マルチメディア工学２

コンピュータグラフィックス
ＣＧの基礎

佐藤 嘉伸

大阪大学　大学院医学系研究科
放射線統合医学講座

yoshi@image.med.osaka-u.ac.jp

http://www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/

講義ホームページ：日本語ページ → 授業の資料 → マルチメディア工学

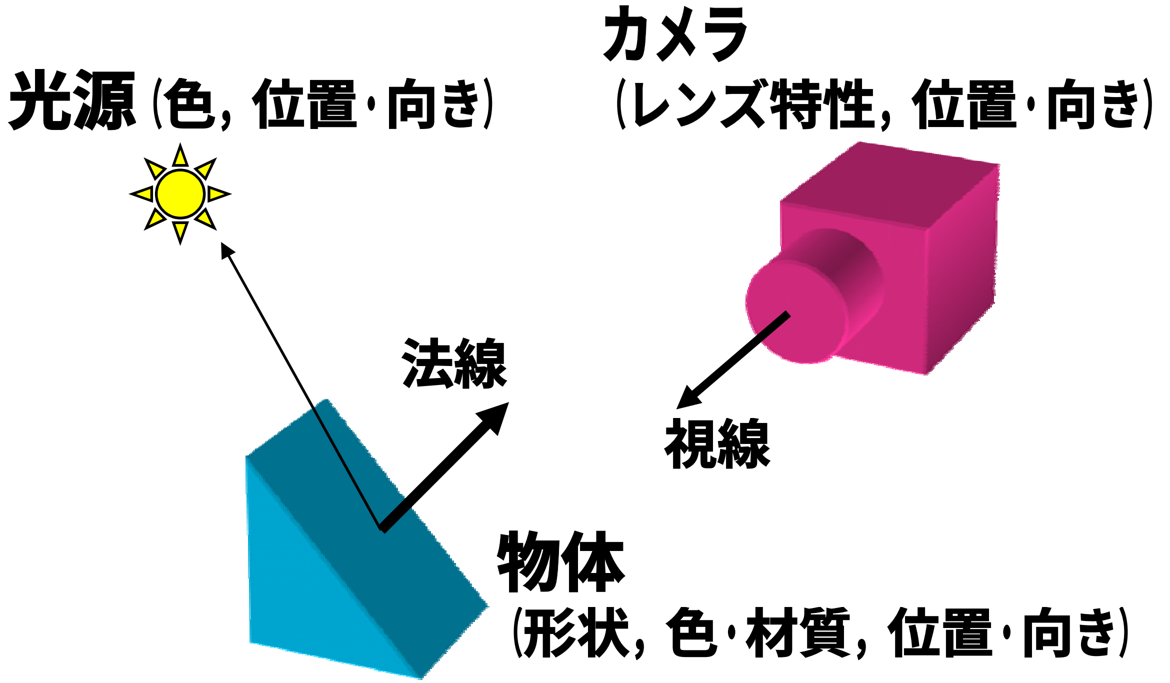
CG (Computer Graphics)の基礎

座標系, 座標変換,
回転の表現, 投影モデル

ＣＧ：3次元世界の表現と表示

- 座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影(カメラ) モデル
- 物体形状表現 (幾何学 geometry)　(スプライン関数, 超2次関数)
- 物体 (表面) 陰影表現 (測光学 photometry)

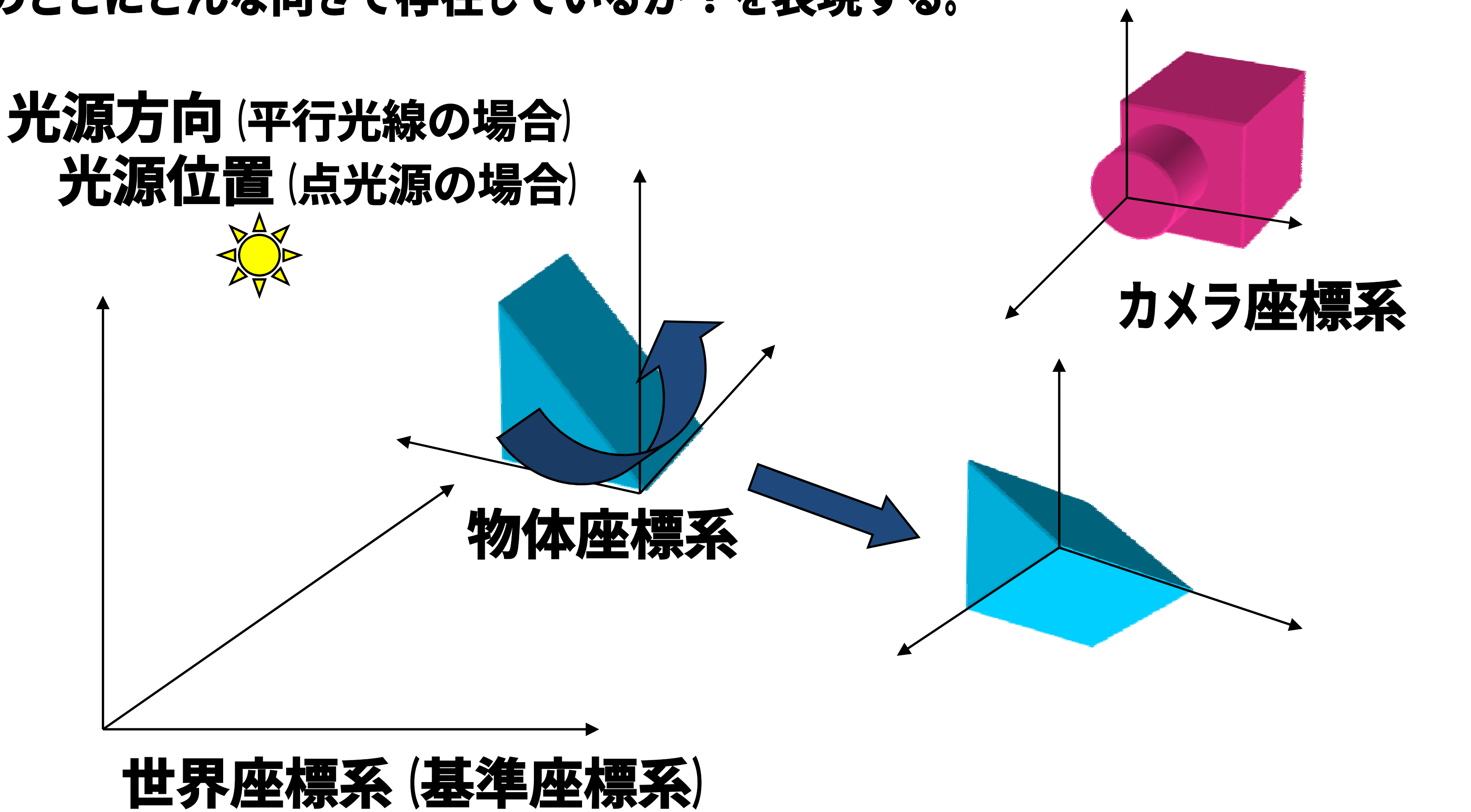
(分光反射特性：拡散反射, 鏡面反射)



ＣＧの基礎：

座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

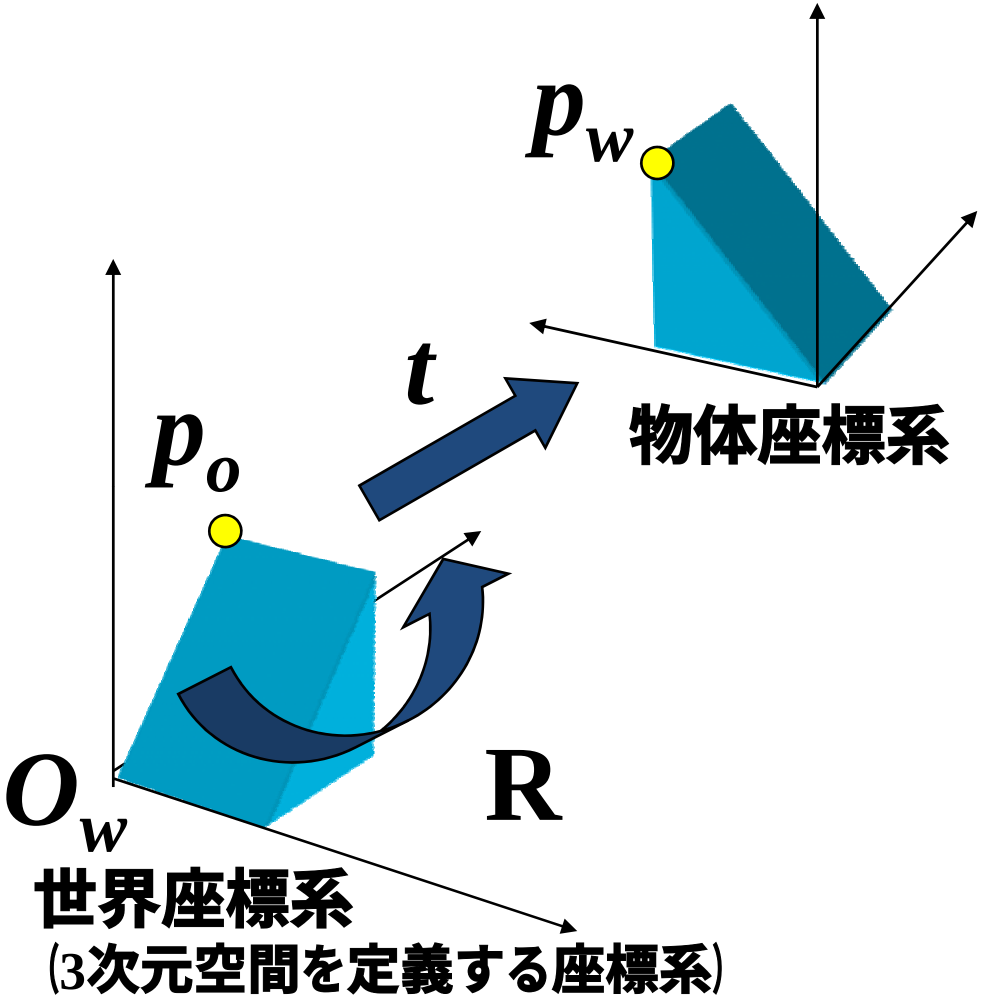
各対象（物体、カメラ、光源）の位置と姿勢を表現するために、基準となる世界座標系および対象毎に座標系を設定する。これにより、各対象が世界座標系のどこにどんな向きで存在しているか？を表現する。



ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

この物体は，世界座標系のどこに、どんな向きで置かれているか？
すなわち、この物体の位置と姿勢（回転）は？



剛体変換の基本式

$$p_w = \mathrm{R}\, p_o + t$$

p_w 世界座標系における位置

p_o 物体座標系における位置

R 回転（姿勢）を表す3×3行列（3自由度）

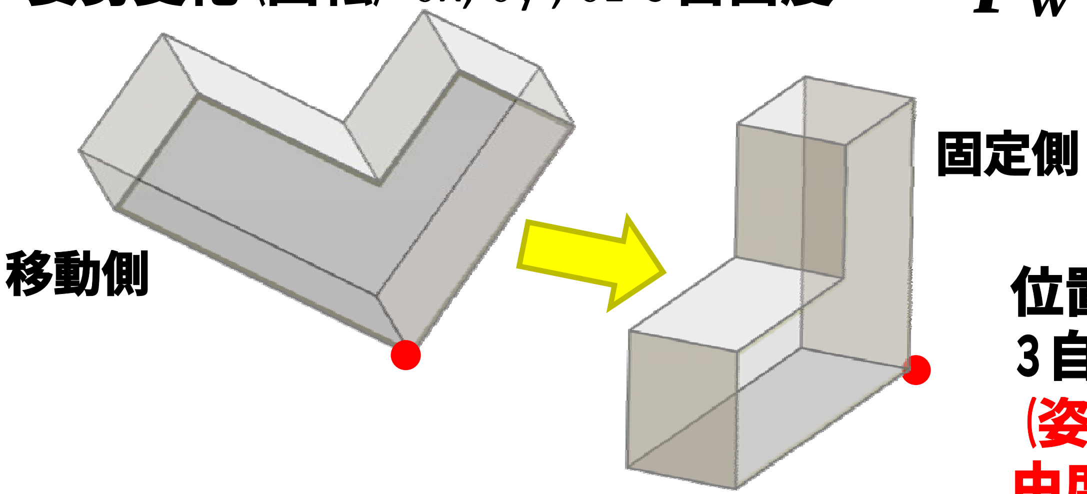
t 平行移動を表す3次元ベクトル（x, y, z 方向の3自由度）

ＣＧの基礎：
座標系, <u>座標変換</u>, 回転の表現, 投影モデル

- **剛体変換**
  - 大きさ・形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置・姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - **位置変化（平行移動） tx, ty, tz 3自由度**
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz 3自由度

平行移動

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$



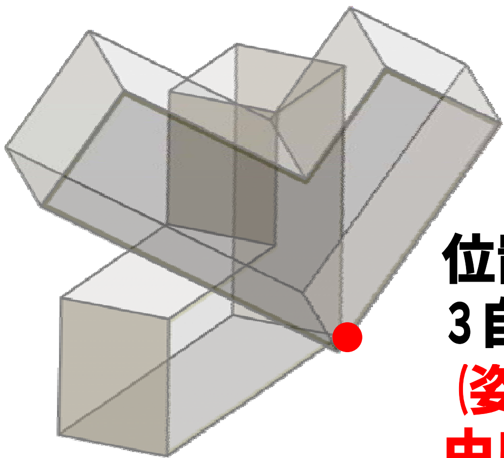
位置変化 tx, ty, tz
3自由度
（姿勢を固定して、3自由度で赤点を一致させることができる）

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - ３次元の場合、６自由度
    - 位置変化（平行移動） tx, ty, tz ３自由度
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz ３自由度

平行移動

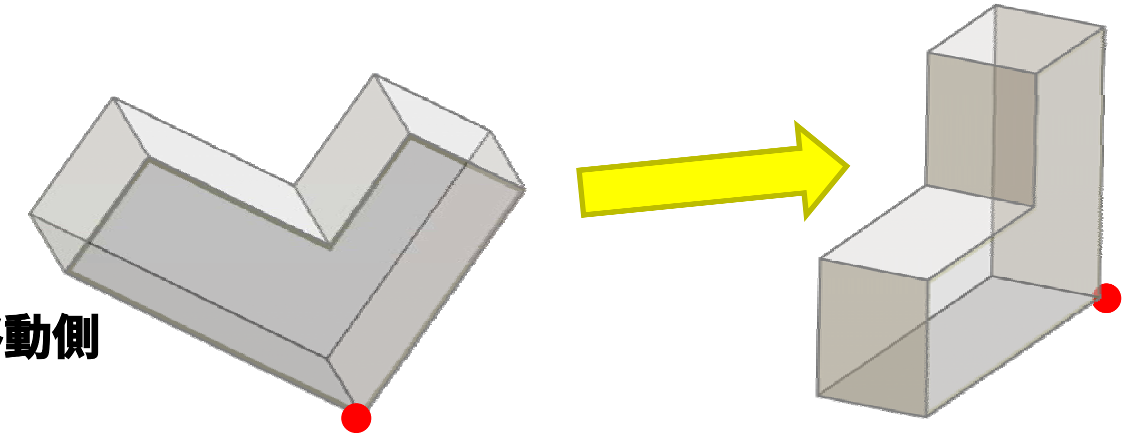
$$p_w = \mathrm{R}\, p_o + t$$



ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化 (平行移動) tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化 (回転) θx, θy , θz 3自由度

$$\boldsymbol{p}_w = \mathbf{R}\,\boldsymbol{p}_o + \underbrace{\boldsymbol{t}}_{\text{平行移動}}$$

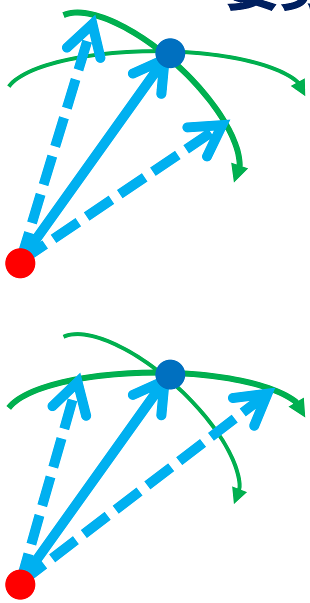


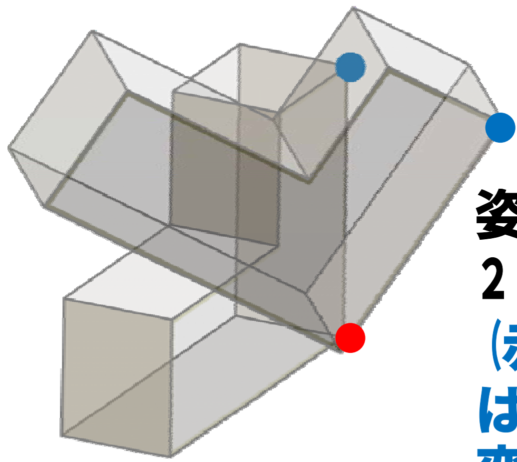
CGの基礎:
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化 (平行移動) tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化 (回転) θx, θy , θz 3自由度

回転

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$





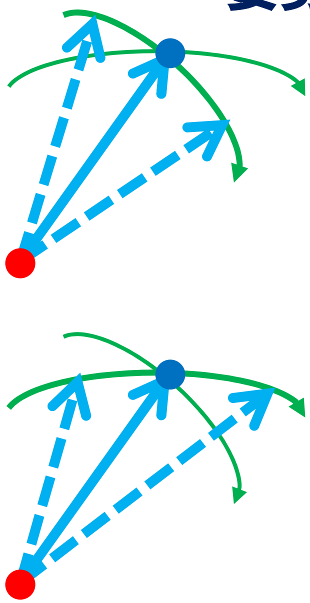
姿勢変化 θx, θy
2自由度
(赤点を固定して、青点は2自由度 (球面上を) 変化させ一致できる)

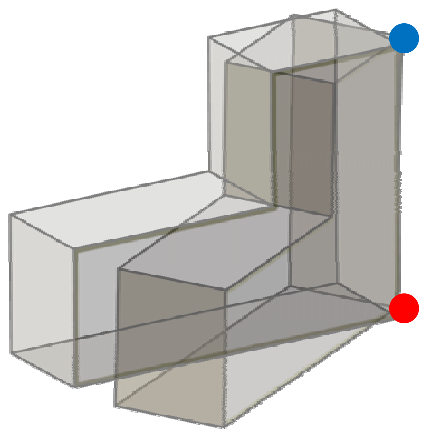
ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化（平行移動） tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz 3自由度

回転

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$





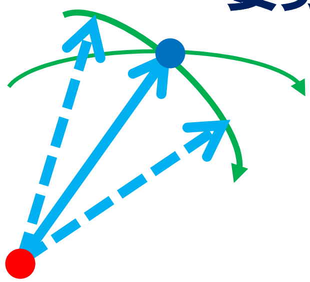
姿勢変化 θx, θy
2自由度
（赤点を固定して、青点は2自由度（球面上を）変化させ一致できる）

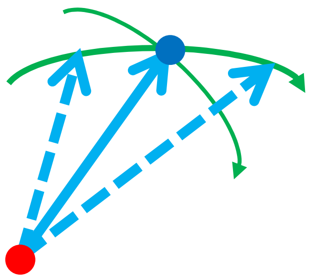
ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

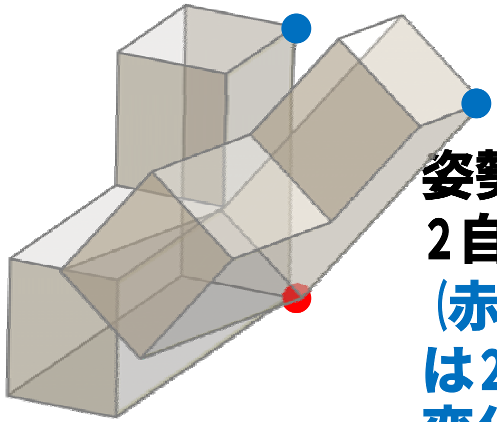
- 剛体変換
  - 大きさ・形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置・姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化（平行移動） tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz 3自由度

回転

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$







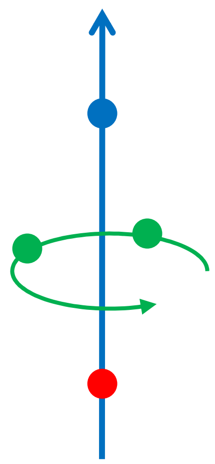
姿勢変化 θx, θy
2自由度
（赤点を固定して、青点は2自由度（球面上を）変化させ一致できる）

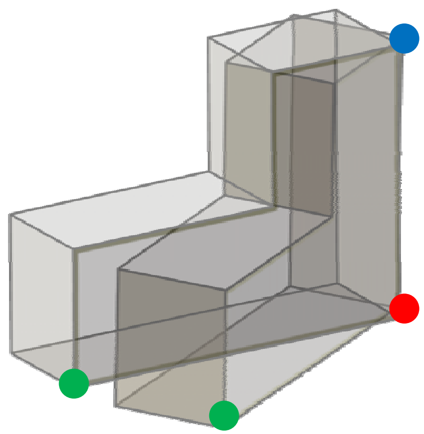
ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化 (平行移動) tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化 (回転) θx, θy , θz 3自由度

回転

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$





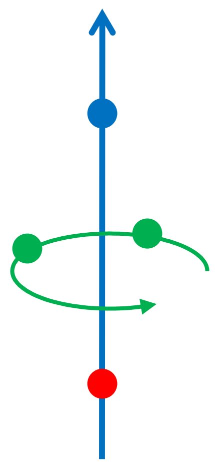
姿勢変化 θz
1自由度
(赤点･青点を結んだ軸を固定して、緑点は軸回りに1自由度変化させ一致できる)

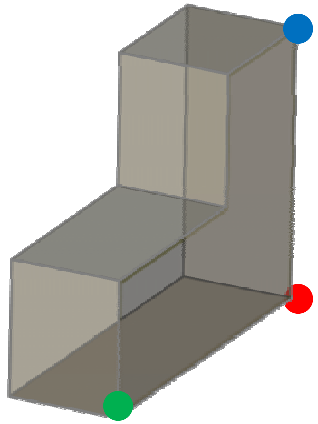
ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

- 剛体変換
  - 大きさ･形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置･姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化（平行移動） tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz 3自由度

回転

$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$



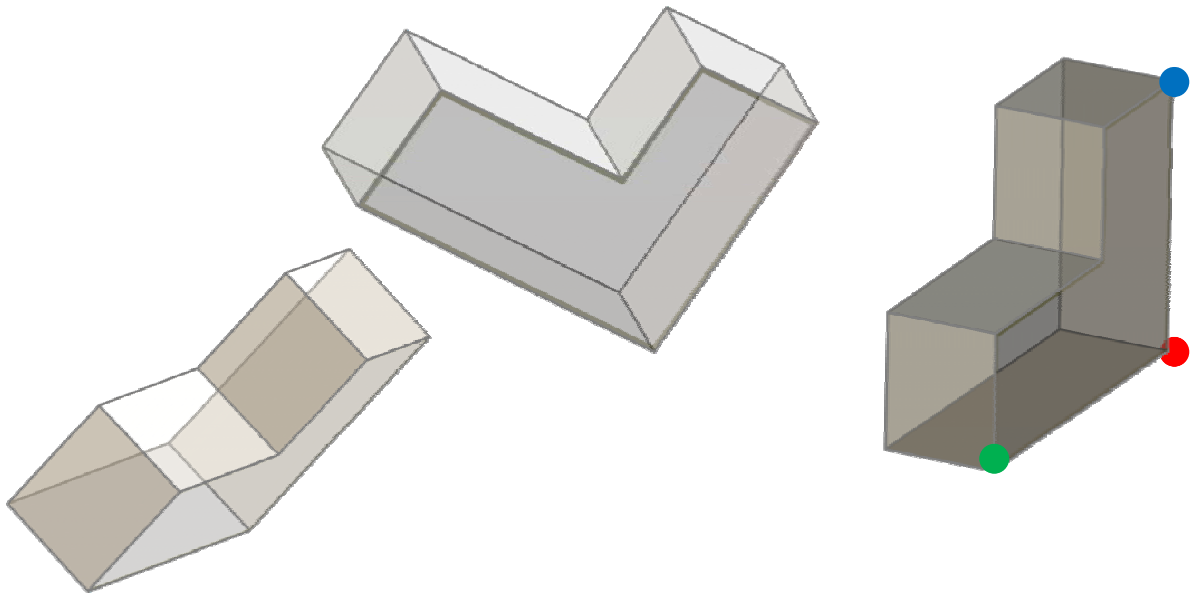


姿勢変化 θz
1自由度
（赤点･青点を結んだ軸を固定して、緑点は軸回りに1自由度変化させ一致できる）

ＣＧの基礎：
座標系, <u>座標変換</u>, 回転の表現, 投影モデル

- **剛体変換**
  - 大きさ・形を変化させない座標変換
  - すなわち、物体の位置・姿勢のみを変える変換
  - 3次元の場合、6自由度
    - 位置変化（平行移動） tx, ty, tz 3自由度
    - 姿勢変化（回転） θx, θy , θz 3自由度

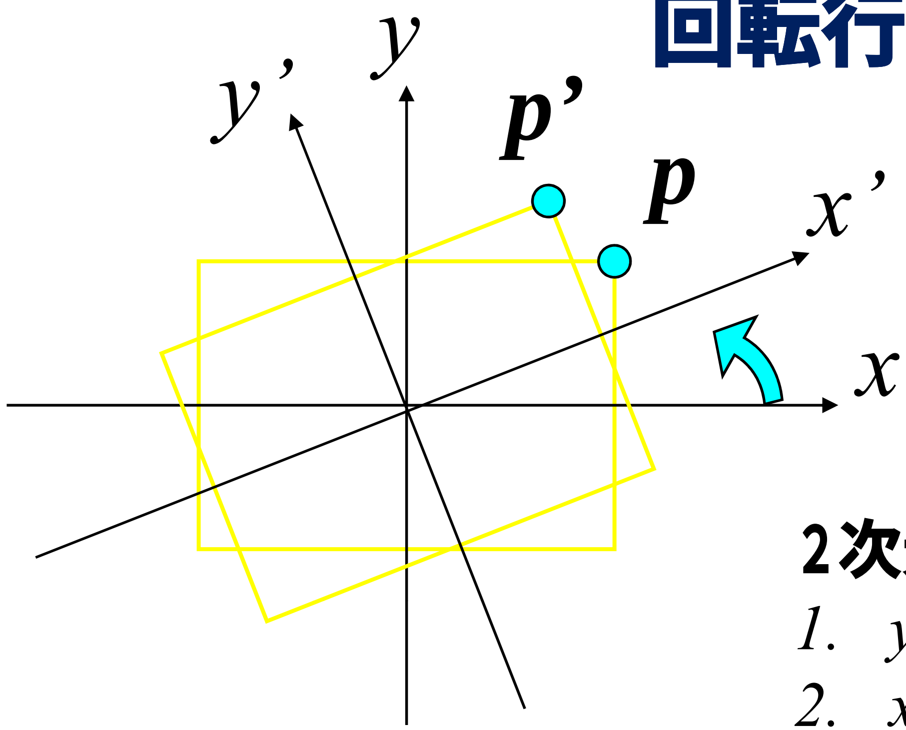
$$p_w = \mathbf{R}\, p_o + t$$



位置変化 tx, ty, tz
3自由度
姿勢変化 θx, θy, θz
3自由度

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

回転行列 R: 2次元の場合



回転の基本式　$p' = \mathrm{R}\,p$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

2次元座標系回転の手順

1.　y 軸を自由に向きを変える。

2.　x 軸を、y 軸と直交するよう向きを変える。

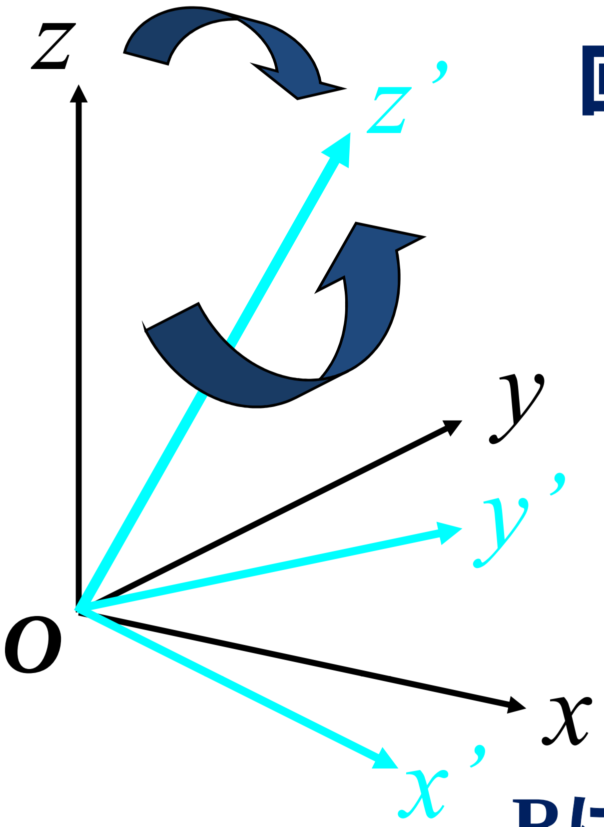
このとき、x 軸と y 軸ともに伸縮なし（正規行列）

Rは正規直交行列　$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

正規：$a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1$
直交：$ac + bd = 0$

4パラメータ、3つの制約条件式で、1自由度が残る。

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル



回転行列 R: ３次元の場合

３次元座標系回転の手順

1. z' 軸を自由に向きを変える。(z'軸の方向定義に2自由度)
2. y' 軸がz'軸に直交するという条件の下で自由に向きを変える。 (y'軸の方向定義に1自由度)
3. x'軸をy'軸とz'軸の垂直になるように向きを変える。(x'軸の方向定義は自由度なし)

このとき、x軸、y軸、z軸ともに伸縮なし (正規行列)

Rは正規直交行列

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

正規	直交
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$	$ad + be + cf = 0$
$d^2 + e^2 + f^2 = 1$	$dg + eh + fi = 0$
$g^2 + h^2 + i^2 = 1$	$ga + hb + ic = 0$

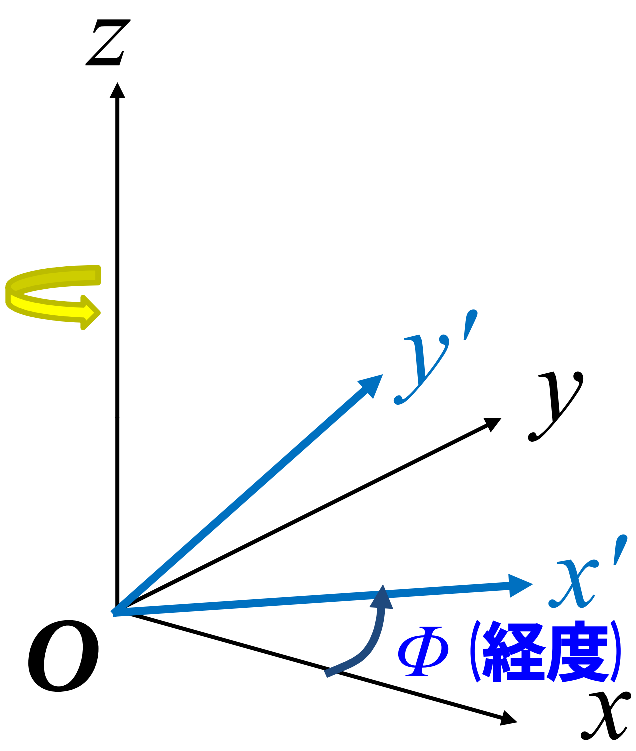
９パラメータ、６つの制約条件式で、３自由度が残る。

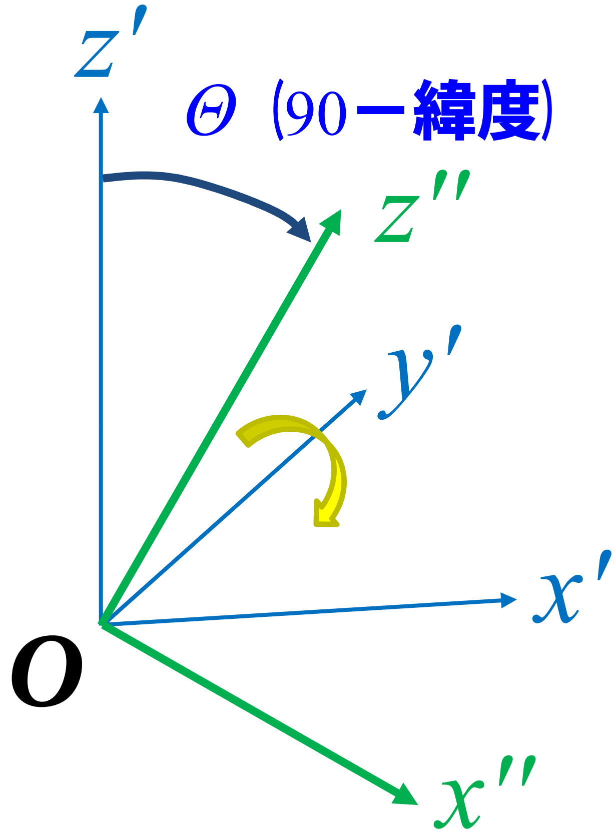
ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

3次元の回転　＝　オイラー角 Φ, Θ, ψ

1\. z軸回りにΦ回転　　　　2. y' 軸回りにΘ回転





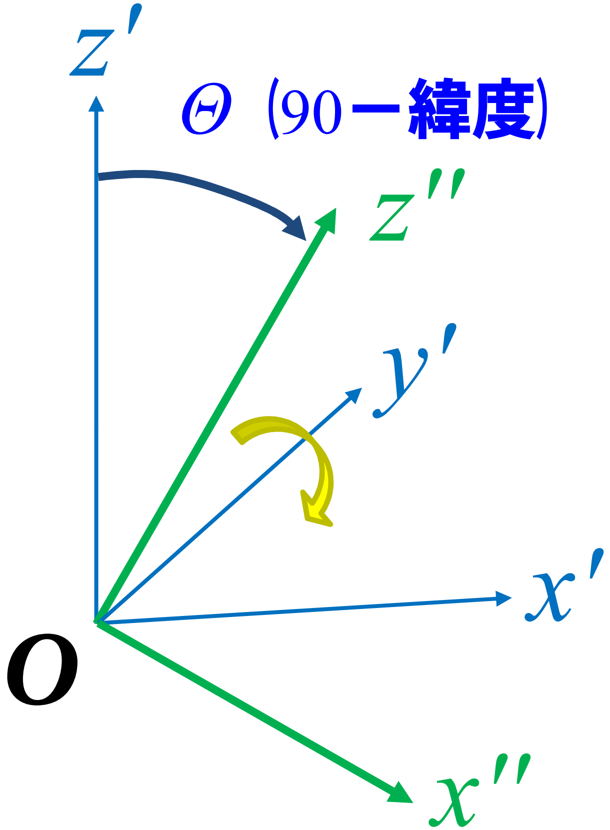
Φ,Θは，緯度と経度に相当．（3次元方向は、3次元球面上の点）

ＣＧの基礎：

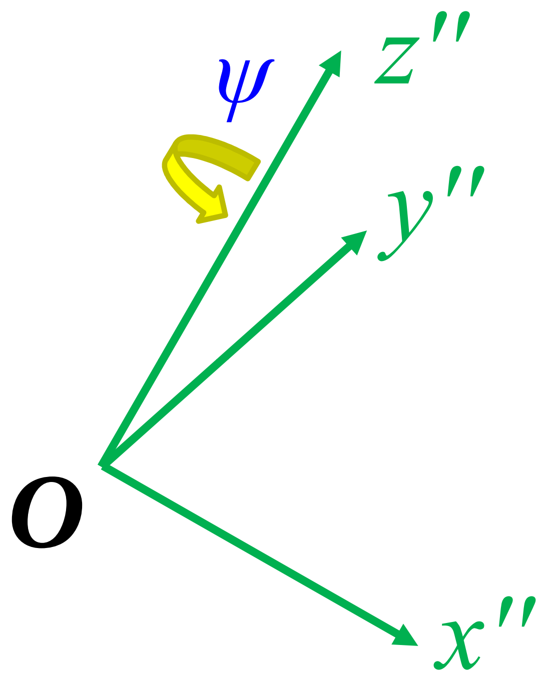
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

3次元の回転　＝　オイラー角 Φ, Θ, ψ

2. y' 軸回りにΘ回転



3. z'' 軸回りにψ回転



オイラー角と等価な3×3回転行列を，岩波数学辞典などで確認せよ．

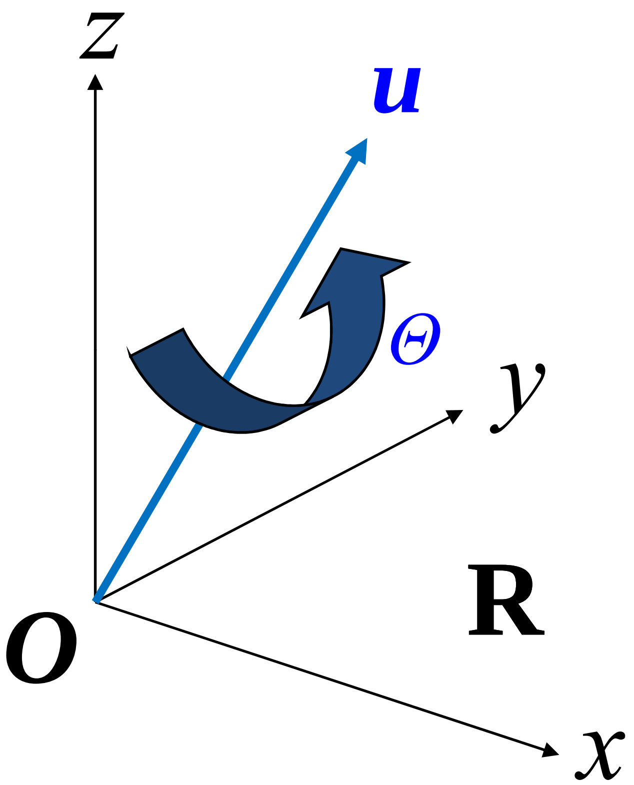
ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

3次元の回転　＝　原点を通る回転軸 $\boldsymbol{u}$　＋　軸回りの回転角Θ

演習問題　2-A

$$p' = \mathrm{R}\, p$$



1．z軸回りの回転R_Zを3ｘ3行列で表せ．

2．原点を通る軸を$\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)^t$とする($|\boldsymbol{u}|=1$)．$\boldsymbol{u}$を z軸$\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)^t$に一致させる変換Aは，$\boldsymbol{e}_z=\mathrm{A}\boldsymbol{u}$とかける．Aの各要素の満たすべき条件を求めよ．ただし，Aはdet(A)=1を満たす直交行列であるとする．

3．1と2の結果を利用して，$\boldsymbol{u}$軸回りにΘ回転した場合の3×3回転行列を導け．

文献：杉原厚吉著,グラフィックスの数理,共立出版,1995.

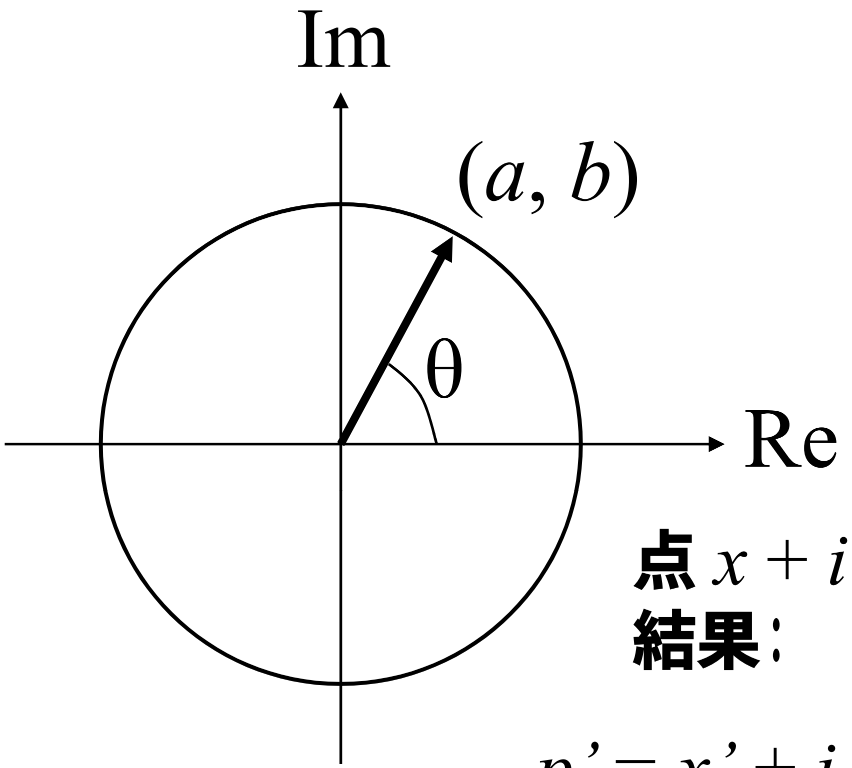
（以下のURLを参照せよ．以下のページアドレスの入力において、最後のスラッシュを忘れないように。）

www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/ics_lecture/multi_media/

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

2次元の回転 ＝ 複素数 $p = a + bi \quad (a^2+b^2=1)$



θ度の回転に対応する複素数

$r = \cos\theta + i \sin\theta$

2次元の回転＝単位円上の点

$(\cos\theta, \sin\theta)$

点 $x + i\,y$ **を回転** $\cos\theta + i \sin\theta$**により変換した結果：**

$$
\begin{aligned}
p' = x' + i\,y' &= pr \\
&= (x + i\,y)\,(\cos\theta + i \sin\theta) \\
&= (x \cos\theta - y \sin\theta) + i\,(x \sin\theta + y \cos\theta)
\end{aligned}
$$

ＣＧの基礎：
座標系, 座標変換, 回転の表現, 投影モデル

2次元の回転：**複素数** $p = a + bi$ （ここで、$ii = -1$）

複素数の拡張： 四元数（超複素数）$\mathring{r}$ の導入

$$\mathring{r} = p + qj \qquad \text{（ここで、} p = a + bi\,,\ q = c + di\text{）}$$

$$= (a + bi) + (c + di)\,j$$

$$= a + bi + cj + dij$$

ここで、$ij = k,\ \ ji = -k$ とすると

$$= a + bi + cj + dk$$

ここで、$ii = jj = kk = -1$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

四元数の表記法

$\mathring{r} = (a, \mathbf{w})$ a: 実部, $\mathbf{w} = (b, c, d)$:虚部

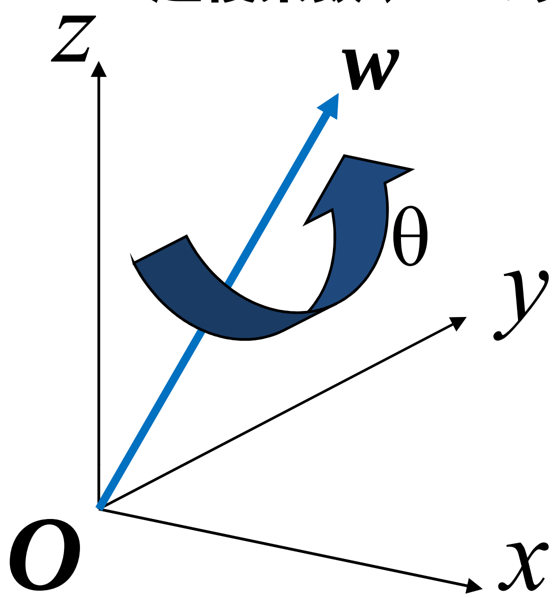
$\mathring{r} = a + \mathbf{w}$ とも表記される。

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，<u>回転の表現</u>，投影モデル

３次元の回転　＝ **単位四元数 (Quaternion)**

超複素数（1つの実部＋3つの虚部），　スカラーと３次元ベクトルの組



単位ベクトル$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ の回り
のθ度の回転に対応する単位四元数

$$\mathring{r} = (\cos(\theta/2), \boldsymbol{w} \sin(\theta/2))$$

３次元の回転
＝４次元単位球面の点
＝４次元空間中の原点を通る直線

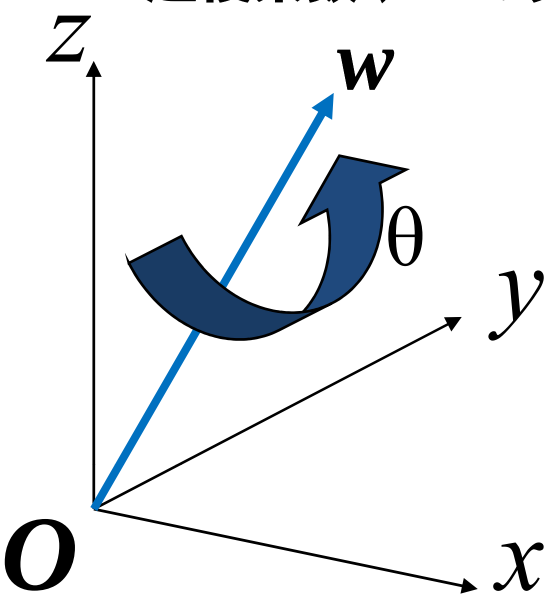
$$\mathring{r} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) w_1, \sin(\theta/2) w_2, \sin(\theta/2) w_3)$$

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，<u>回転の表現</u>，投影モデル

３次元の回転　＝ 単位四元数 (Quaternion)

超複素数（１つの実部＋３つの虚部），　スカラーと３次元ベクトルの組



単位ベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ の回り
のθ度の回転に対応する単位四元数

$$\mathring{r} = (\cos(\theta/2),\ \boldsymbol{w}\sin(\theta/2)\ )$$

四元数による３次元座標 $\boldsymbol{x}$ の表記

$$\mathring{x} = (0, \boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$$

四元数 $\mathring{r}$ による $\mathring{x}$ の回転

$$\mathring{x}' = \mathring{r}\,\mathring{x}\,\mathring{r}^*$$　　$\mathring{r}^*$は共役四元数

四元数 $\mathring{x} = (a, \boldsymbol{u})$, $\mathring{y} = (b, \boldsymbol{v})$ の積：　$\mathring{x}\mathring{y} = (ab - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},\ a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$

（交換法則は成立しない。）

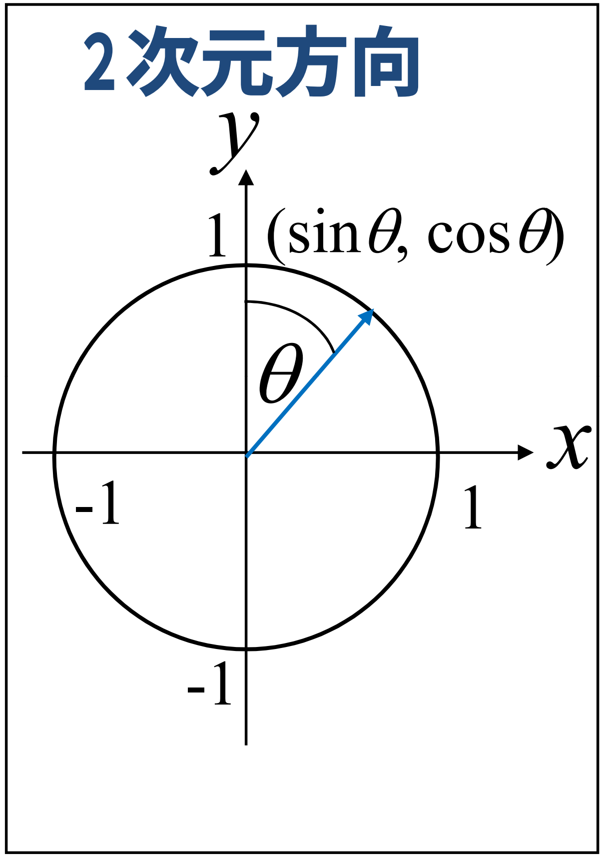
四元数 $\mathring{x} = (a, \boldsymbol{u})$ の共役四元数 $\mathring{x}^* = (a, -\boldsymbol{u})$

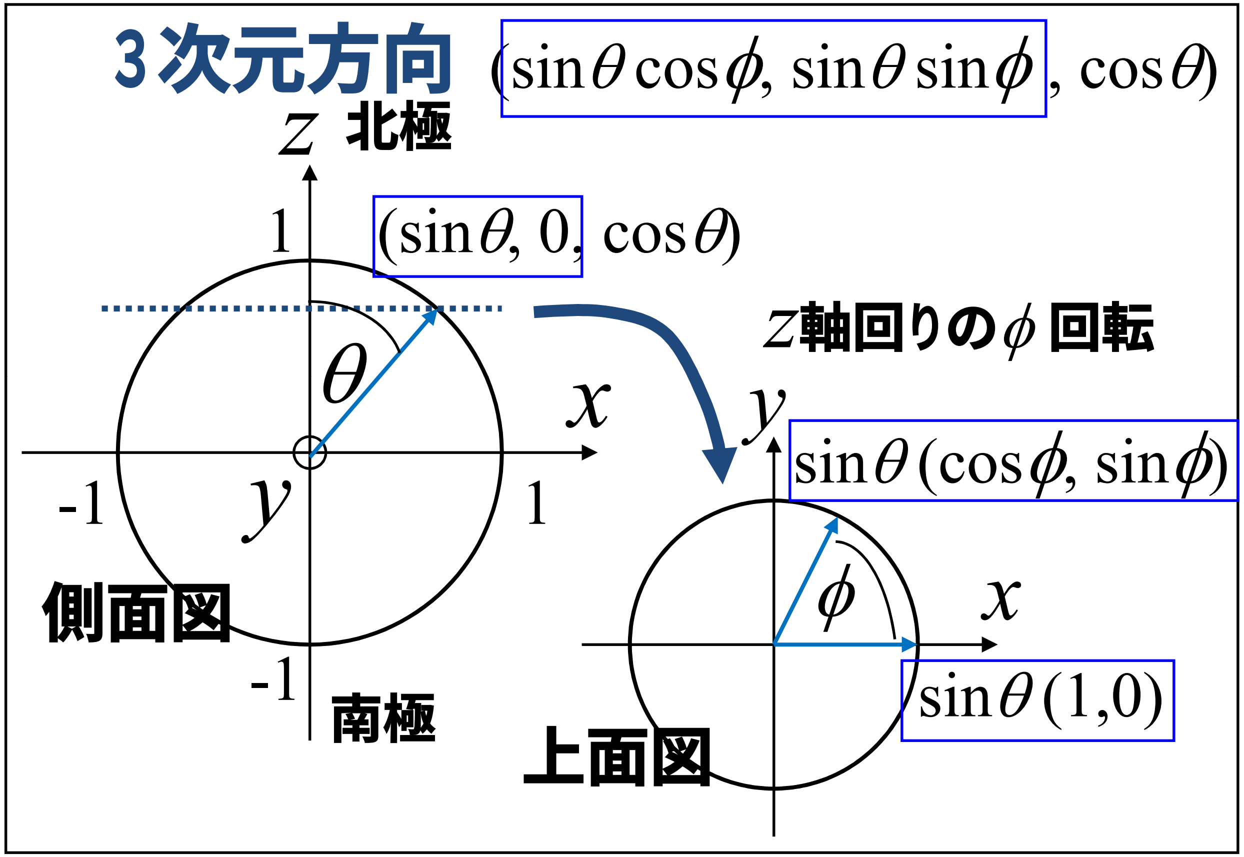
ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

３次元の回転は、４次元の方向？？

２次元方向は、単位円の２次元円周上の点により指定できる
３次元方向は、単位球の３次元球面上の点により指定できる。





ＣＧの基礎：

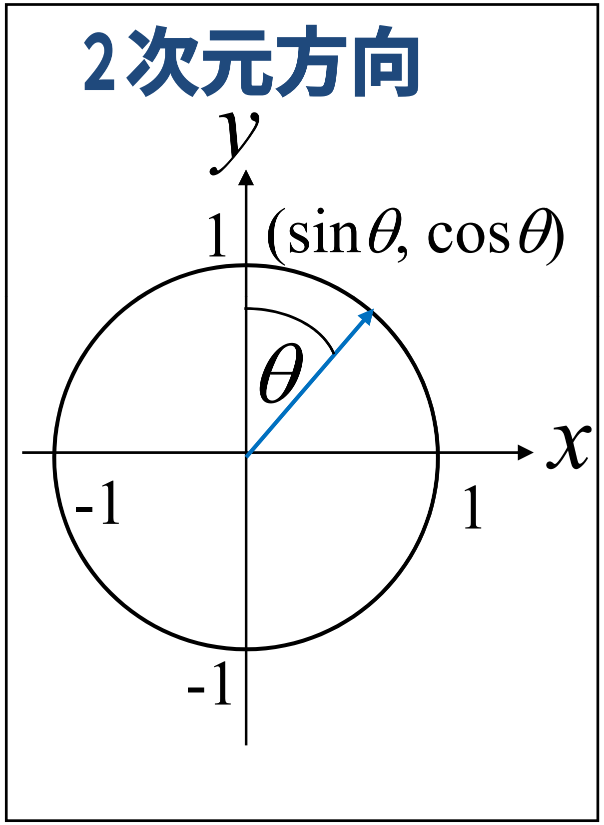
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

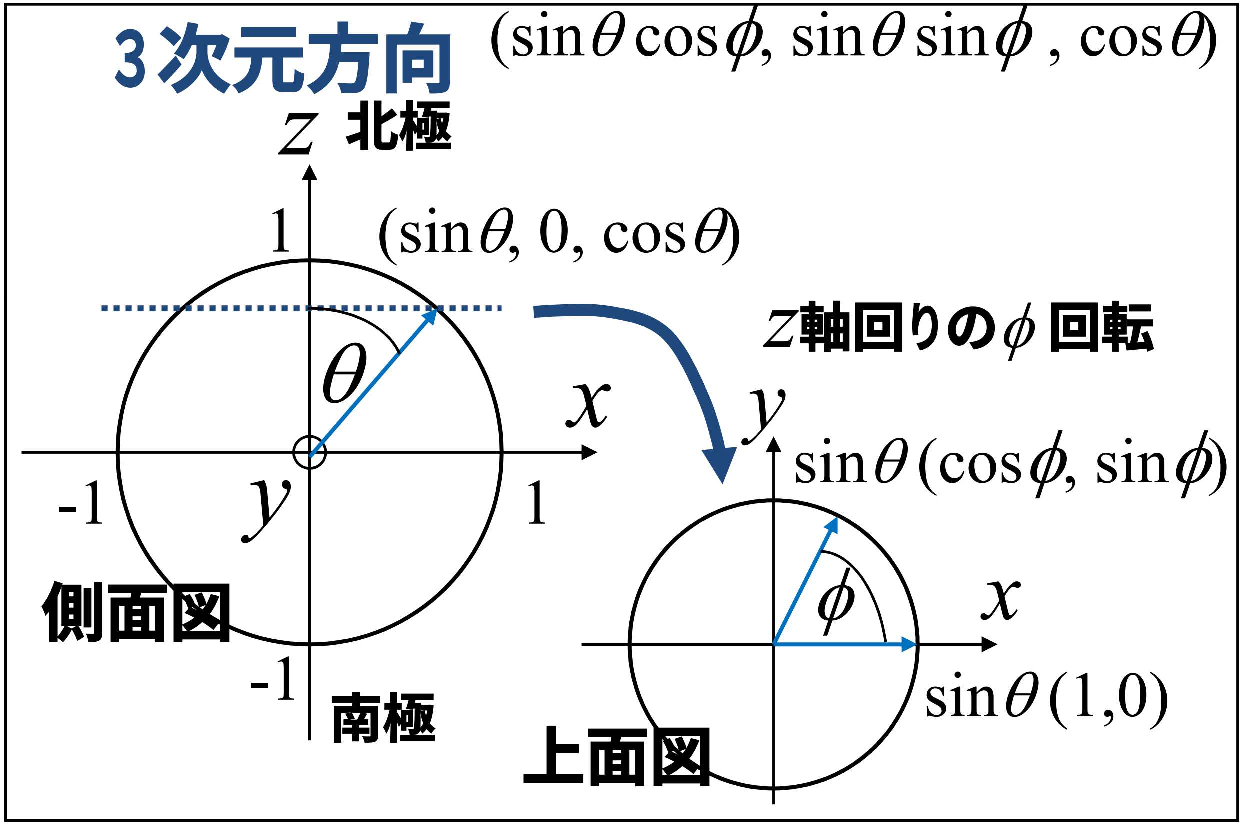
2次元方向 (回転) は、単位円の2次元円周上の点により指定できる。

回転角 θ, **方向ベクトル**(t_x, t_y) (ただし、$t_x^2 + t_y^2 = 1$)

3次元方向は、単位球の3次元球面上の点により指定できる。

回転角 (θ, ϕ), **方向ベクトル**(t_x, t_y, t_z) (ただし、$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$)





ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

2次元方向（回転）は、単位円の2次元円周上の点により指定できる。

回転角　θ,　単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x,\ t_y)$　(ただし、$t_x^{\,2} + t_y^{\,2} = 1$)

3次元方向は、単位球の3次元球面上の点により指定できる。

回転角　$(\theta\,,\,\phi\,)$,　単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x,\ t_y,\ t_z)$　(ただし、$t_x^{\,2} + t_y^{\,2} + t_z^{\,2} = 1$)

3次元回転は、単位4次元超球の超球面上の点により指定できる。

単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x,\ t_y,\ t_z\,,\ t_w)$　(ただし、$t_x^{\,2} + t_y^{\,2} + t_z^{\,2} + t_w^{\,2} = 1$)

3次元方向空間の一様分割　＝　3次元球面の一様分割

（緯度と経度による分割は一様ではない）

3次元回転空間の一様分割　＝　4次元超球面の一様分割

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

2次元方向 (回転) は、単位円の2次元円周上の点により指定できる。

回転角　θ,　単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x, t_y)$　(ただし、$t_x^2 + t_y^2 = 1$)

3次元方向は、単位球の3次元球面上の点により指定できる。

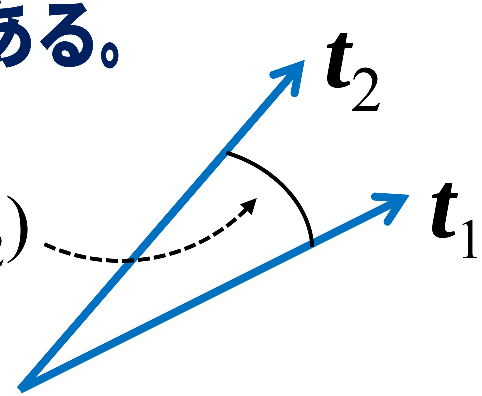
回転角　(θ, ϕ), 単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x, t_y, t_z)$　(ただし、$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$)

3次元回転は、単位4次元超球の超球面上の点により指定できる。

単位ベクトル $\boldsymbol{t} = (t_x, t_y, t_z, t_w)$　(ただし、$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 + t_w^2 = 1$)

2つの、2次元方向 (回転) or 3次元方向 or 3次元回転

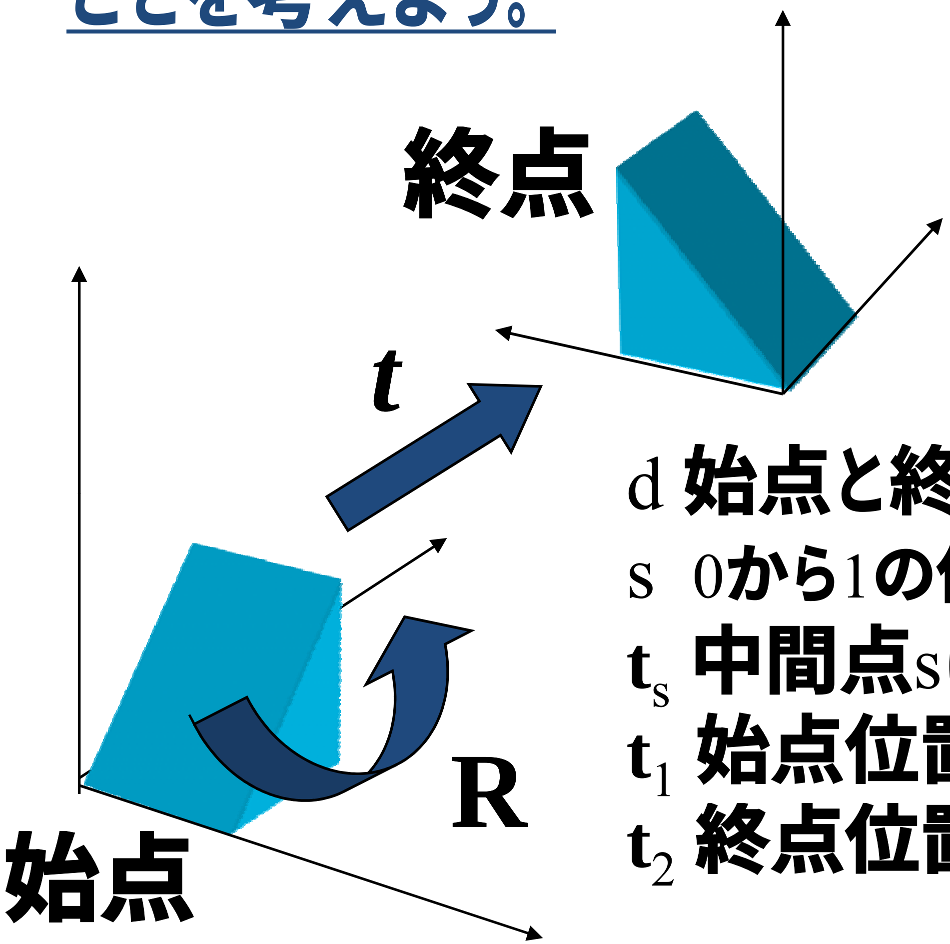
t_1, t_2の角度差は、$\mathrm{ArcCos}(t_1 \cdot t_2)$　である。



ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，<u>回転の表現</u>，投影モデル

<u>３次元物体を始点から終点まで滑らかに移動させることを考えよう。</u>



平行移動の内挿

$$\mathbf{t}_s = \mathbf{t}_1 \frac{d(1\text{-}s)}{d} + \mathbf{t}_2 \frac{ds}{d}$$

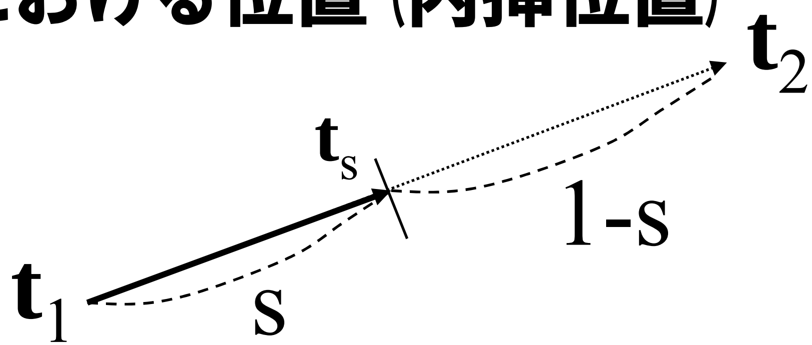
d 始点と終点の距離

s　0から1の値をとる始点と終点の内分比

t_s 中間点sにおける位置（内挿位置）

t_1 始点位置

t_2 終点位置



ＣＧの基礎：

座標系, 座標変換, <u>回転の表現</u>, 投影モデル

回転の四元数表現

$$\mathring{r} = (\cos(\theta/2), \boldsymbol{w} \sin(\theta/2)\ )$$

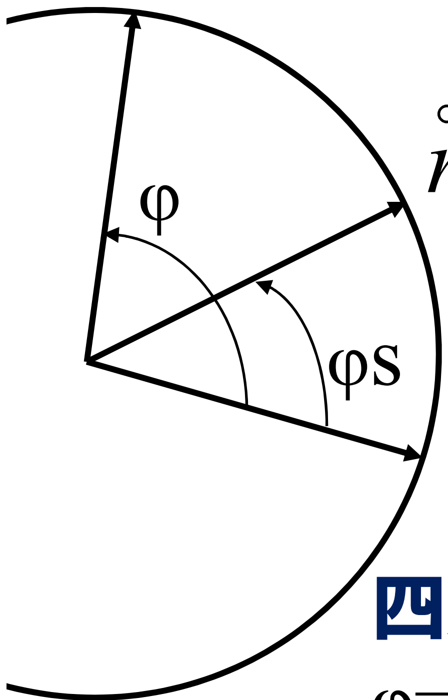
<u>回転の内挿</u>

中間点s の回転

$$\mathring{r}_s = \mathring{r}_1 \frac{\sin\varphi\,(1\text{-}s)}{\sin\varphi} + \mathring{r}_2 \frac{\sin\varphi\ s}{\sin\varphi}$$

φ **始点から終点までの回転量**

$\mathring{r}_2$ **終点の回転**



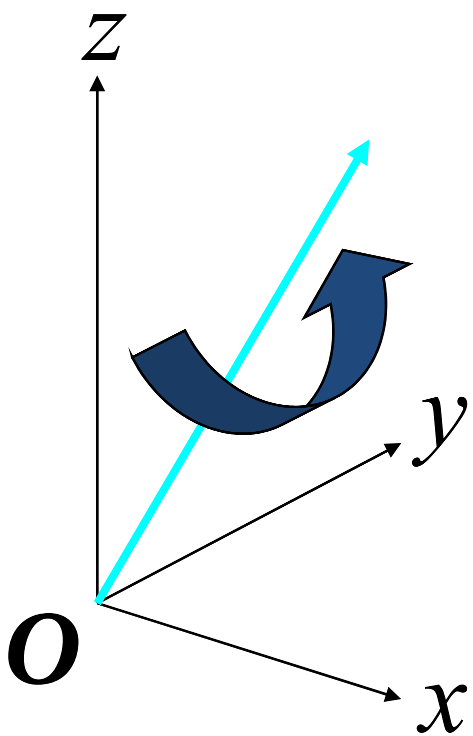
$\mathring{r}_1$ **始点の回転**

四元数によってのみ理想的な回転の内挿が可能

φ= 180 degrees **のとき、どうなるか？**

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影モデル

3次元の回転 ＝ **単位四元数**（4次元空間の超球面の点）



演習問題 2-B

1．3次元の回転の表現方法として四元数について調査せよ．

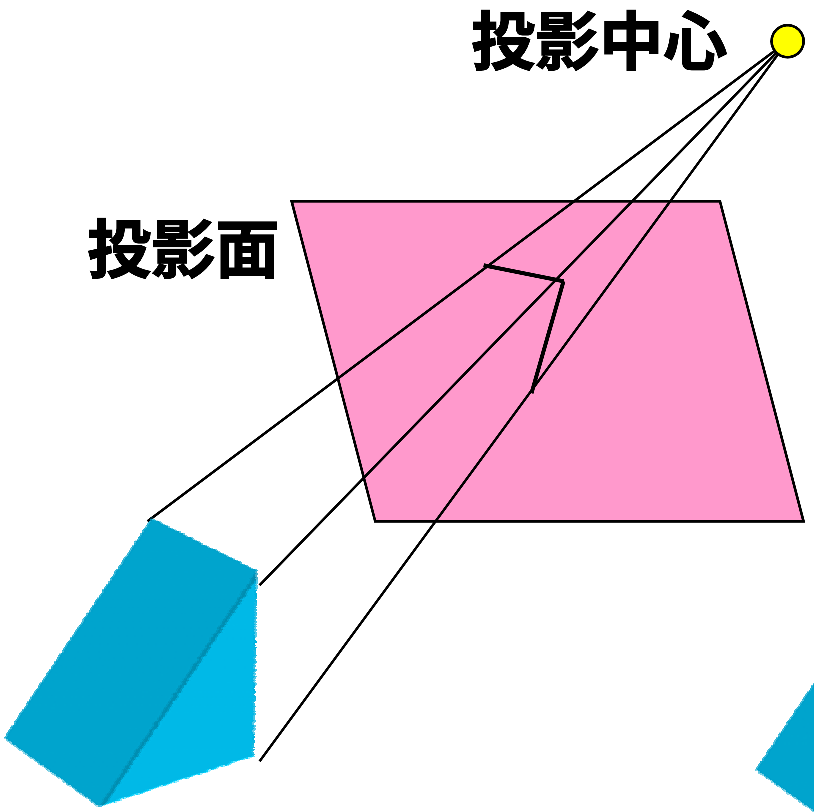
2．回転を四元数で表現することの利点を述べよ．

3．単位四元数が与えられ，四元数の要素を用いて，それと等価な3×3回転行列を示せ．

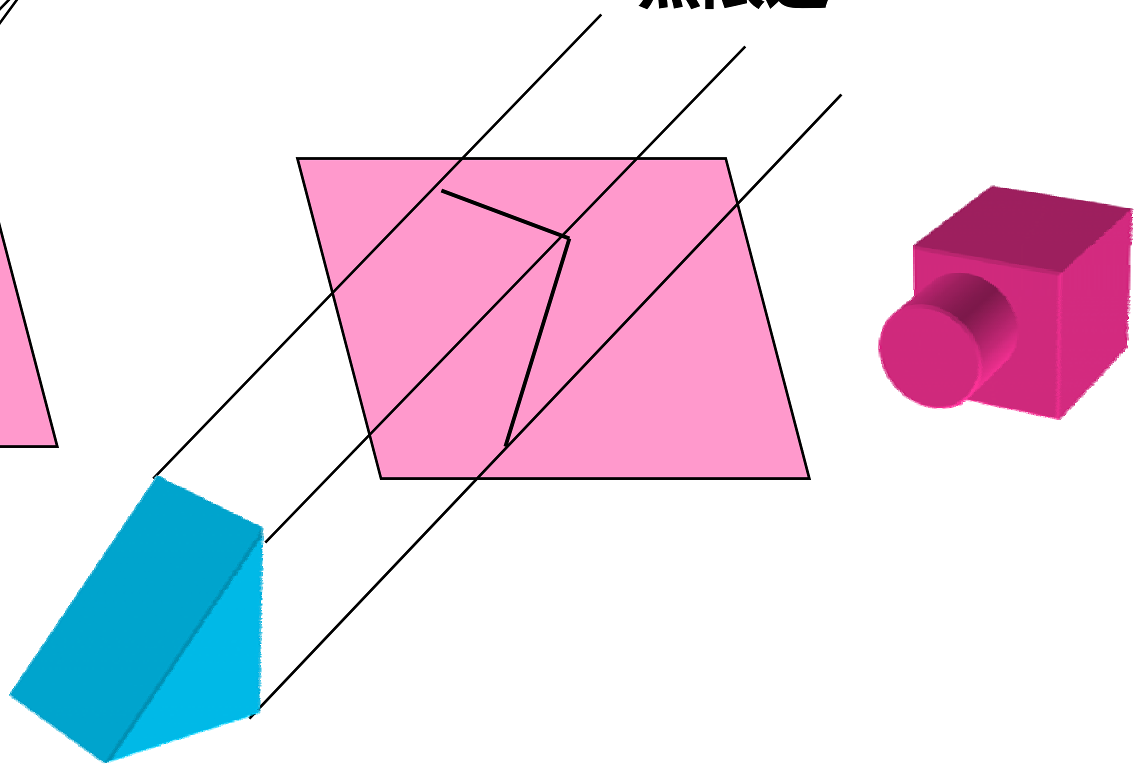
参考文献：BKP Horn著(NTT RVT訳)：ロボットビジョン，朝倉書店，1993．（以下のURLに掲載．）
www.image.med.osaka-u.ac.jp/member/yoshi/ics_lecture/multi_media/

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，<u>投影（カメラ）モデル</u>



中心投影（透視投影）

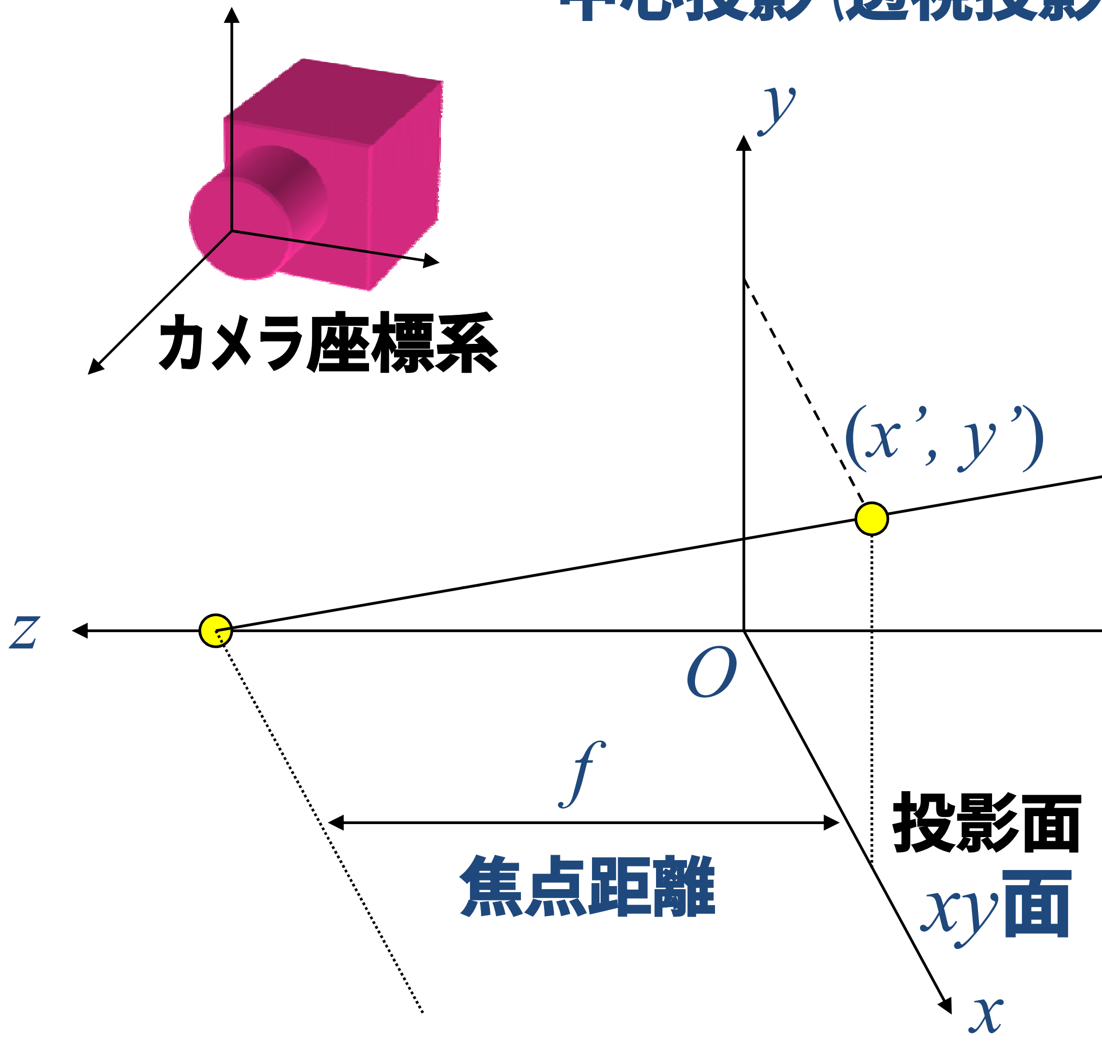


平行投影（直交投影）

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影（カメラ）モデル

中心投影（透視投影）



演習問題　2-C

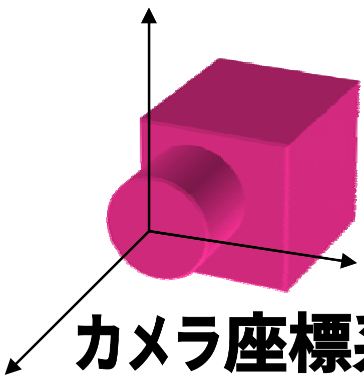
(x', y') を (x, y, z)

と f を用いて表せ．

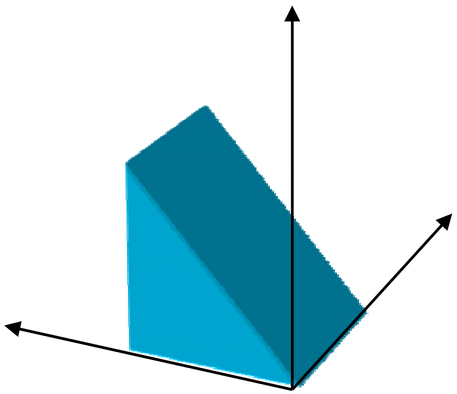
（z 軸の向きに注意せよ。）

ＣＧの基礎：

座標系，座標変換，回転の表現，投影（カメラ）モデル



カメラ座標系



物体座標系

物体モデルの画像投影基本式

$$i_c = \mathrm{P}(p_c) = \mathrm{P}(\mathrm{R}\, p_o + t)$$

i_c カメラ投影面座標系における２次元位置

p_c カメラ座標系における３次元位置

p_o 物体座標系における３次元位置

$\mathrm{P}(\ )$ **中心投影**を表す変換式（演習問題2-C）

R **回転（姿勢）**を表す３×３行列
（３自由度）

t **平行移動**を表す３次元ベクトル
（x, y, z 方向の３自由度）

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影（カメラ）モデル
まとめ

- 剛体変換
- ３次元回転の表現
  - 回転行列
  - オイラー角
  - 四元数　（回転の本質をつく、数学的にエレガントで、かつ、実用性の高い回転表現）
- 投影モデル
- その他、実用上押さえておきたいポイント（自習課題）
  - 同次座標
    - 平行移動と回転（およびその他座標変換）を１つの行列で表現
    - 投影も統一的に表現

ＣＧの基礎：
座標系，座標変換，回転の表現，投影（カメラ）モデル
同次座標

- 平行移動 t と3×3 行列の回転 R （およびその他座標変換）を1つの4×4行列 T で表現　（p'_o は、p_o の3つの要素の後に 1 を付加した4次元ベクトル）

$$\mathrm{R}_1\, p_o + t_1$$

$$\mathrm{R}_2(\mathrm{R}_1\, p_o + t_1) + t_2$$

$$\mathrm{R}_3(\mathrm{R}_2\, (\mathrm{R}_1 p_o + t_1) + t_2) + t_3$$

$$\mathrm{T}_1\, p'_o$$

$$\mathrm{T}_2\, \mathrm{T}_1\, p'_o$$

$$\mathrm{T}_3\, \mathrm{T}_2\, \mathrm{T}_1\, p'_o$$

- 投影 P も4×3行列統一的に表現

$$\mathrm{P}\, \mathrm{T}_3\, \mathrm{T}_2\, \mathrm{T}_1\, p'_o$$

わかりやすいウェブページ

- ＣＧ一般（ＣＧのウェブテキストを含む）
  - http://markun.cs.shinshu-u.ac.jp/learn/cg/
  - http://nis-lab.is.s.u-tokyo.ac.jp/~nis/CG/cgtxt/index2.htm
    - http://nis-lab.is.s.u-tokyo.ac.jp/~nis/CG/welcom.htm
  - http://www.c3.club.kyutech.ac.jp/~sukiyaki/index.php?グラフィックス
- 座標変換
  - Wikipedia 座標　http://ja.wikipedia.org/wiki/座標
  - http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/contents/course/robotics/coordtrans.html
- 四元数
  - Wikipedia四元数　http://ja.wikipedia.org/wiki/四元数
  - http://staff.aist.go.jp/toru-nakata/quaternion.html
  - http://www12.plala.or.jp/ksp/mathInPhys/quaternion/