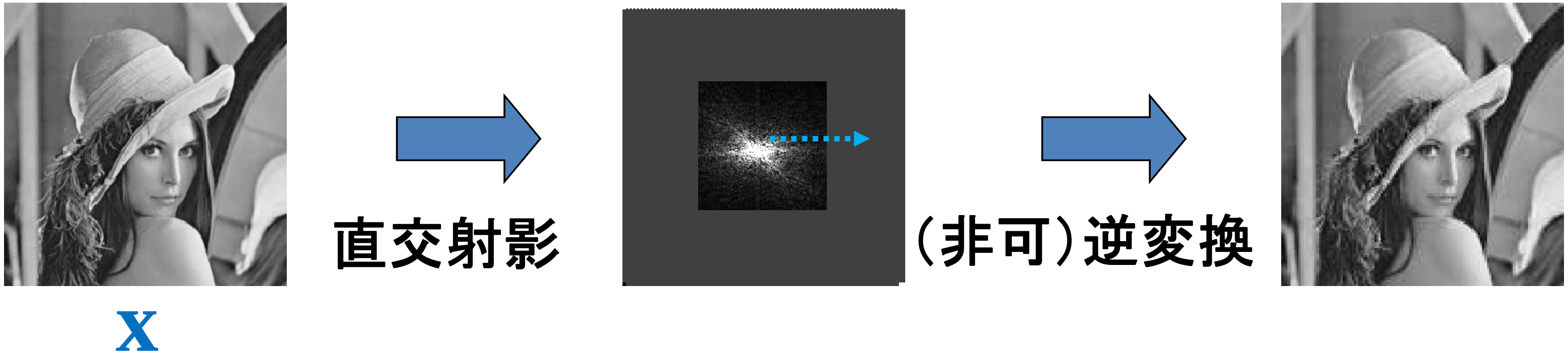






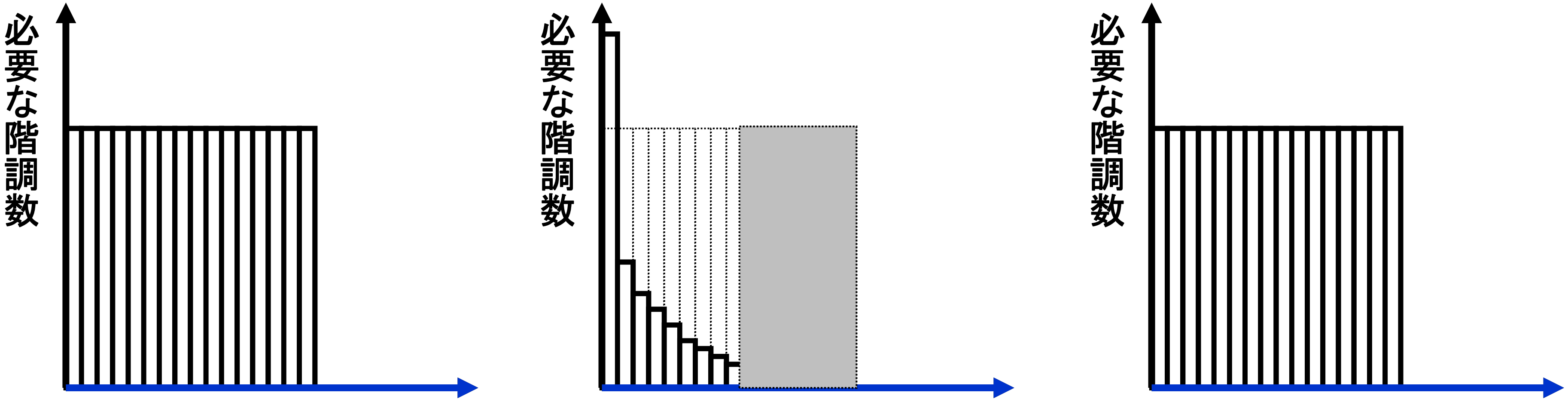
# 直交変換の応用

- 画像データの圧縮（JPEGなど）

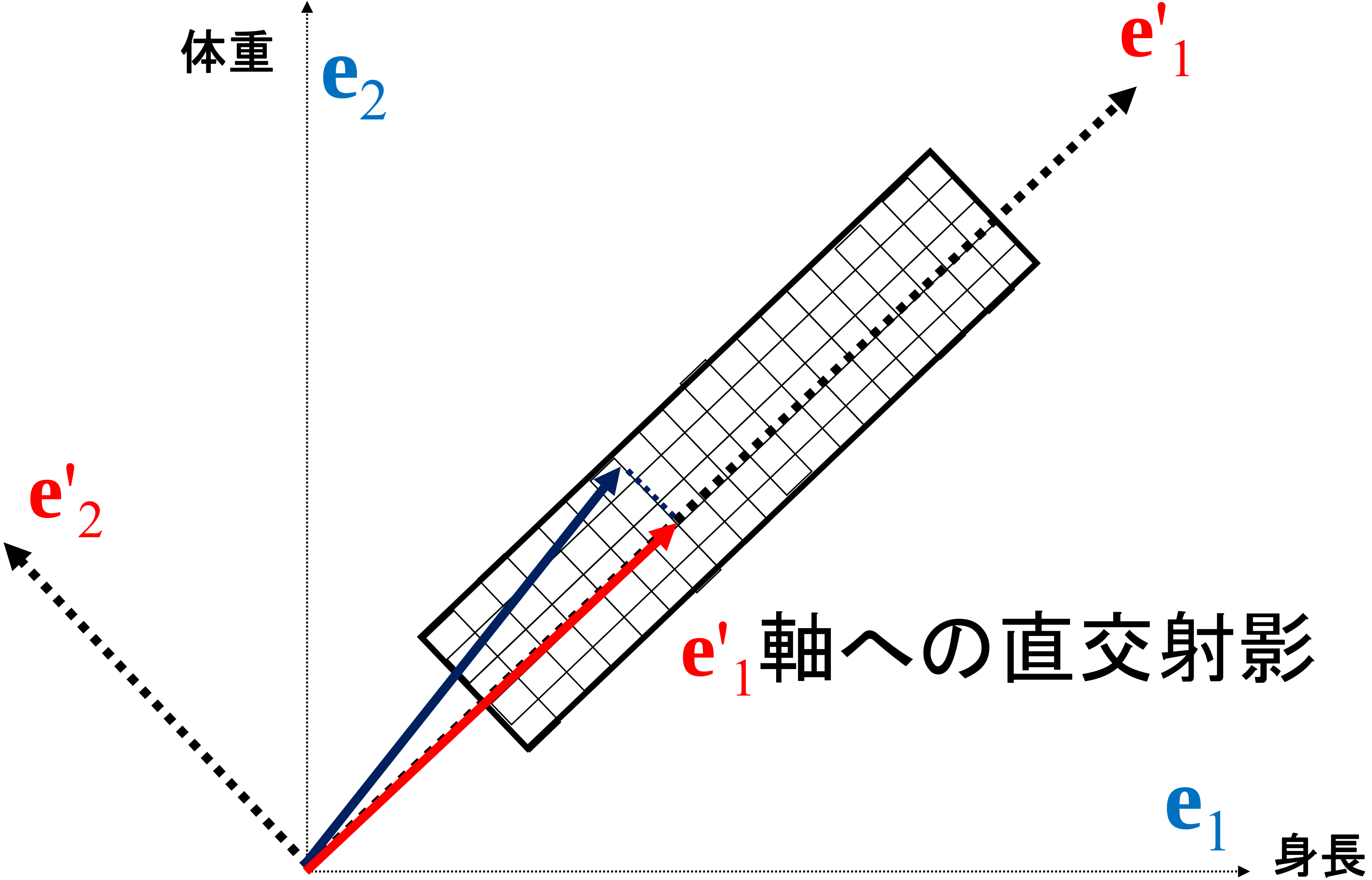


すべての画素が
256階調（8ビット）

画像の場所によって、各画素
あたり1024階調（10ビット）
から2階調（1ビット）

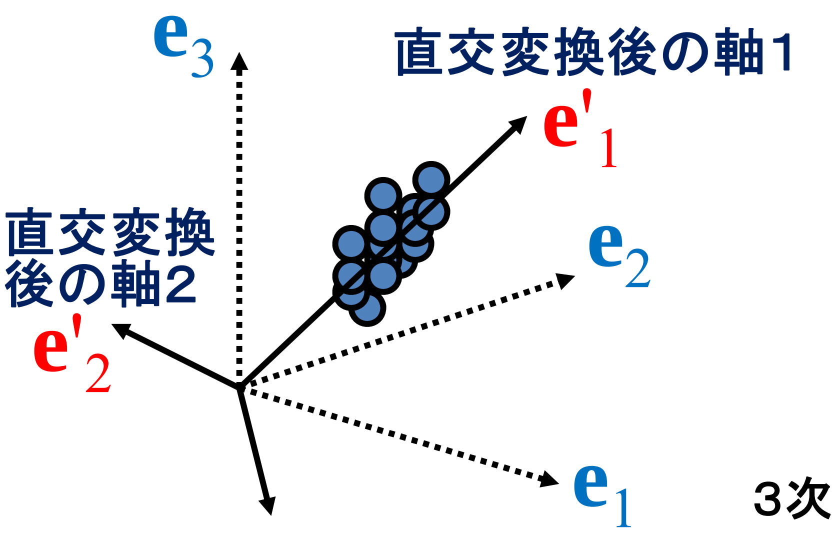


# （部分空間への）直交射影

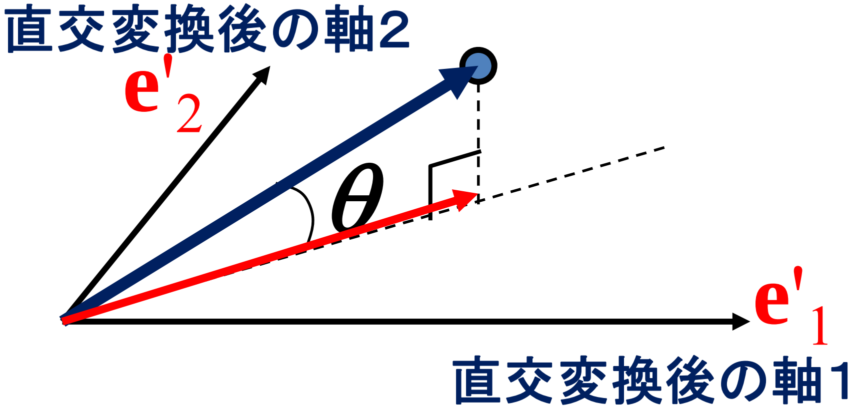

体重
$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e'}_1$
$\mathbf{e'}_2$
$\mathbf{e'}_1$軸への直交射影
$\mathbf{e}_1$
身長

# 部分空間への直交射影

- 直交変換後、寄与の小さい軸を省略することで、データ次元数を減らして、データ量を削減する。



3次元空間の点を軸1と軸2で定まる
2次元平面に射影

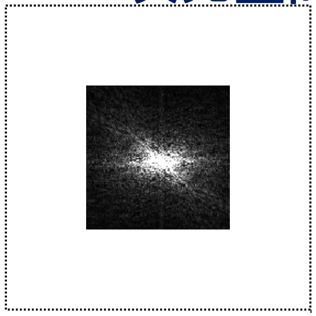


3次元空間中の点を2次元平面に射影する。
N次元空間中の点をM次元超平面に射影する。(N>M)

320×240次元空間の点

直交変換

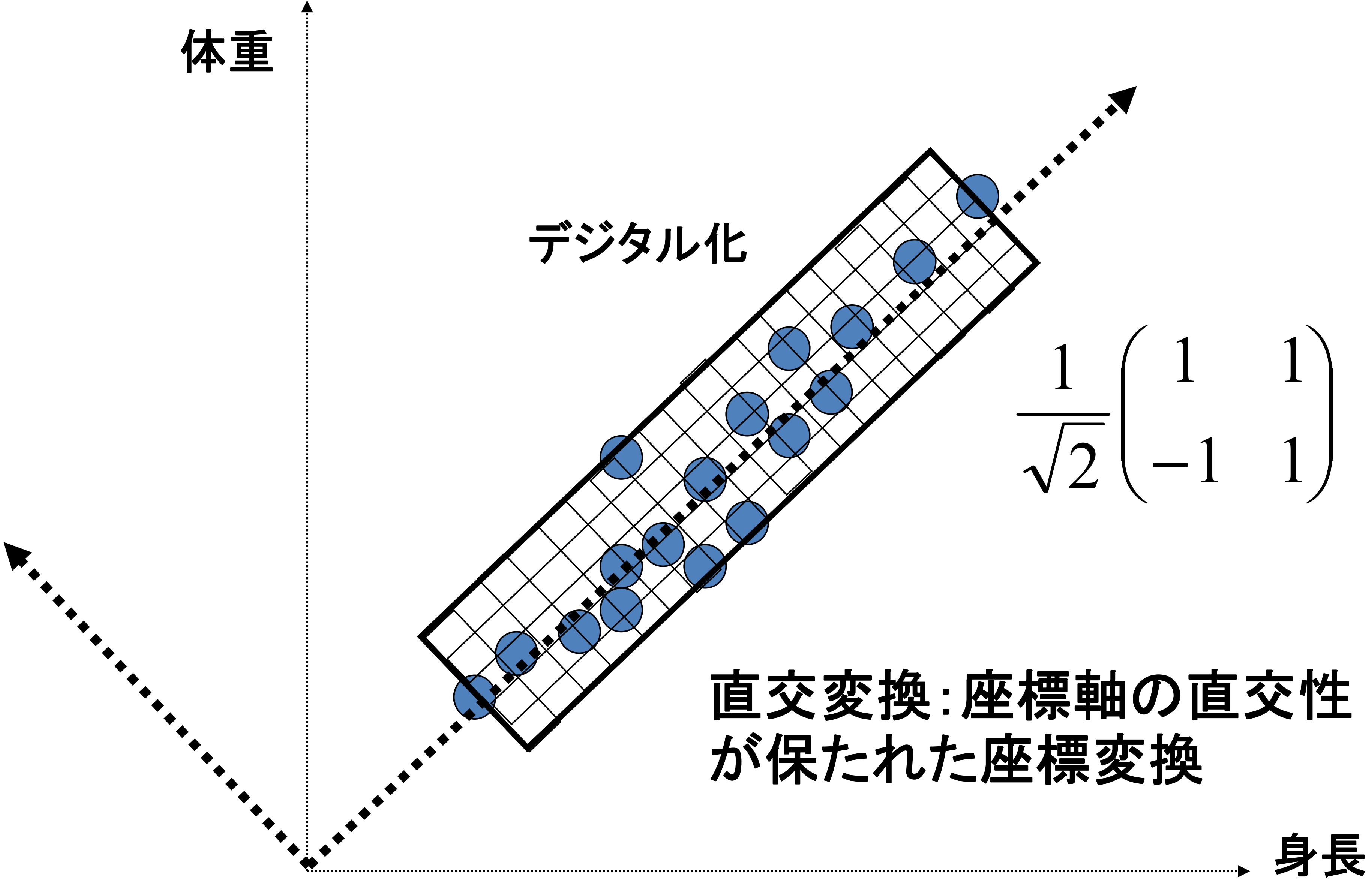
160×120次元空間の点



320×240次元空間の点を
160×120次元超平面に射影

# 直交（変換）であることの必要性

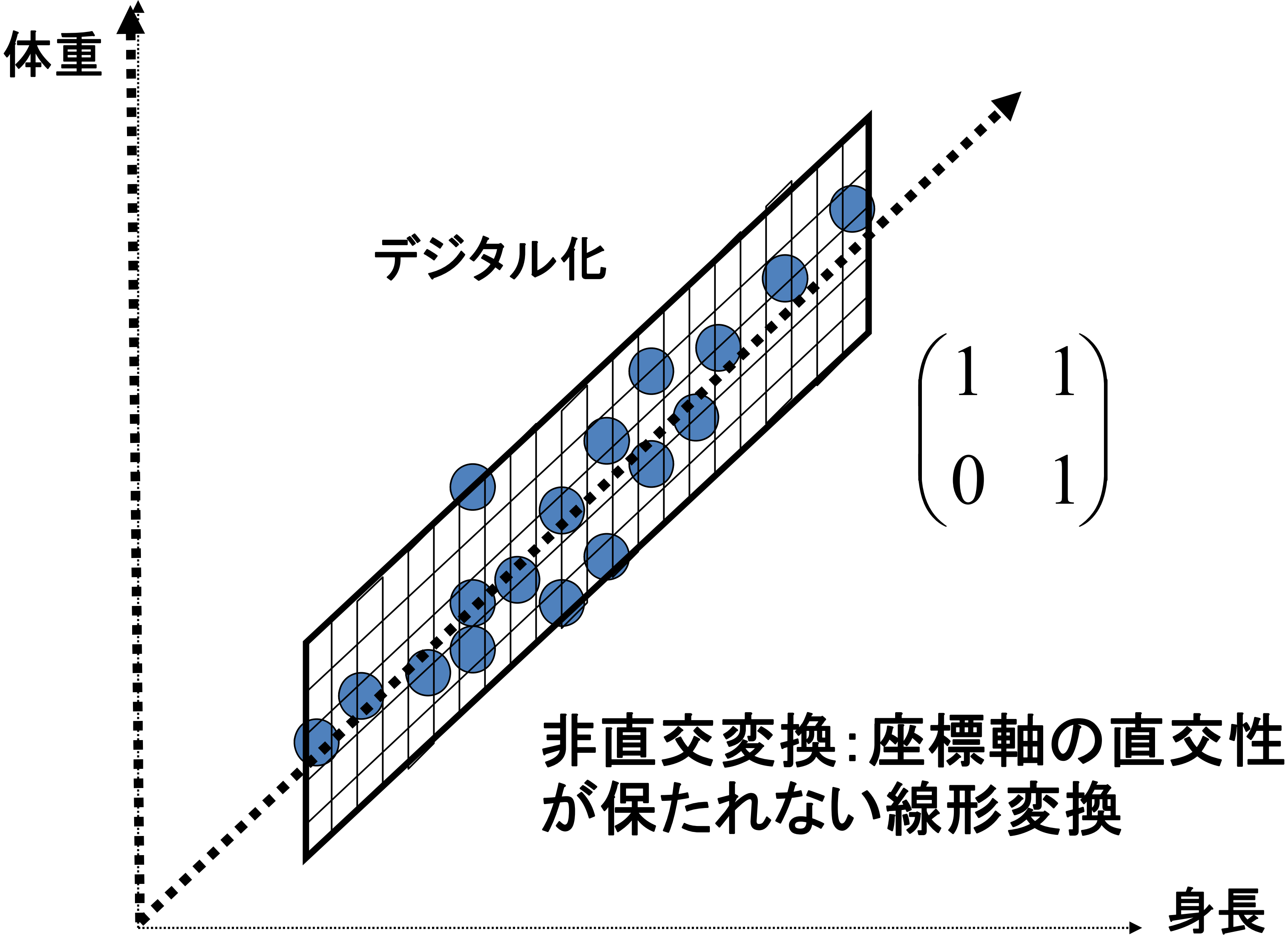
# 直交（変換）であることの必要性



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

直交変換：座標軸の直交性
が保たれた座標変換

# 非直交変換（直交でない線形変換）

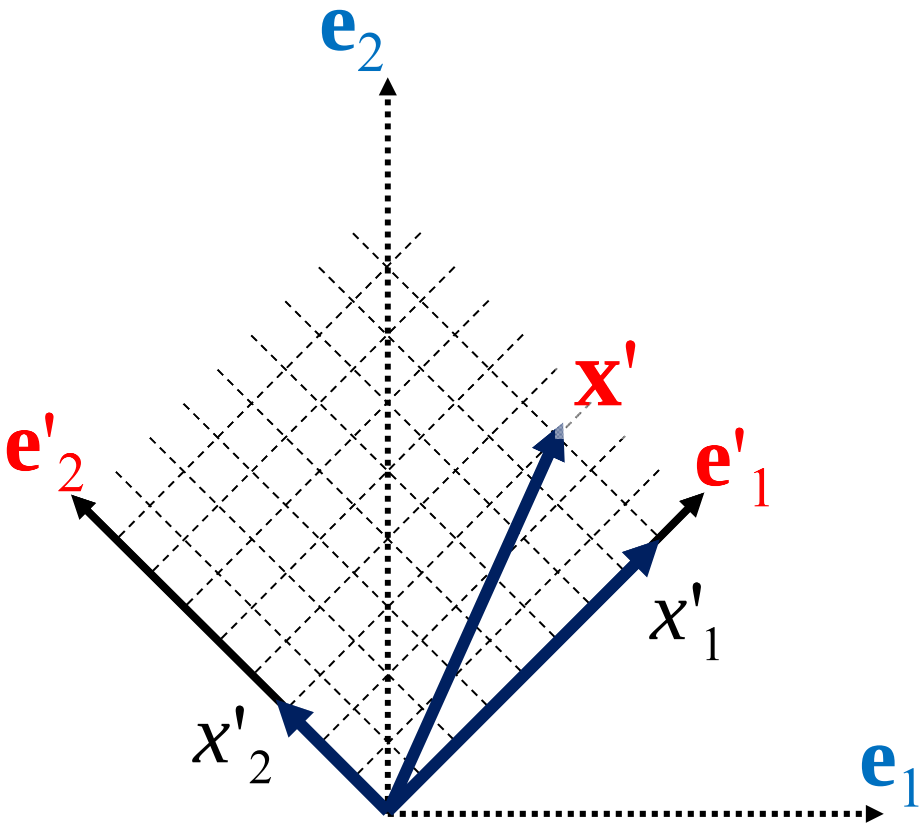


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

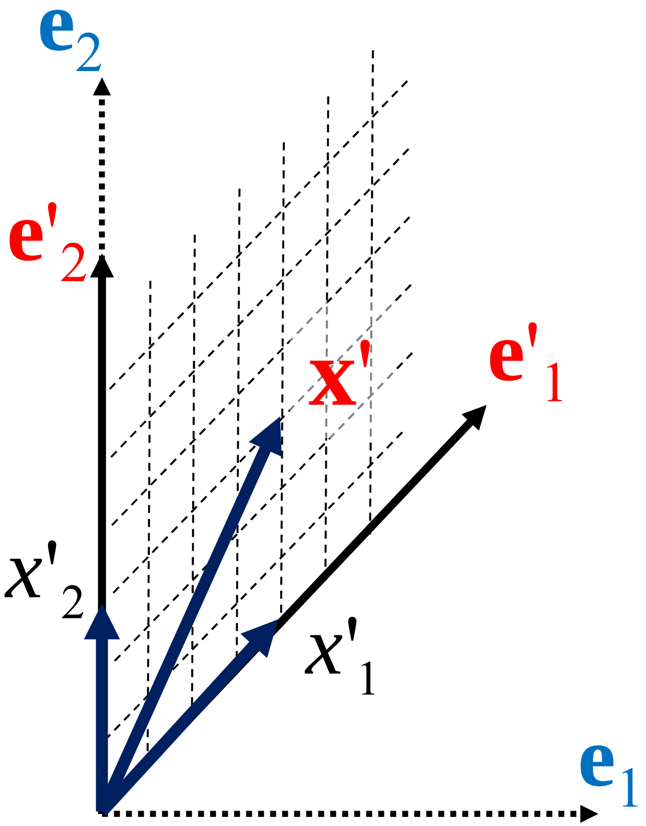
非直交変換：座標軸の直交性が保たれない線形変換

# 直交（変換）であることの必要性

$$\mathbf{x}' = x_1 \mathbf{e}'_1 + x_2 \mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$$



$$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$



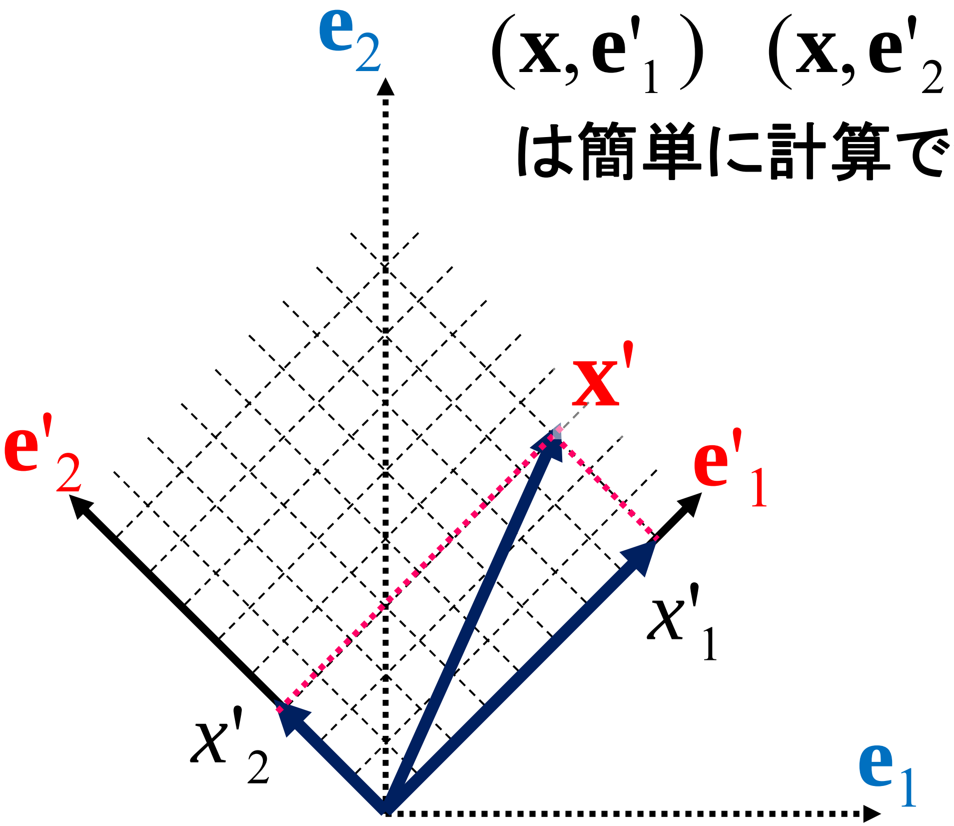
$$x'_1 + x'_2 (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 + x'_1 (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

# 直交（変換）であることの必要性

$$\mathbf{x}' = x_1 \mathbf{e}'_1 + x_2 \mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$$

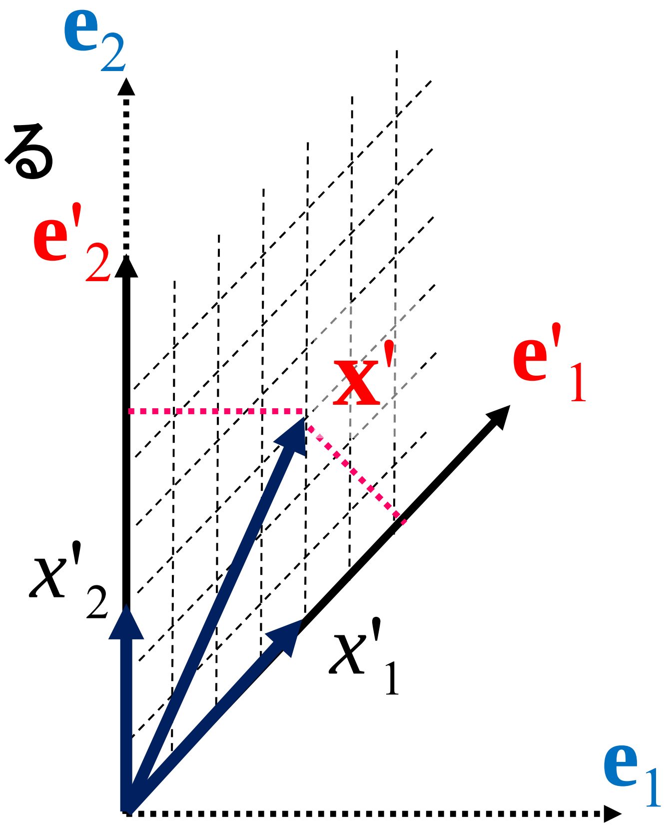
$(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$　$(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$

は簡単に計算できる



$$x'_1 = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)}$$

$$x'_2 = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)}$$



$$x'_1 + x'_2 (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)}$$

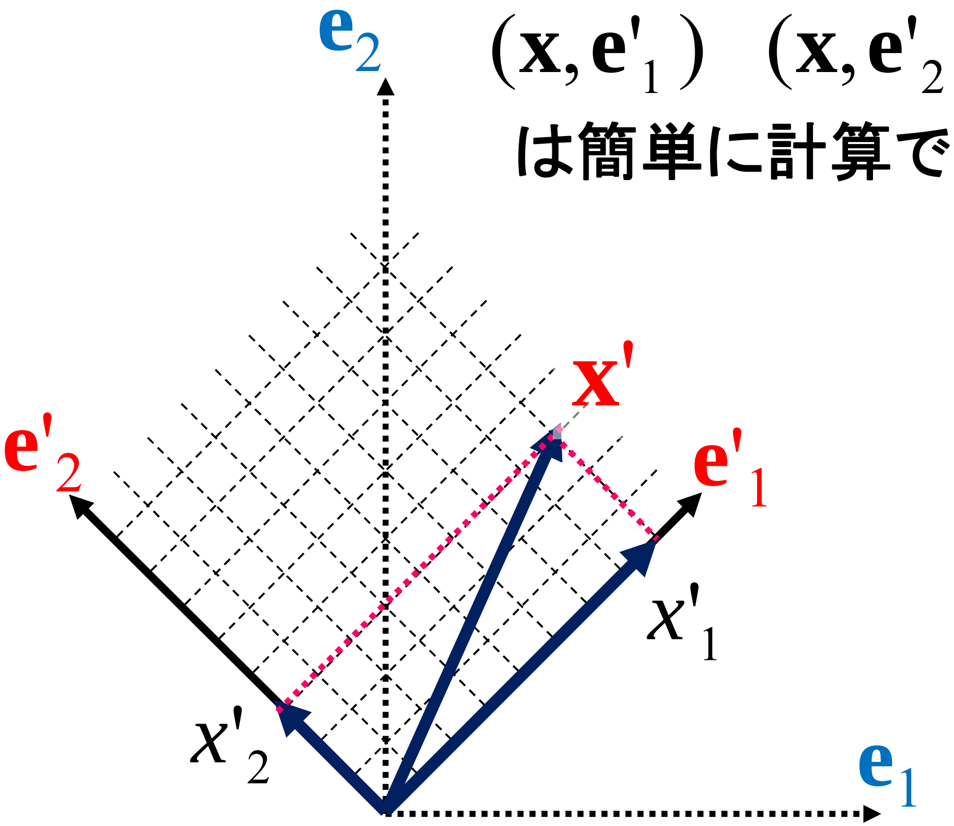
$$x'_2 + x'_1 (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = \boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)}$$

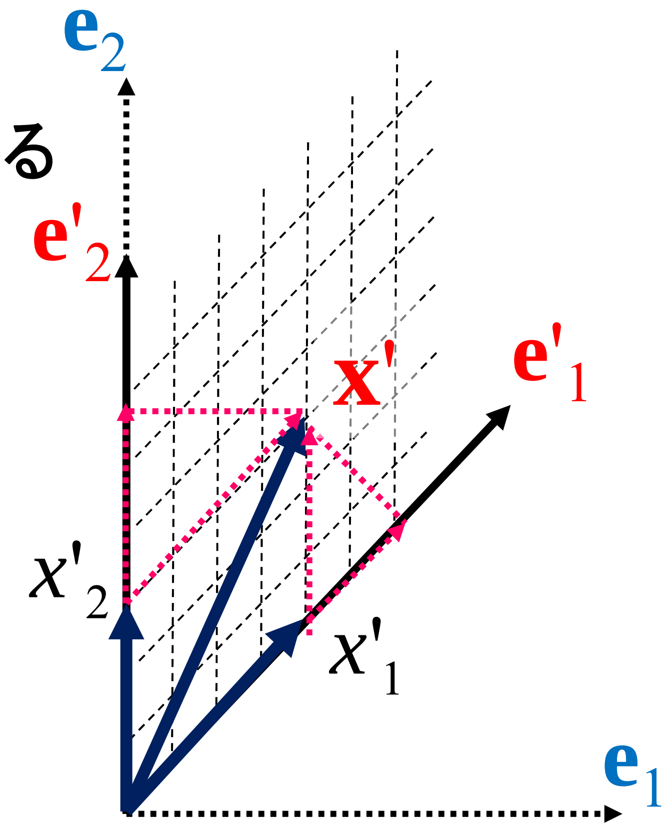
# 直交（変換）であることの必要性

$$\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 \qquad \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$$

$(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$ $(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$

は簡単に計算できる





$$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

$$x'_1 + x'_2(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 + x'_1(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

# 直交（変換）であることの必要性

- 直交変換の場合、変換後の座標値$x'_1, x'_2$は、元のベクトルと座標軸（基底ベクトル）の内積をとるだけで、計算できる。

$$x'_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

- 直交変換でない場合、変換後の座標値$x'_1, x'_2$を求めるためには、連立方程式を解かなければならない。

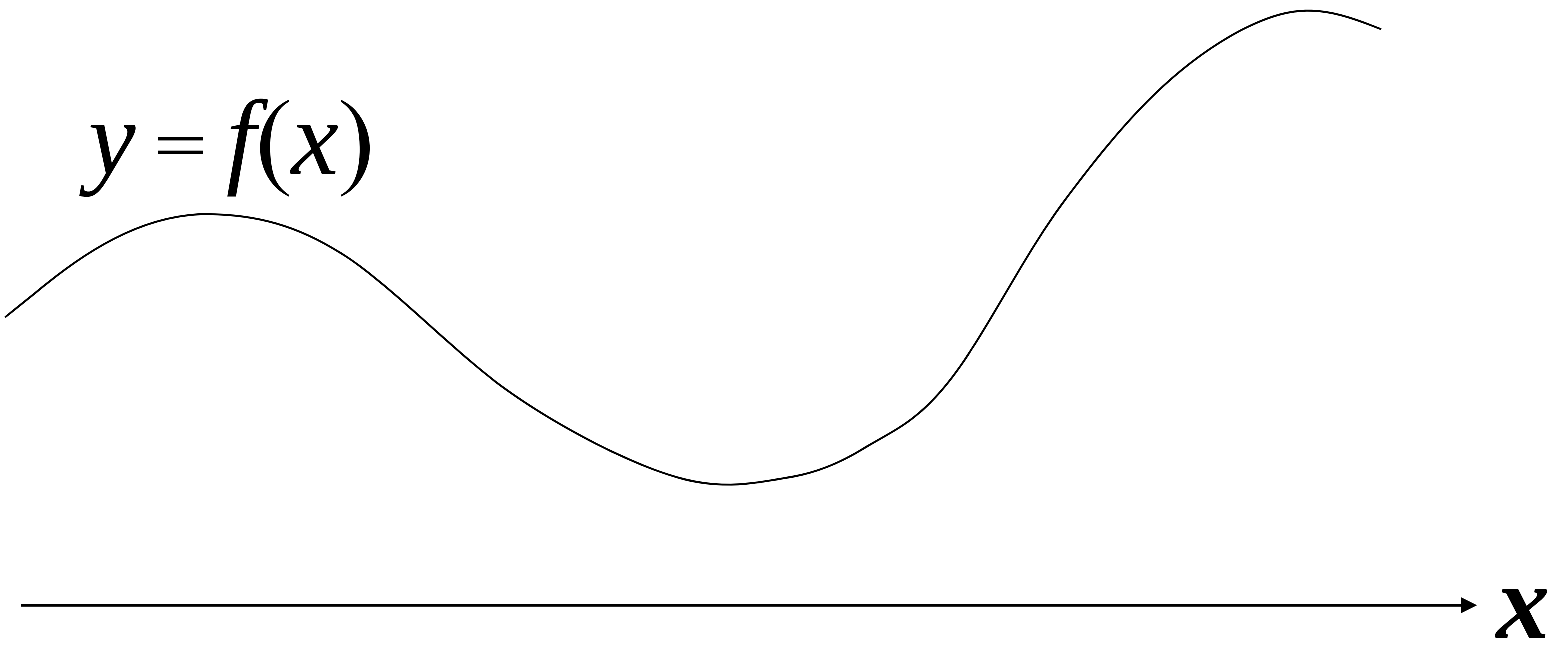
$$x'_1 + x'_2 (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1)$$
$$x'_2 + x'_1 (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}'_2)$$

- 320×240=76800、160×120=19200などの大量の座標値を求める場合には、大量の未知数の連立方程式を解くのは、計算機でも非常に手間がかかる。

# ベクトルから関数へ

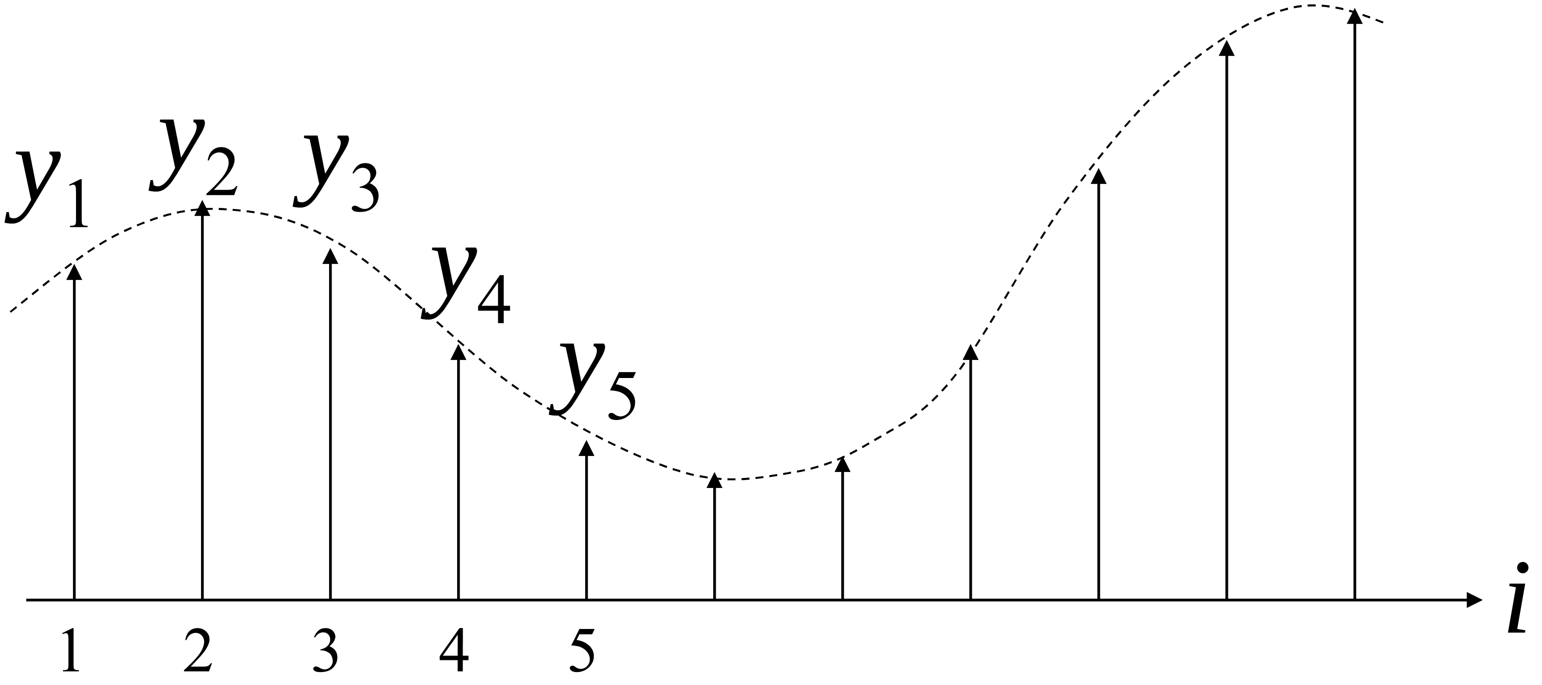
# 関数はベクトルである

- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$



# 関数はベクトルである

- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$



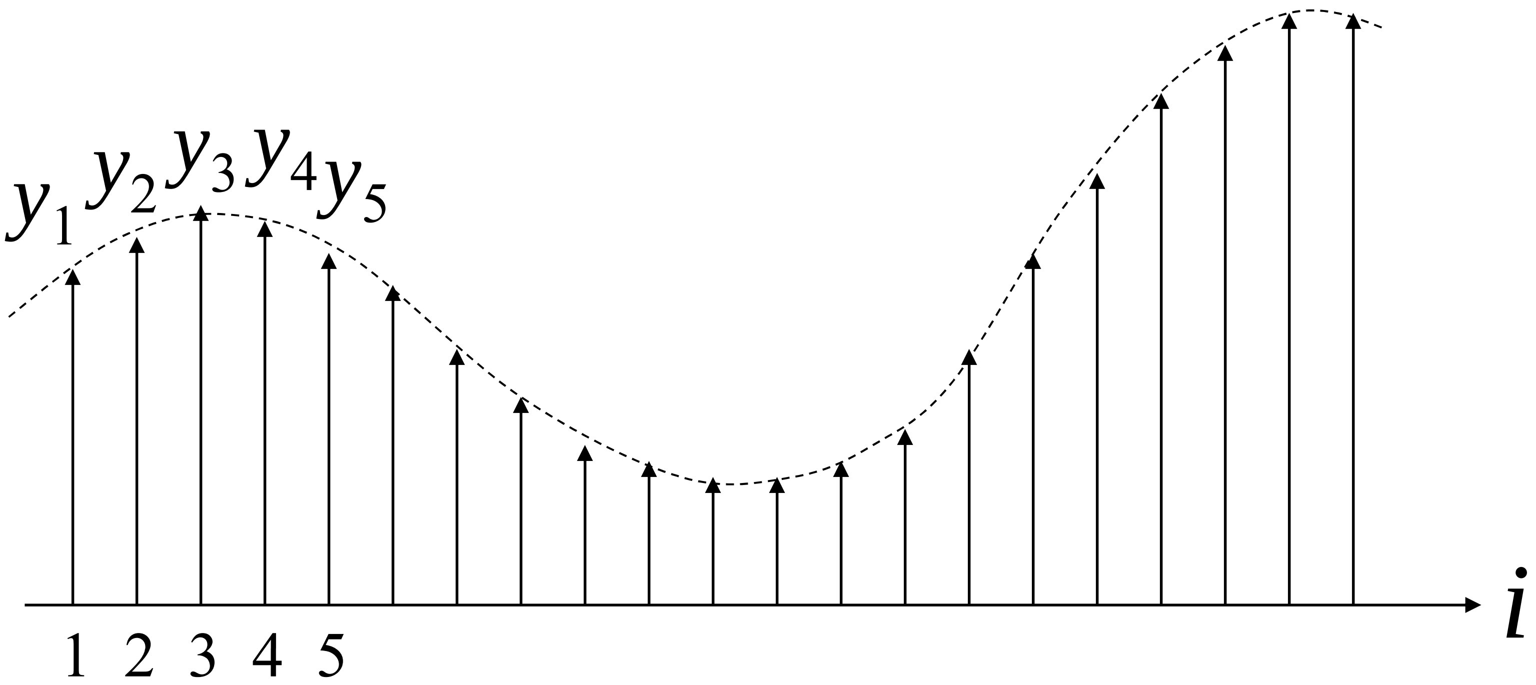
ある飲食店にいる客の数を1時間おきに調べてみる。

# 関数はベクトルである

- 関数：$y = f(x)$

$n$を$2n$にする

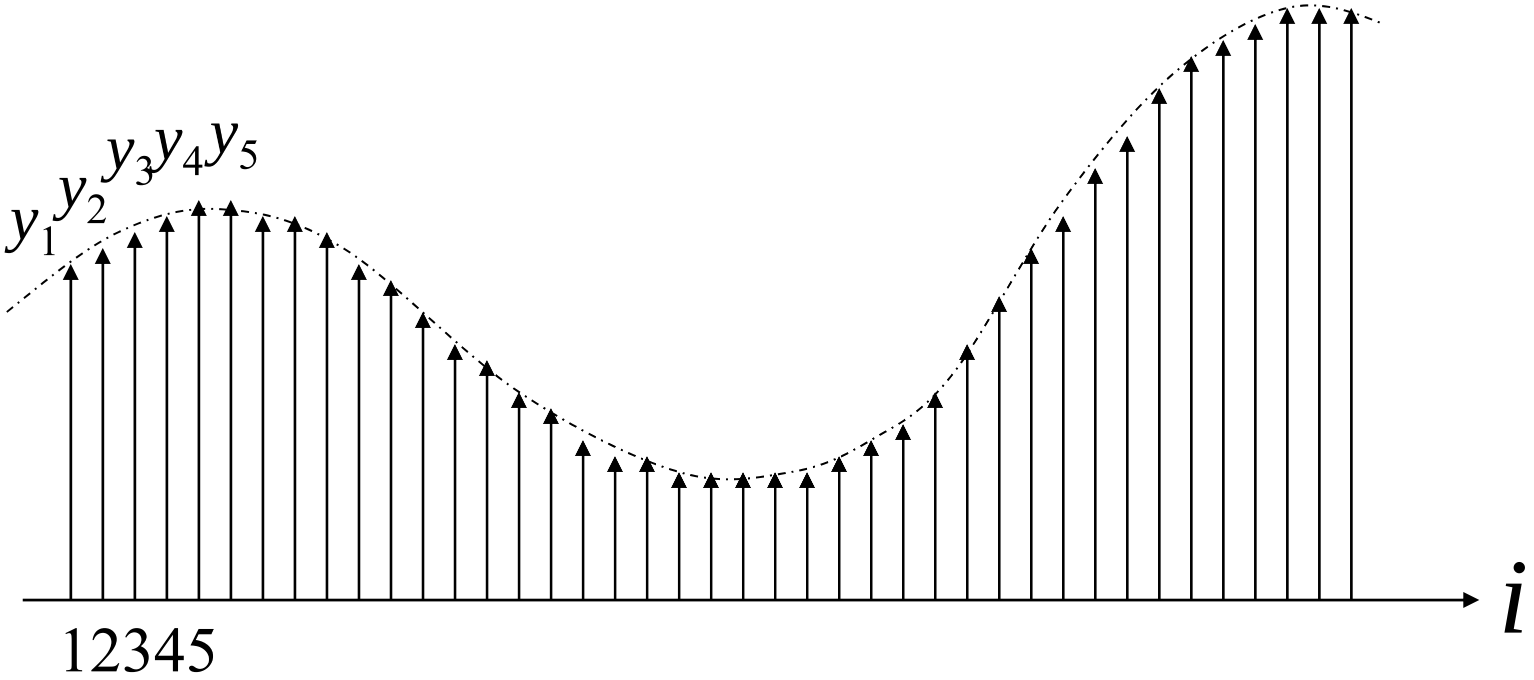
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{2n})$



ある飲食店にいる客の数を３０分おきに調べてみる。

# 関数はベクトルである

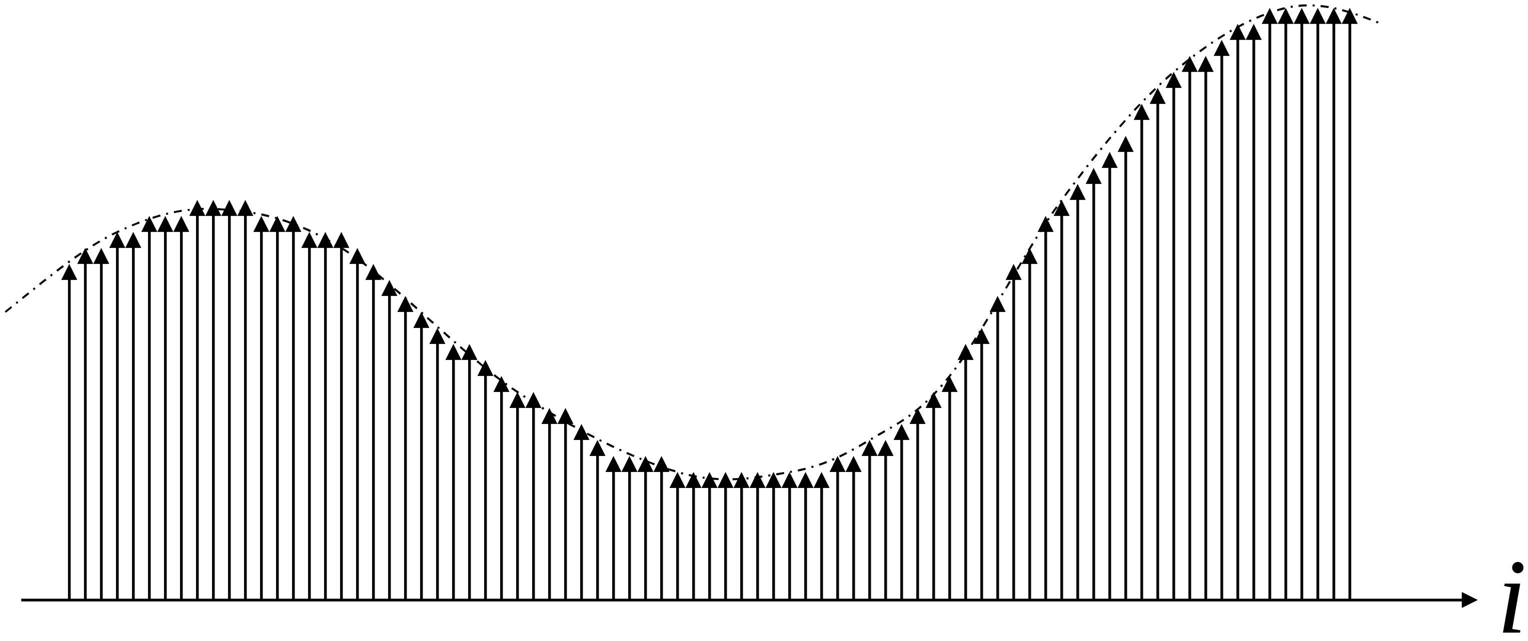
- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{4n})$



ある飲食店にいる客の数を１５分おきに調べてみる。

# 関数はベクトルである

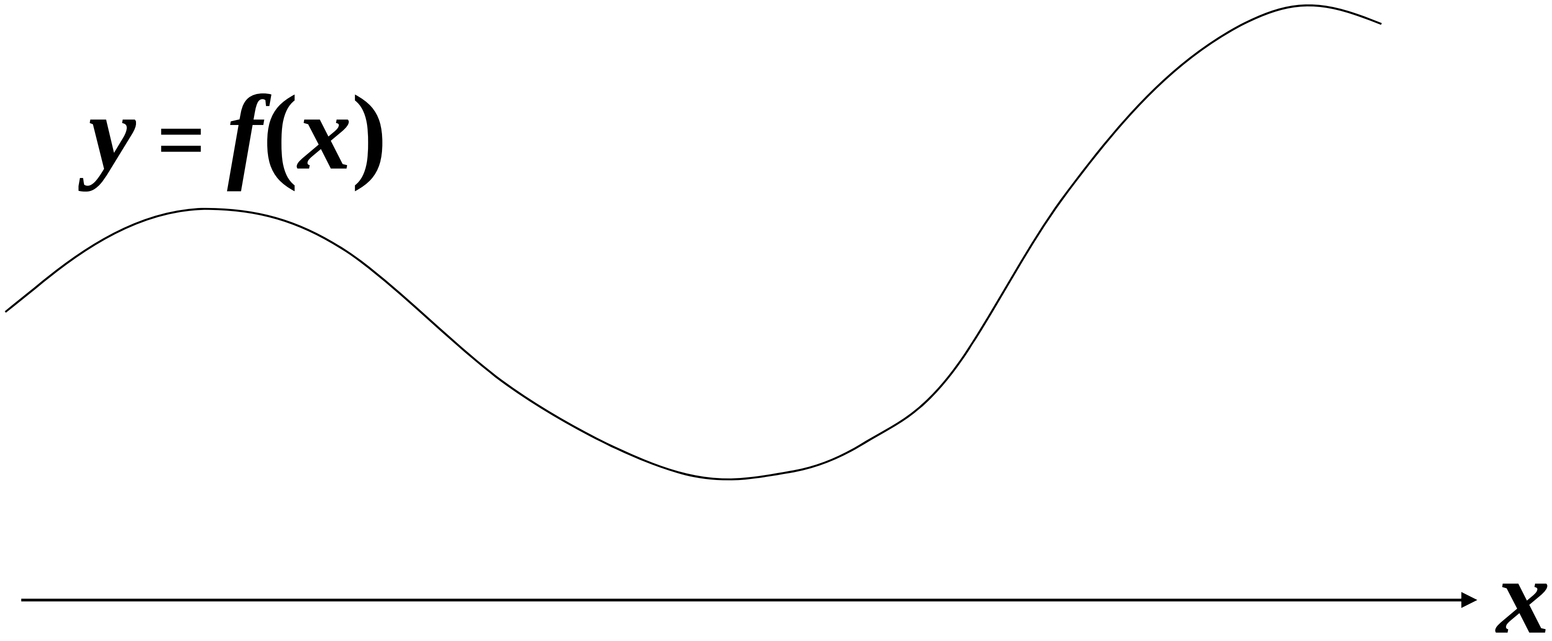
- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_{8n})$



**ある飲食店にいる客の数を7.5分おきに調べてみる。**

# 関数は（無限次元）ベクトルである

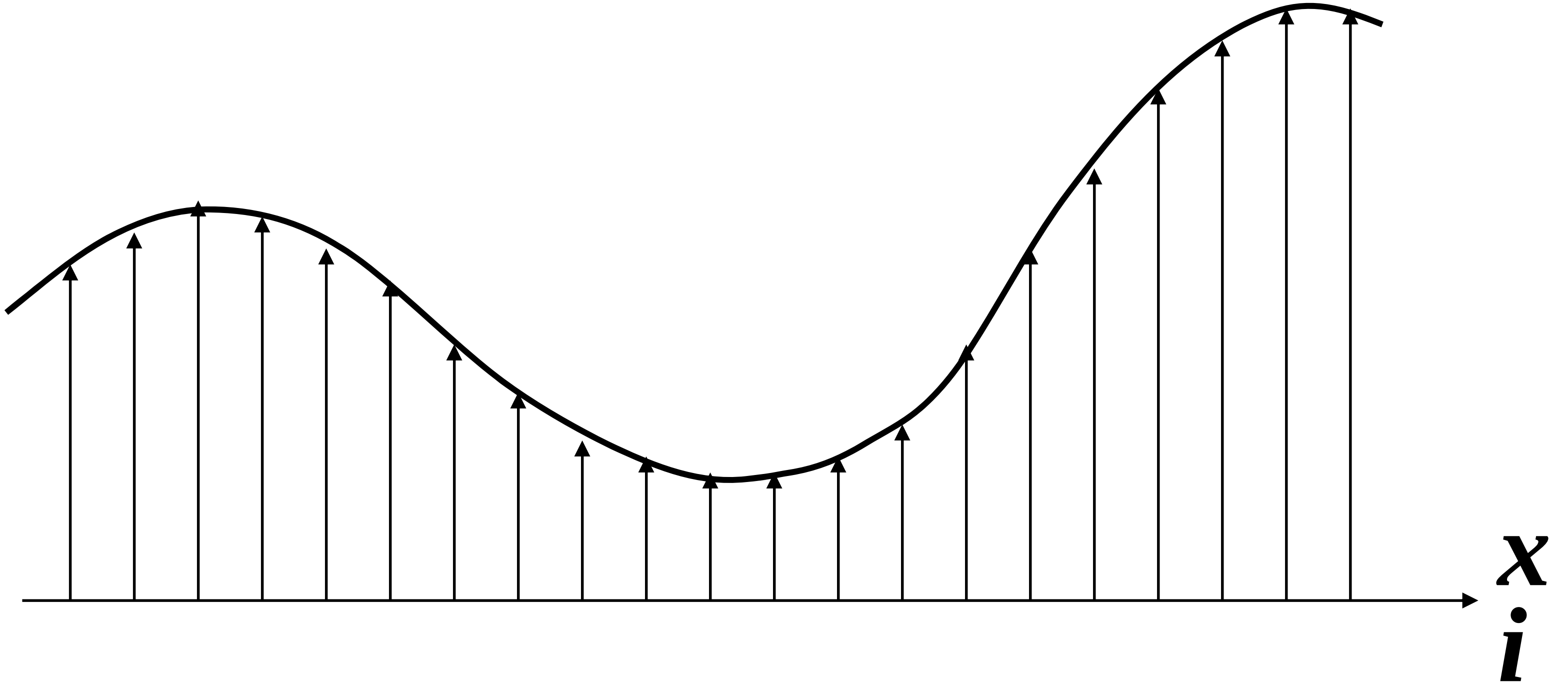
- 関数：$y = f(x)$
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_\infty)$



ある飲食店にいる客の数を常時調べる。

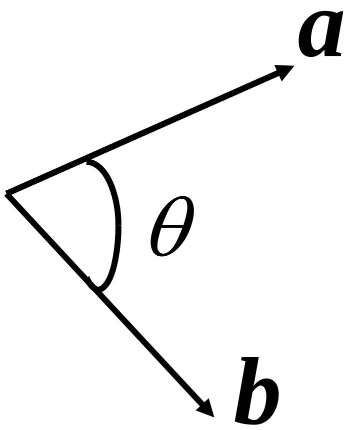
# 関数は（無限次元）ベクトルである

- 関数：$y = f(x)$　連続的
- ベクトル：$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$　離散的



# ベクトルの直交条件

- $n$次元ベクトルの場合



$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

$$\boldsymbol{b}= (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)$$

**直交条件　＝　内積がゼロ**

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ \ldots + a_ib_i + \ldots + a_nb_n$$

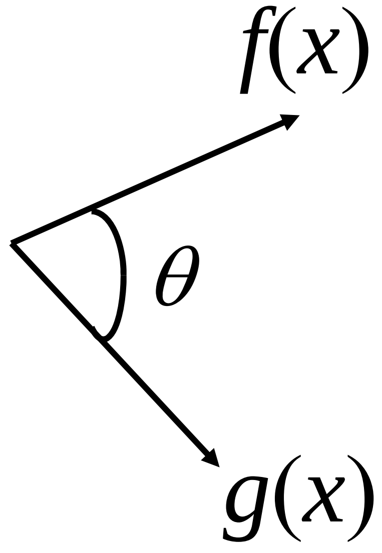
$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} a_ib_i = |a| \cdot |b| \cos\theta = 0$$

# 関数（無限次元ベクトル）の直交条件

- 関数の場合

$$y = f(x)$$

$$y = g(x)$$



**直交条件　＝　内積がゼロ**

$$\begin{aligned}&(f(x), g(x))\\&= \int f(x)g(x)dx\\&= \left|f(x)\right| \cdot \left|g(x)\right| \cos\theta\end{aligned}$$

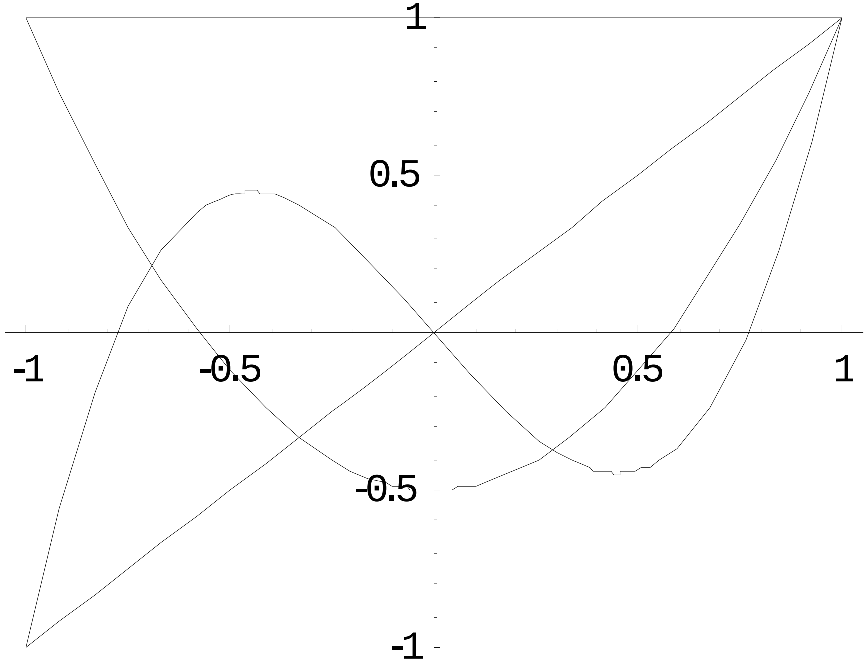
# 直交関数系

# 直交関数系

## 互いに直交する一連の関数の集合

- ルジャンドルの多項式

$$P_n(x), n = 1,2,3,\ldots.(-1 \le x \le 1)$$



$$P_0(x) = 1$$

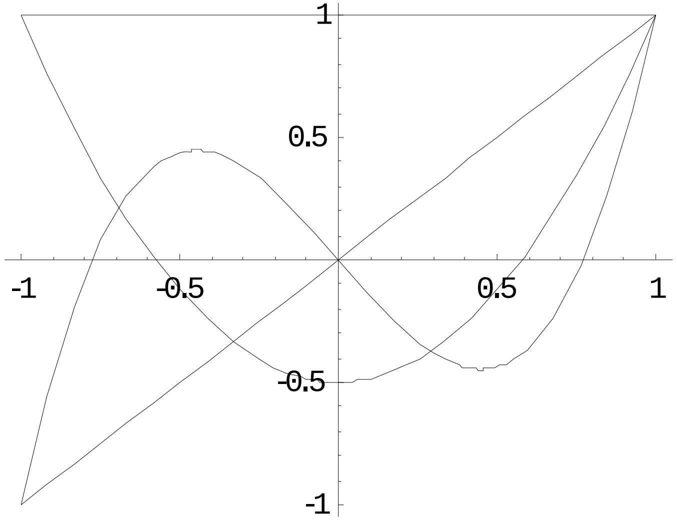
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

# 直交関数系

- ルジャンドルの多項式　$P_n(x), n = 1,2,3,....(-1 \leq x \leq 1)$



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

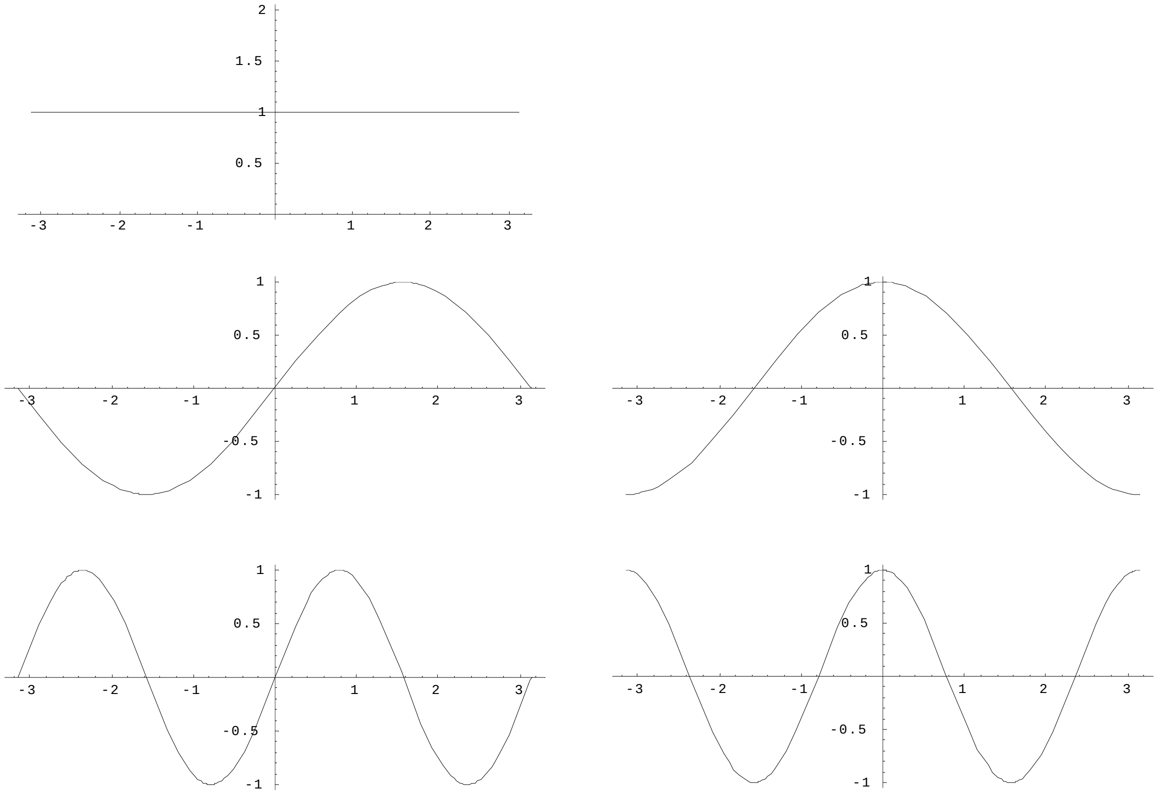
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

**演習問題OT-1：ルジャンンドル多項式が直交関数系であること（以下の直交条件が成立していること）を確かめよ。**

$$\int_1^{-1} P_i(x) P_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j)$$

# 直交関数系

- 三角関数系 $(-\pi \le x \le \pi)$



$$C_0(x) = 1/2$$

$$S_1(x) = \sin x$$

$$C_1(x) = \cos x$$

$$S_2(x) = \sin 2x$$

$$C_2(x) = \cos 2x$$

$$S_3(x) = \sin 3x$$

$$C_3(x) = \cos 3x$$

$$\vdots$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

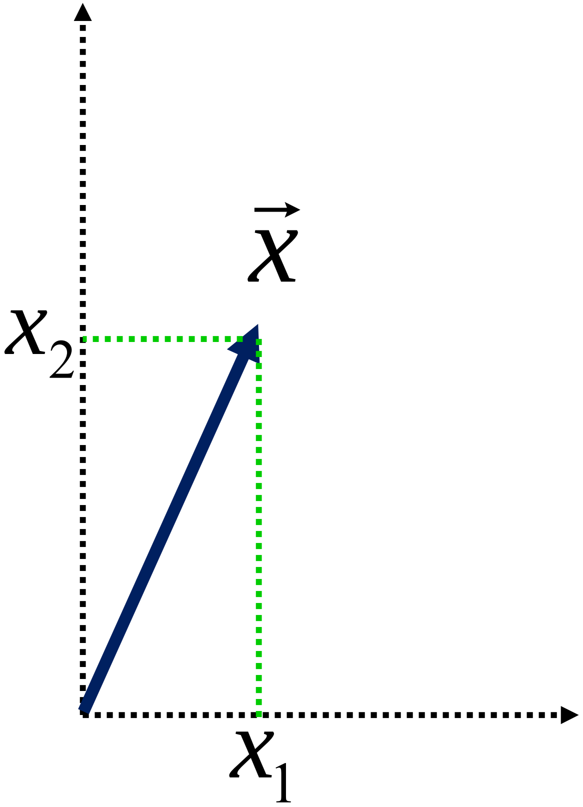
**演習問題OT-2: 三角関数系が直交関数系であることを確かめよ。**

# 直交関数展開

# 直交変換（直交展開）

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル（以後、内積をドットで表現している）

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{u}_n)$$



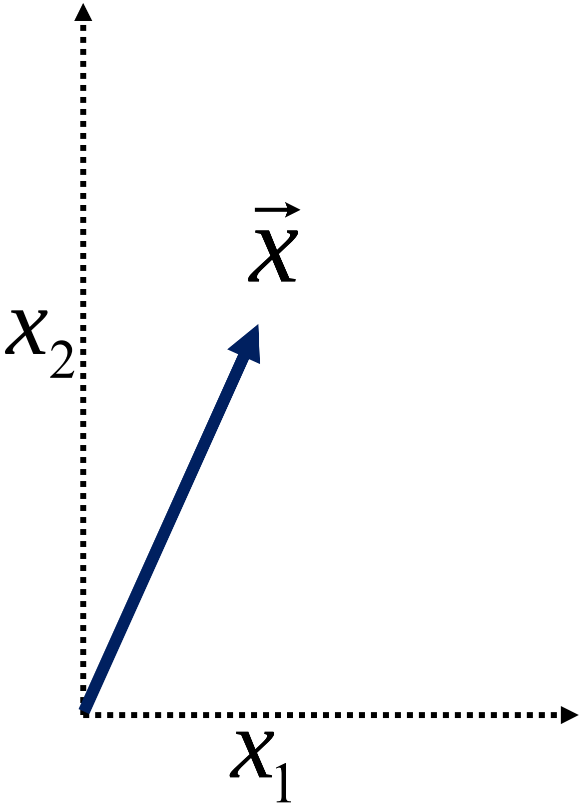
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

# 直交変換(直交展開)

- 直交変換したいベクトル **$x$**=($x_1$,$x_2$,…,$x_n$) と直交基底 **$u_1$**,**$u_2$**,….**$u_n$**の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル（以後、内積をドットで表現している）

$$\mathbf{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1,\ \mathbf{x}\cdot\ \mathbf{u}_2,\ldots,\ \mathbf{x}\cdot\ \mathbf{u}_n)$$



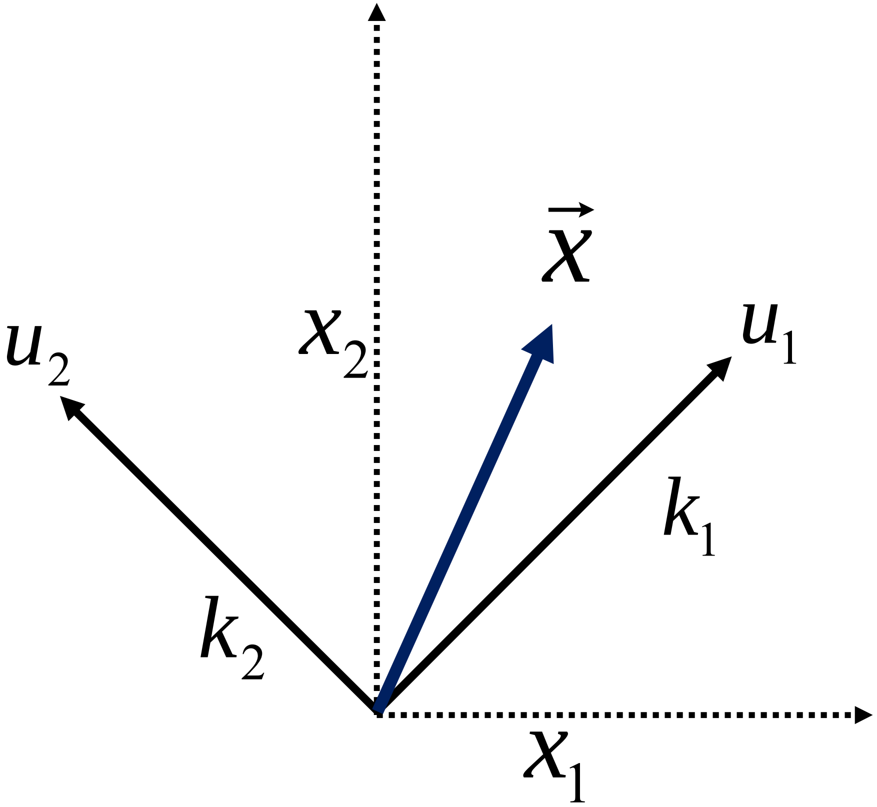
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

# 直交変換（直交展開）

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル（以後、内積をドットで表現している）

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{u}_n)$$



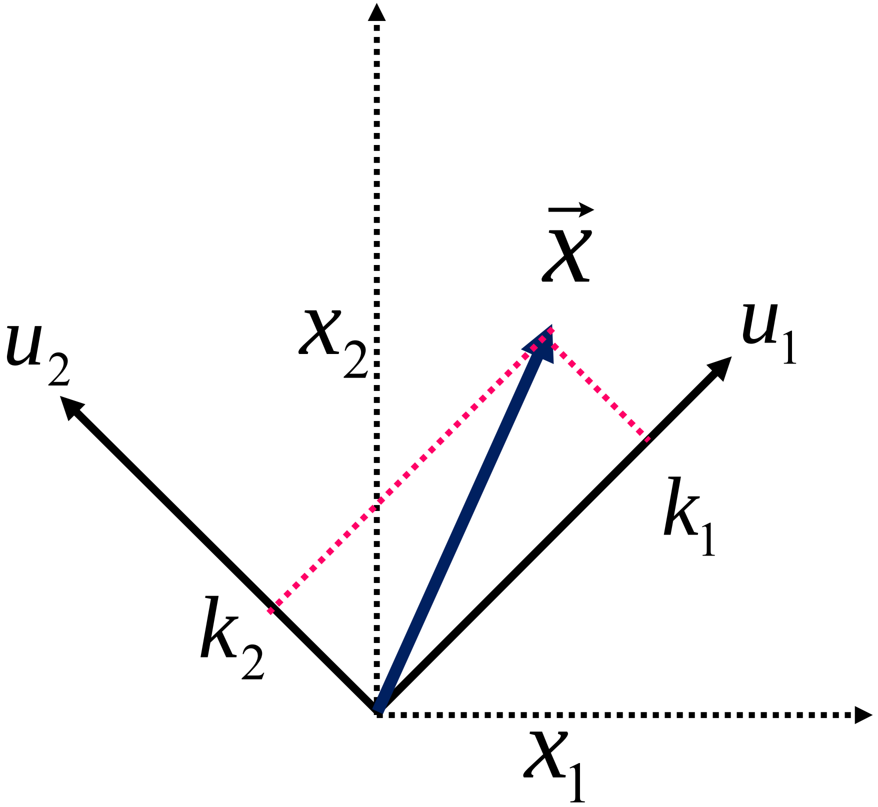
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

# 直交変換（直交展開）

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$ の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル（以後、内積をドットで表現している）

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$$



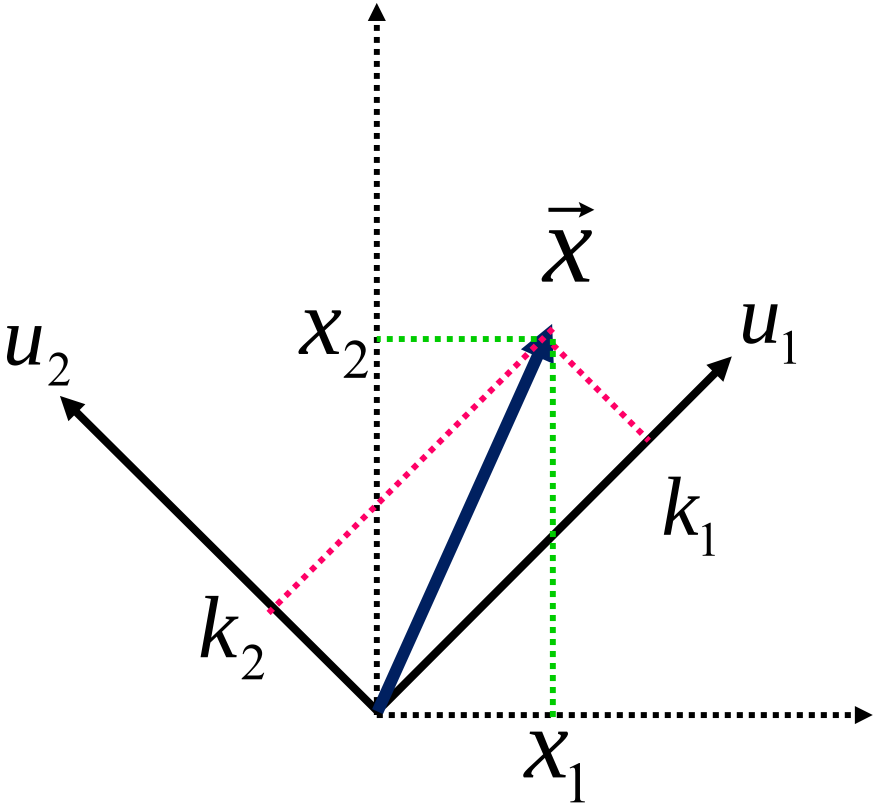
$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

# 直交変換（直交展開）

- 直交変換したいベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots.\boldsymbol{u}_n$の内積をとる。
- 直交変換後のベクトル（以後、内積をドットで表現している）

$$\boldsymbol{x}' = (k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2,\ldots, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_n)$$



$$k_1 = \vec{x}\cdot\vec{u}_1$$

$$k_2 = \vec{x}\cdot\vec{u}_2$$

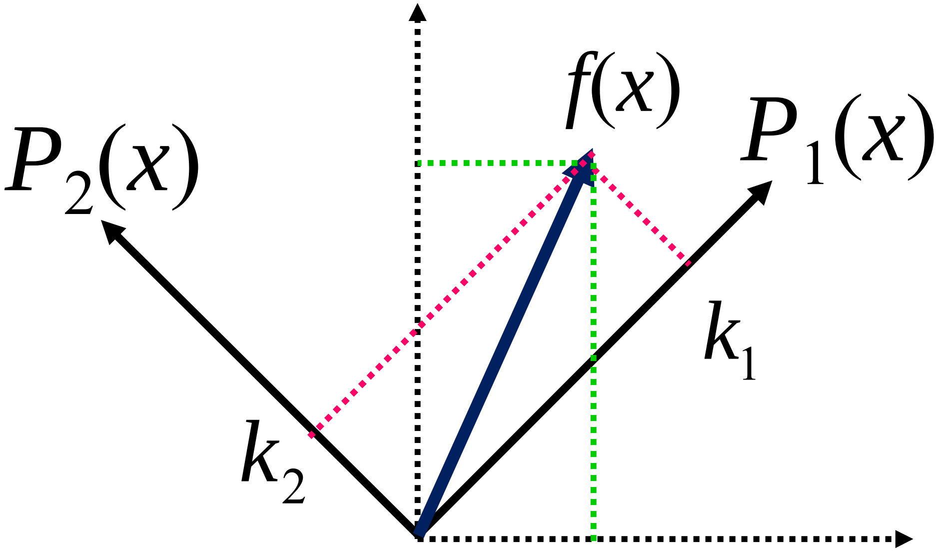
# 直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_i(x) \ldots.$ の内積をとる。
- 直交関数展開後の係数

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$$

$$= (f(x) \cdot P_0(x),\ f(x) \cdot P_1(x),\ f(x) \cdot P_2(x),\ \ldots.,\ f(x) \cdot P_i(x), \ldots)$$

$$= \left( \int f(x) P_0(x) dx, \int f(x) P_1(x) dx, \int f(x) P_2(x) dx, \ldots., \int f(x) P_i(x) dx, \ldots.. \right)$$



$$k_0 = \int f(x) P_0(x) dx$$

$$k_1 = \int f(x) P_1(x) dx$$

$$k_2 = \int f(x) P_2(x) dx$$

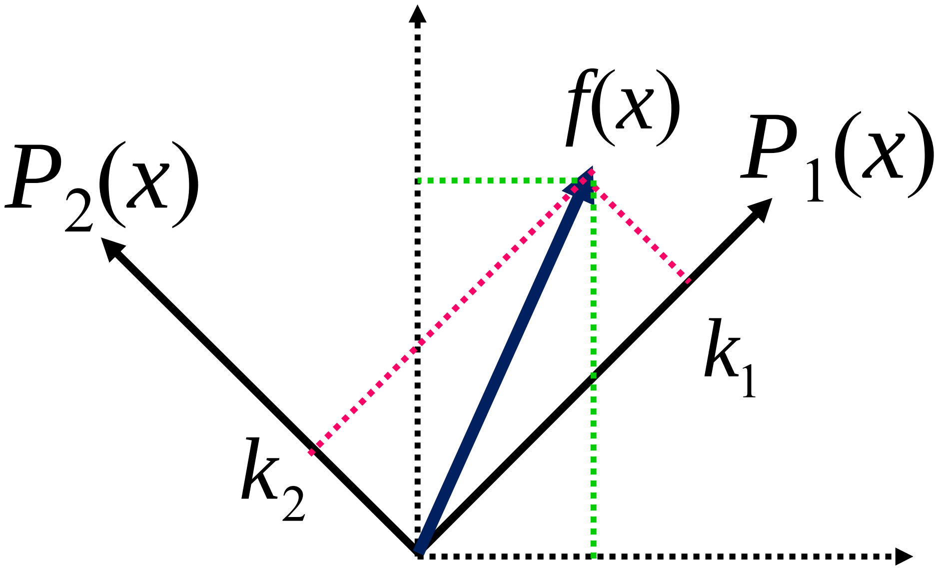
# 直交関数展開

- 直交関数展開したい関数 $f(x)$ と直交基底 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_i(x) \ldots$ の内積をとる。
- 直交関数展開

$$f(x) \approx k_0 P_0(x) + k_1 P_1(x) + k_2 P_2(x) + \ldots\ldots k_i P_i(x) + \ldots\ldots$$

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$$

$$= (f(x) \cdot P_0(x),\ f(x) \cdot P_1(x),\ f(x) \cdot P_2(x), \ldots,\ f(x) \cdot P_i(x), \ldots)$$



$$k_0 = \int f(x) P_0(x) dx$$

$$k_1 = \int f(x) P_1(x) dx$$

$$k_2 = \int f(x) P_2(x) dx$$

# 演習問題OT-3

1. $n$次元ベクトル $\mathbf{x}$ を正規直交基底$\mathbf{u}_{1},\mathbf{u}_{2},\ldots.,\mathbf{u}_{n}$で、次のように直交展開できる。展開係数 $a_i$ を示せ。

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$$

2. 関数 $f(t)$ を区間$a \leqq t \leqq b$上の正規直交関数系 $\phi_i(t)$ ($i=1,2,\ldots\infty$)で次のように直交関数展開できる。展開係数 $c_i$ を示せ。

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t)$$

なお、区間$a \leqq t \leqq b$上の正規直交関数系 $\phi_i(t)$ は以下を満足する。

3. 以下が成り立つことを証明せよ。

$$\int_a^b \phi_i(t)\phi_j(t)dt=\delta_{ij}$$

（$\delta_{ij}$ は、クロネッカーのデルタ）

$$\int_a^b f^{2}(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty} c_i^{\ 2}$$

4. この証明は、直観的には、「 $f(t)$ という（無限次元）ベクトルを、異なる正規直交基底（直交関数系）で表したとしても、ベクトルの大きさは変わらない。」ということを意味する。無限次元空間を2次元空間に縮退させた状況で、この直観的意味を、図解せよ。

# 参考文献

- 最小二乗法、直交関数展開などマルチメディアデータ解析の基礎数理に関する参考書
  - これなら分かる応用数学教室
    - 最小二乗法からウェーブレットまで
  - 金谷健一著
  - 共立出版
  - 3045円