第 3 章　回転の諸表現

3.1　回転と直交変換

$\Sigma = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と $\Sigma' = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1{}', \boldsymbol{e}_2{}', \boldsymbol{e}_3{}')$ を，原点を共有する二つの直交座標系とし，点の位置ベクトルの Σ から Σ' への変換を $\boldsymbol{x}_{\Sigma'} = A\boldsymbol{x}_{\Sigma}$ とする．Σ に関して $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を位置ベクトルとする点の，Σ' に関する位置ベクトル (列ベクトル) をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とすると，$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ となるのであった．Σ と Σ' はどちらも直交座標系であるから，

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i < j \leq 3 \tag{3.1}$$

である．ただし，δ_{ij} は $i = j$ のとき 1，$i \neq j$ のとき 0 となる定数である．式 (3.1) を満たすとき，行列 A を**直交行列** (orthogonal matrix) とよび，直交行列によって定められる座標変換を**直交変換** (orthogonal transformation) とよぶ．したがって，原点の一致する直交座標系同士の座標変換を表わす行列 A は，直交行列である．逆に A が直交行列なら，A を変換行列とする座標変換は，直交座標系同士の座標変換となる．

第二の直交座標系が $\Sigma' = (\mathrm{O}'; \boldsymbol{e}_1{}', \boldsymbol{e}_2{}', \boldsymbol{e}_3{}')$ となって原点が一致しない場合には，座標変換の式は

$$\boldsymbol{x}_{\Sigma'} = A\boldsymbol{x}_{\Sigma} + \boldsymbol{t}$$

(ただし $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^{\mathrm{t}}$ は平行移動を表わすベクトル) となるが，上の考察に

平行移動の操作が加わるだけなので，変換行列 A はやはり直交行列である．

式 (3.1) は $A^t A = I$ (I は単位行列) であることを表わしている．したがって，直交行列 A の逆行列は A^t である．また，これと $\det(A^t) = \det(A)$ から，直交行列 A に対しては，$\det^2(A) = 1$ すなわち $\det(A) = \pm 1$ であることもわかる．

$\Sigma = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ から $\Sigma' = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ への座標変換を表わす直交行列 A が，特に $\det(A) = 1$ を満たすときには，二組の座標軸 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ は同じ向きをもつ．したがって，原点 O を始点とし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を表わす有向線分の長さとお互いの相対的角度を変えないで，方向を連続に動かすことによって，それらをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ に重ね合わせることができる．$\det(A) = 1$ を満たす直交変換を特に**回転** (rotation) または**回転変換** (rotational transformation) という．

$\det(A) = -1$ のときには，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

とおき，$A' = BA$ とおくと，$A = BA'$, $\det(A') = 1$ であるから，A は「回転 A' を施したあと第 3 座標軸に垂直な鏡に関して鏡像をとる」操作を表わすと解釈できる．このように，すべての直交変換は，回転変換であるか，あるいは回転と鏡像をとる変換の合成であるかのいずれかである．

いままで，行列 A は，空間に固定された同一の点を二つの座標系から見たとき，その座標表現がどのように変わるかを表わすものとみなしてきた．しかし，もう一つの見方もできる．座標系は Σ 一つだけを考え，Σ に関して位置ベクトル $\boldsymbol{x}_\Sigma$ と表わされる点が，同じく Σ に関して位置ベクトル $\boldsymbol{y}_\Sigma$ で表わされる点へ“移る”変換を $\boldsymbol{y}_\Sigma = A\boldsymbol{x}_\Sigma$ と表わす．このように，空間の点を別の点へ移す変換を**点変換** (point transformation) とよぶ．点変換は，一つの固定した座標系に関して，移る前の点と移ったあとの点の座標の間の関係式として表現される．座標変換は，点を固定し，それを二つの座標系から眺めたとき表現がどう変わるかを表わすものであった．このことと混同しないように注意していただきたい．以下では，行列 A が表わす変換を座標変換ではなく点変換とみなして扱うことにする．したがって，回転や鏡像は，座標軸を移す操作ではなく，点を動かす操作とみなす．

3.2　回転軸と回転角

(1) 座標軸のまわりの回転

一つの直交座標系 $\Sigma = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を固定する．原点 O を通りベクトル $\boldsymbol{u}$ に平行な直線のまわりの角度 θ の回転変換を表わす行列を $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ で表わす．たとえば，$\boldsymbol{e}_3$ 軸のまわりの角度 θ の回転は

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

で表わされる．このことは，次のようにして確認できる．図 3.1(a) に示すように，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が張る平面上の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_\Sigma = (x_1, x_2, x_3)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\boldsymbol{e}_1$ 軸となす角を θ_1 とする．点 P を $\boldsymbol{e}_3$ 軸のまわりに θ だけ回転した点を Q とし，Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{y}_\Sigma = (y_1, y_2, y_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が $\boldsymbol{e}_1$ 軸となす角を θ_2 とする．$\theta = \theta_2 - \theta_1$ である．$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = r$ とする．$x_1 = r\cos\theta_1$, $x_2 = r\sin\theta_1$ であるから，

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos\theta_2 = r\cos(\theta_1 + \theta) \\ &= r\cos\theta_1\cos\theta - r\sin\theta_1\sin\theta \\ &= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \end{aligned}$$

が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned} y_2 &= r\sin\theta_2 = r\sin(\theta + \theta_1) \\ &= r\sin\theta\cos\theta_1 + r\cos\theta\sin\theta_1 \\ &= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{aligned}$$

が得られる．したがって $\boldsymbol{y}_\Sigma = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_3, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$ である．

ところで，式 (3.2) が表わす回転の向きは座標系のとり方に依存する．図

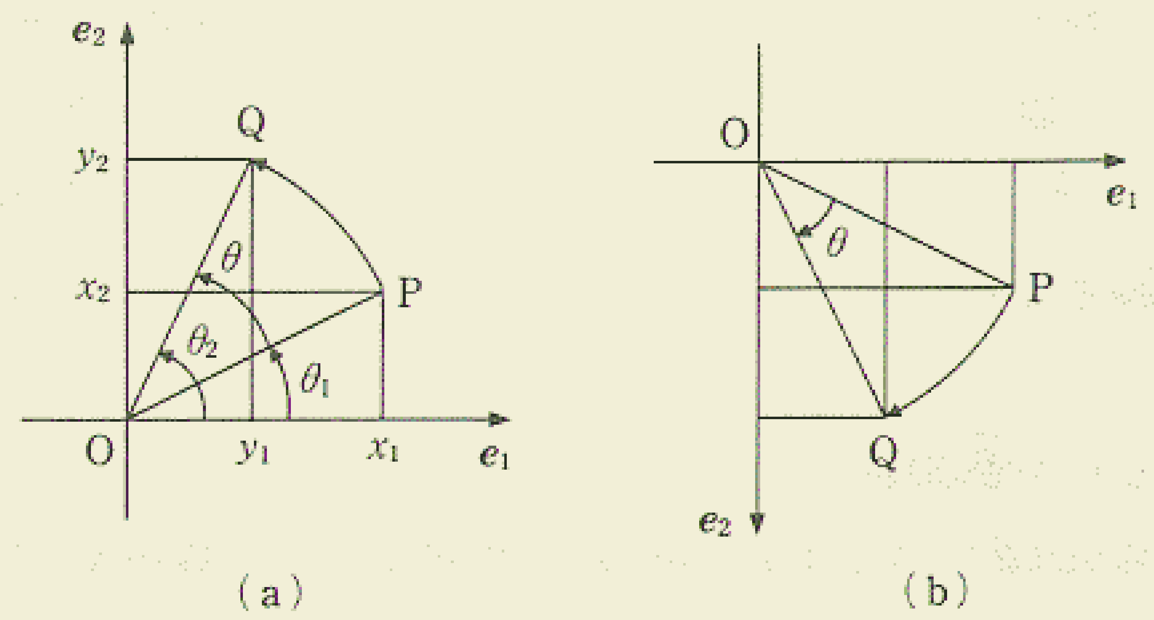

図 3.1　座標系の向きと回転の向き

3.1 において e_3 軸が紙面に垂直に表側を向いているとする．同図 (a) のように e_1, e_2 をとると (このとき Σ は右手系である)，e_3 軸正方向へ先を向けた右ねじが進む (しまる) 回転が正の θ で表わされる向きである．一方，同図 (b) のように e_1, e_2 をとると (このとき Σ は左手系である)，e_3 軸正方向へ先を向けた右ねじが後退する (ゆるむ) 回転が正の θ で表わされる向きである．

e_1, e_2, e_3 の役割を巡回的に取り替えることによって e_1 軸まわりの (e_2 軸から e_3 軸へ向かう向きを正とする) 回転は

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

で表わされ，e_2 軸のまわりの (e_3 軸から e_1 軸へ向かう向きを正とする) 回転は

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_2, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

で表わされる．

(2) 一般の軸のまわりの回転

$\boldsymbol{u}$ を任意の単位ベクトルとし，その $\Sigma = (\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ に関する座標表現

を $\boldsymbol{u}_\Sigma = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{t}}$ とする．$\boldsymbol{u}$ で表わされる軸のまわりの回転を表わす行列 $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ の形を求めよう．

A を，$(\boldsymbol{e}_3)_\Sigma = (0,0,1)^{\mathrm{t}} = A\boldsymbol{u}_\Sigma$，$\det(A) = 1$ を満たす直交行列とする．すなわち，A はベクトル $\boldsymbol{u}$ を e_3 軸に一致させる，向きを変えない直交変換を表わす．$A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$ が成り立つから

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta) = A^{\mathrm{t}}\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_3, \theta)A \tag{3.5}$$

である．すなわち，$\boldsymbol{u}$ 軸まわりの角度 θ の回転は，変換 A によって $\boldsymbol{u}$ 軸を e_3 軸と一致させ，次に e_3 軸まわりの角度 θ の回転を施し，最後に A の逆変換 A^{t} を施すことによって実現できる．

A の i 行 j 列成分を a_{ij} とおく．$\boldsymbol{u}_\Sigma = A^{\mathrm{t}}(0,0,1)^{\mathrm{t}}$ より

$$a_{31} = u_1, \quad a_{32} = u_2, \quad a_{33} = u_3 \tag{3.6}$$

である．また，$\boldsymbol{v}_\Sigma = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^{\mathrm{t}}$，$\boldsymbol{w}_\Sigma = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^{\mathrm{t}}$ とおくと，$\boldsymbol{v}_\Sigma = A^{\mathrm{t}}(1,0,0)^{\mathrm{t}}$，$\boldsymbol{w}_\Sigma = A^{\mathrm{t}}(0,1,0)^{\mathrm{t}}$ であるから，変換 A は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれ $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に一致させることがわかる．したがって

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w},$$

すなわち

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \\ u_2 &= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}, \\ u_3 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{3.7}$$

である．

さて，式 (3.5) より

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

が得られる．式 (3.8) の右辺の 3 個の行列の積を計算すると，$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ の 1

行 1 列成分は

$$
\begin{aligned}
&{a_{11}}^2\cos\theta + {a_{21}}^2\cos\theta + {a_{31}}^2\\
&= {a_{31}}^2(1-\cos\theta) + ({a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 + {a_{31}}^2)\cos\theta\\
&= {u_1}^2(1-\cos\theta) + \cos\theta
\end{aligned}
$$

となる．ただし，上の第 2 番目の等号は行列 A の各行ベクトルが単位ベクトルであることから，第 3 番目の等号は式 (3.6) から得られる．

また，式 (3.8) の 1 行 2 列成分は

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{12}\cos\theta - a_{11}a_{22}\sin\theta + a_{12}a_{21}\sin\theta + a_{12}a_{22}\cos\theta + a_{31}a_{32}\\
&= (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})\cos\theta + a_{31}a_{32}(1-\cos\theta)\\
&\quad -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\sin\theta\\
&= u_1u_2(1-\cos\theta) - u_3\sin\theta
\end{aligned}
$$

となる．ただし，第 2 番目の等号は，A の行ベクトルが互いに直交していること，および式 (3.6)，(3.7) から得られる．

式 (3.8) の他の成分も同様に計算でき，最終的には

$$
\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u},\theta) = \begin{pmatrix} {u_1}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_1u_2(1-\cos\theta)-u_3\sin\theta & u_1u_3(1-\cos\theta)+u_2\sin\theta \\ u_1u_2(1-\cos\theta)+u_3\sin\theta & {u_2}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)-u_1\sin\theta \\ u_1u_3(1-\cos\theta)-u_2\sin\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)+u_1\sin\theta & {u_3}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.9}
$$

が得られる．この式によって，回転の方向 $\boldsymbol{u}$ と角度　θ から実際に回転変換を表わす行列を求めることができる．

(3) 回転軸と回転角の算出

上では回転軸 $\boldsymbol{u}$ と回転角 θ から変換行列 $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u},\theta)$ を求める方法を構成

したが，次に，回転変換を表わす行列 R が与えられたとき，それが表わす回転の軸と角度を求める方法を構成する．これは理論的には次のように理解できる．ベクトル $\boldsymbol{x}$ とスカラー μ が $R\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}$ と μ はそれぞれ行列 R の**固有ベクトル** (eigenvector)，**固有値** (eigenvalue) とよばれる．回転を表わす行列 R は固有値 1 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ をもち，それが回転軸の方向を表わす．残りの二つの固有値は互いに共役な虚数 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ (ただし $\alpha^2+\beta^2=1$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$) となり，$\alpha=\cos\theta$，$\beta=\sin\theta$ を満たす θ として回転角が得られる．しかし，このような議論を展開するためにはいくつかの準備が必要なので，ここではもう少し初等的な方法で $\boldsymbol{u}$ と θ の構成法を求める．

与えられた直交行列を

$$
R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \tag{3.10}
$$

とする．式 (3.9) と式 (3.10) を等しいとおいて，それから $\boldsymbol{u},\theta$ を求める．まず，対角成分の和を等しいと置くと

$$
\begin{aligned}
r_{11}+r_{22}+r_{33} &= ({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)(1-\cos\theta) + 3\cos\theta\\
&= 1 + 2\cos\theta
\end{aligned}
$$

となり，これから

$$
\cos\theta = \frac{1}{2}(r_{11}+r_{22}+r_{33}-1) \tag{3.11}
$$

が得られる．これが，R から θ を求める式である．実際，$0\le\theta\le\pi$ の範囲では，式 (3.11) から θ が一義的に決まる．$-\pi<\theta<0$ の場合には，$\boldsymbol{u}$ の代わりに $-\boldsymbol{u}$ を考えれば $0\le\theta\le\pi$ に帰着できるから問題はない．

式 (3.9) と式 (3.10) を等しいと置いて，1 行 2 列と 2 行 1 列の差をとると

$$
r_{12} - r_{21} = -2u_3\sin\theta, \tag{3.12}
$$

1 行 3 列と 3 行 1 列の差をとると

$$
r_{13} - r_{31} = 2u_2\sin\theta, \tag{3.13}
$$

2 行 3 列と 3 行 2 列の差をとると

$$r_{23} - r_{32} = -u_1 \sin\theta \tag{3.14}$$

が得られる．この 3 式から

$$u_1 = -\frac{r_{23} - r_{32}}{2\sin\theta}, \quad u_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{2\sin\theta}, \quad u_3 = -\frac{r_{12} - r_{21}}{2\sin\theta} \tag{3.15}$$

となる．これが，R から回転軸方向 $\boldsymbol{u}$ を求める式である．

θ が 0 または π に近いときには，式 (3.15) の各式の右辺は分子も分母も 0 に近づく．そのため，式 (3.15) で直接 u_1, u_2, u_3 を計算すると，数値誤差のために (u_1, u_2, u_3) が単位ベクトルからずれる恐れがある．その場合には，三つの式の分母が共通であることに着目し，まず比 $-(r_{23} - r_{32}) : (r_{13} - r_{31}) : -(r_{12} - r_{21})$ を求めて，この比をもつ単位ベクトルを作るという方針で u_1, u_2, u_3 を求めるべきである．すなわち

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{(-r_{23} + r_{32},\ r_{13} - r_{31},\ -r_{12} + r_{21})}{\sqrt{(r_{23} - r_{32})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{12} - r_{21})^2}} \tag{3.16}$$

を使って求めればよい．

3.3 回転の分解

(1) 回転行列の積

二つの回転を表わす行列 $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$, $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)$ の積

$$R = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta) \tag{3.17}$$

の意味を考えよう．ここで $\boldsymbol{y}_\Sigma = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$，$\boldsymbol{z}_\Sigma = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)\boldsymbol{y}_\Sigma$ とおくと，$\boldsymbol{z}_\Sigma = R\boldsymbol{x}_\Sigma$ であるから，R は点 $\boldsymbol{x}_\Sigma$ を回転 $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ によって $\boldsymbol{y}_\Sigma$ へ移したあと，さらに回転 $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)$ によって $\boldsymbol{z}_\Sigma$ へ移すという，回転の合成を表わしている．いま座標系 Σ は固定し，点変換を考えているから，回転軸の方向 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ はともに空間に固定された方向を表わす．特に $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)$ の $\boldsymbol{v}$ 方向は，点がそれまでにどのような回転を受けたかには無関係である．

以上のことはあたりまえのように思えるかもしれないが，念のためにまとめ

ておく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \boldsymbol{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \boldsymbol{v}$ となる有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ を空間に固定する．空間の任意の点の Σ に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_\Sigma$ とし，これをまず $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ 軸のまわりに θ だけ回転し，次に $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ 軸（これははじめから固定されたものであって，いま施した回転の影響は受けていない）のまわりに ψ だけ回転した点の Σ に関する位置ベクトルが $\boldsymbol{z}_\Sigma = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$ である．

次に，$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ などを座標変換を表わす行列とみなした場合の解釈を考えよう．この場合は，空間の点は動かず，それを表現するための座標系が入れ替わる．点 P の直交座標系 Σ に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_\Sigma$ とし，座標変換 $\boldsymbol{x}_{\Sigma'} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$ によって，座標系が Σ' に移り，さらにもう一つの座標変換 $\boldsymbol{x}_{\Sigma''} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)\boldsymbol{x}_{\Sigma'}$ によって，座標系が Σ'' に移るものとする．最初の変換は，Σ 座標系に関して位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ で表わされる方向を回転軸とし，Σ を $-\theta$ だけ回転して得られる座標系が Σ' であることを表わしている．一方，第 2 の座標変換 $\boldsymbol{x}_{\Sigma''} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{v}, \psi)\boldsymbol{x}_{\Sigma'}$ は，Σ' 座標系に関して位置ベクトル $\boldsymbol{v}$ で表わされる方向を回転軸とし，Σ' を $-\psi$ だけ回転して得られる座標系が Σ'' であることを表わしている．このように，$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)$ などを座標変換を表わす行列と解釈するときには，回転軸を表わす $\boldsymbol{u}$ は，「座標変換を施す直前の座標系に関する位置ベクトル」とみなさなければならない．

ところで，Σ 座標系に関して位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ をもつ点 P_1 は座標変換 $\boldsymbol{x}_{\Sigma'} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$ を施したあとも同じ位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ をもつ．なぜなら座標軸は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ のまわりで回転するから，座標軸と P_1 の相対的な位置関係は変わらないからである．したがって，座標変換 $\boldsymbol{x}_{\Sigma'} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{u}, \theta)\boldsymbol{x}_\Sigma$ が表わす回転の軸 $\boldsymbol{u}$ は，「座標変換を施した直後の座標系に関する位置ベクトル」でもある．

(2) オイラー角

まず $\boldsymbol{e}_3$ 軸のまわりに角度 ϕ の回転を施し，次に $\boldsymbol{e}_2$ 軸のまわりに角度 θ の回転を施し，最後に $\boldsymbol{e}_3$ 軸のまわりに角度 ψ の回転を施して得られる点変換は

$$R = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_3, \psi)\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_2, \theta)\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e}_3, \phi) \tag{3.18}$$

と表わせる．R も一つの回転を表わす．回転 R をこのように分解して得られ

る三つの角度の組 (ψ, θ, ϕ) を回転 R の**オイラー角** (Euler angles) という．

任意の回転がオイラー角によって表現できる．このことは，任意の回転行列 R が，式 (3.18) の右辺のように分解できることからわかる．実際，次のようにして，ψ, θ, ϕ が定まる．R の i 行 j 列成分を r_{ij} とする．R は直交行列であるから，その列ベクトルは単位ベクトルであり，R のすべての成分は絶対値が 1 以下の実数である．したがって，

$$r_{33} = \cos\theta \tag{3.19}$$

となる $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ がただ一つ定まる．同様の理由により，

$$\begin{aligned} r_{13} &= \sin\theta\cos\psi, \quad r_{23} = \sin\theta\sin\psi \\ r_{31} &= -\sin\theta\cos\phi, \quad r_{32} = \sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{3.20}$$

となるような ψ, ϕ が存在する．

R の残りの成分 $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$ は，R の各行ベクトルが互いに直交する単位ベクトルであること，および式 (3.19), (3.20) から，次式を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} &{r_{11}}^2 + {r_{12}}^2 + (\sin\theta\cos\psi)^2 = 1, \\ &{r_{21}}^2 + {r_{22}}^2 + (\sin\theta\sin\psi)^2 = 1, \\ &-r_{11}\sin\theta\cos\phi + r_{12}\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\psi\cos\theta = 0, \\ &-r_{12}\sin\theta\cos\phi + r_{22}\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\psi\cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

上の第 1 式と第 3 式から r_{11} を消去すると

$$(1 - {r_{12}}^2 - (\sin\theta\cos\psi)^2)\cos^2\phi = (r_{12}\sin\phi + \cos\psi\cos\theta)^2$$

が得られ，これを変形して

$$\begin{aligned} {r_{12}}^2 + 2r_{12}\sin\phi\cos\psi\cos\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\psi\cos^2\phi - \cos^2\phi \\ = 0, \\ (r_{12} + \cos\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi)(r_{12} + \cos\theta\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi) \\ = 0 \end{aligned}$$

が得られる．他の式も同様に処理でき，式 (3.12) を満たす一つの組として

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos\theta\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi, \\ r_{12} &= -\cos\theta\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi, \\ r_{21} &= \cos\theta\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi, \\ r_{22} &= -\cos\theta\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi \end{aligned} \tag{3.22}$$

が得られる．このように式 (3.19), (3.20), (3.22) で R のすべての成分を定めたが，このとき実際に計算をしてみると

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

が成り立つことがわかる．すなわち，式 (3.18) の分解が得られた．このように，任意の回転行列は式 (3.18) の形に分解でき，したがってオイラー角 (ψ, θ, ϕ) を用いて表現できる．

(3) ロール・ピッチ・ヨー

まず e_3 軸のまわりに角度 ϕ の回転を施し，次に e_2 軸のまわりに角度 θ の回転を施し，最後に e_1 軸のまわりに角度 ψ の回転を施すことによっても任意の回転 R を表わすことができる．この場合は

$$R = \mathrm{Rot}(e_1, \psi)\mathrm{Rot}(e_2, \theta)\mathrm{Rot}(e_3, \phi) \tag{3.24}$$

である．図 3.2 に示すように，水面に対して垂直上方を e_1 軸にとり，船の進

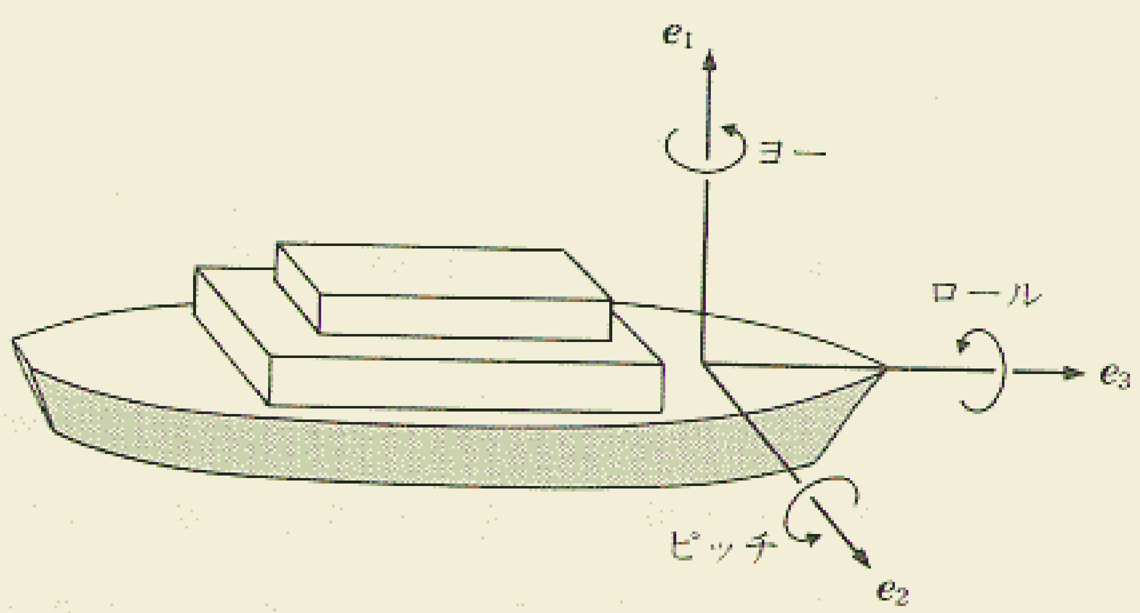

図 3.2　船の揺れの分解

行方向を e_3 軸にとる直交座標系を考えると，船の揺れ方の e_3, e_2, e_1 軸まわりの回転成分は，それぞれ**ロール** (roll)，**ピッチ** (pitch)，**ヨー** (yaw) とよばれる．したがって，式 (3.24) の分解は，ロール・ピッチ・ヨー分解などとよばれることもある．

第 4 章　投影の幾何学

4.1　投影法の分類

太陽に照らされた物の影が地面にできるように，光源から出た光が物体の像を平面へ投げかける過程を**投影** (projection) という．光源を視点に置き換えれば，投影は，ある位置から物体を見たときの見え方を平面に描く方法ともなる．したがって，投影は，立体を画像として描くための基本的道具である．本章では，この投影の方法を分類する．

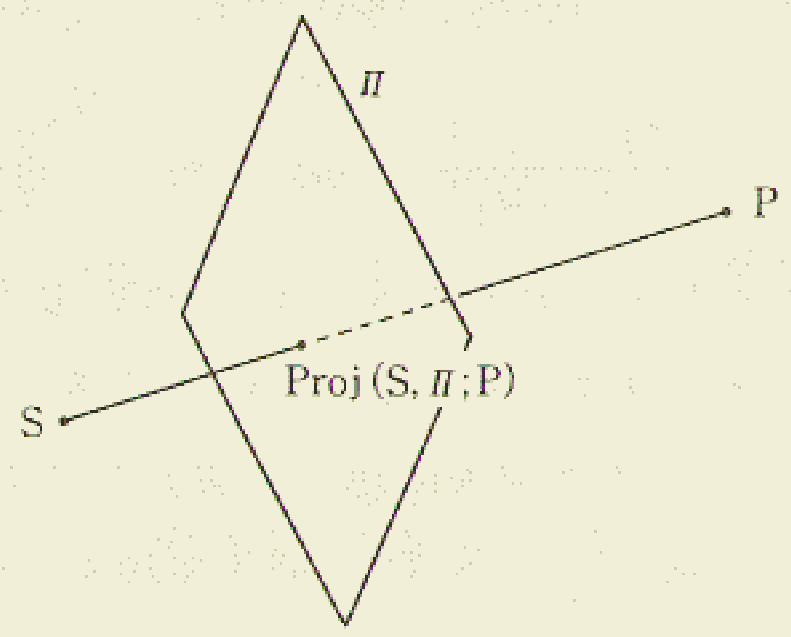

図 4.1　点とその投影像

3 次元空間に固定された一つの点を S とし，S を含まない一つの平面を Π とする．図 4.1 に示すように，S とは異なる任意の点 P に対して，直線 SP が Π と交点をもつとき，その交点を $\mathrm{Proj}(\mathrm{S}, \Pi; \mathrm{P})$ とおく．そして，この点