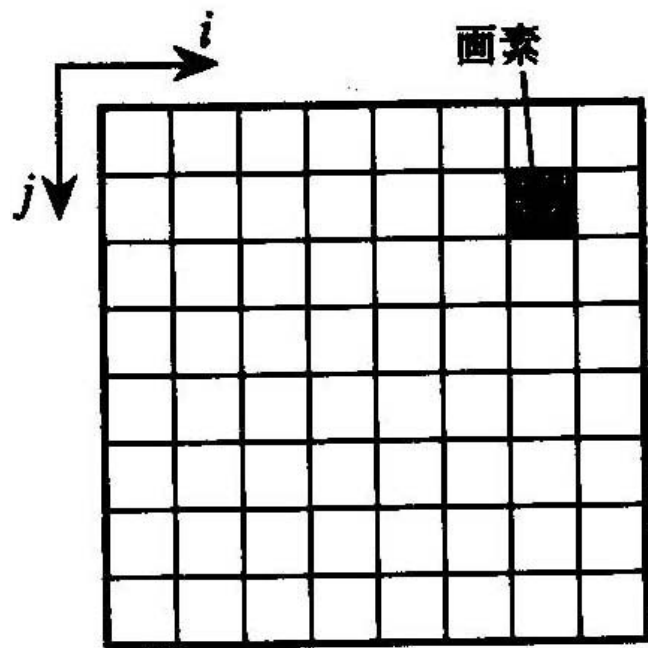


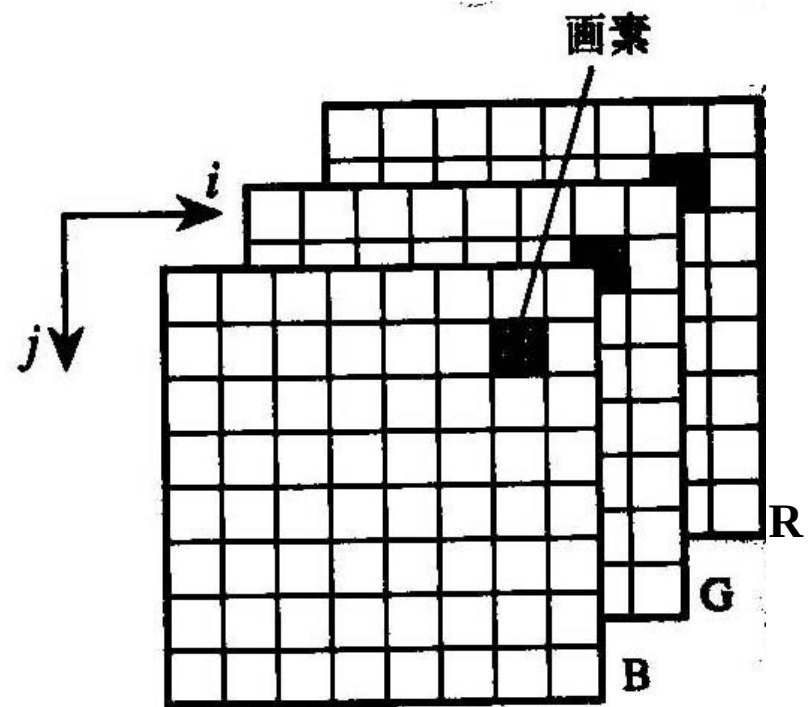
マルチメディア工学 2/4

画像処理の基本と情報圧縮・伝送

田村進一

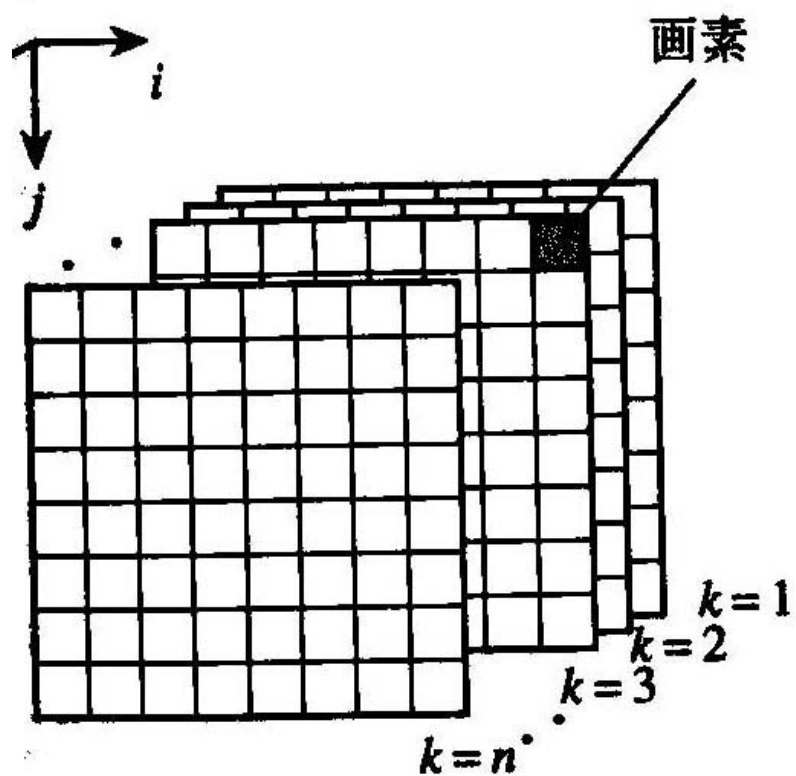


〈a〉 モノクローム画像

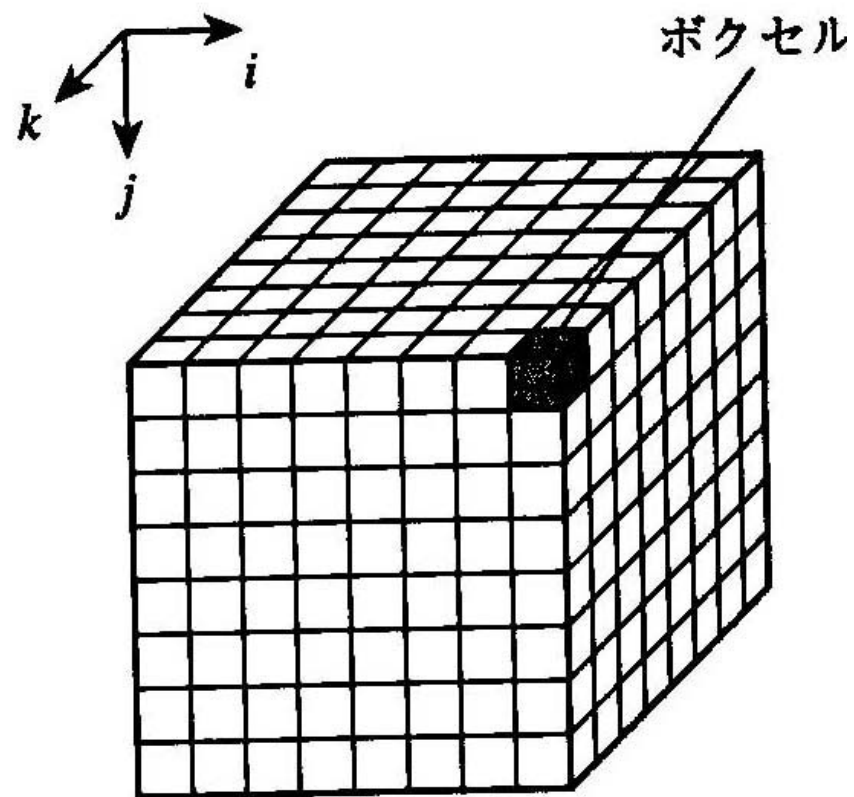


〈b〉 カラー画像

白黒画像とカラー画像

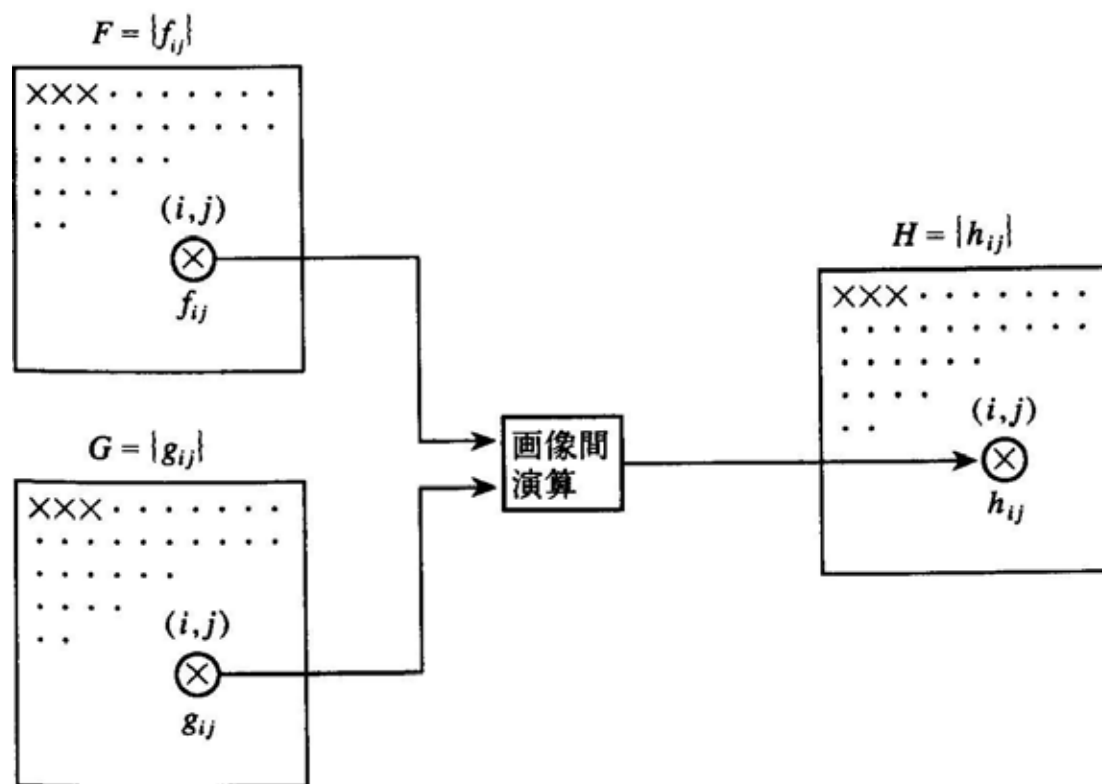
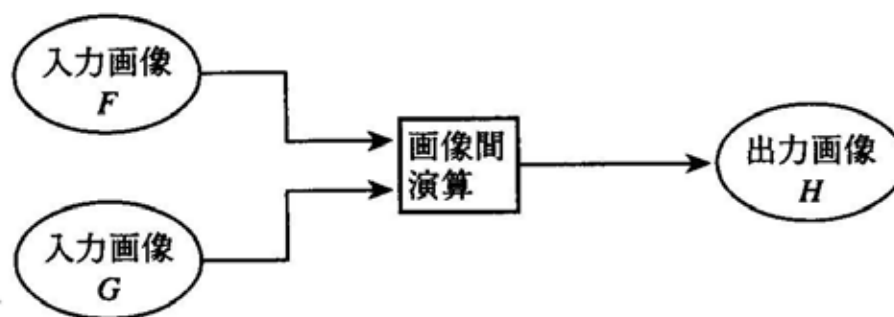


マルチチャネル画像



3次元画像

多次元画像データ



画像間演算 (2入力1出力) 減算処理 等

画像の和による 雑音の減少

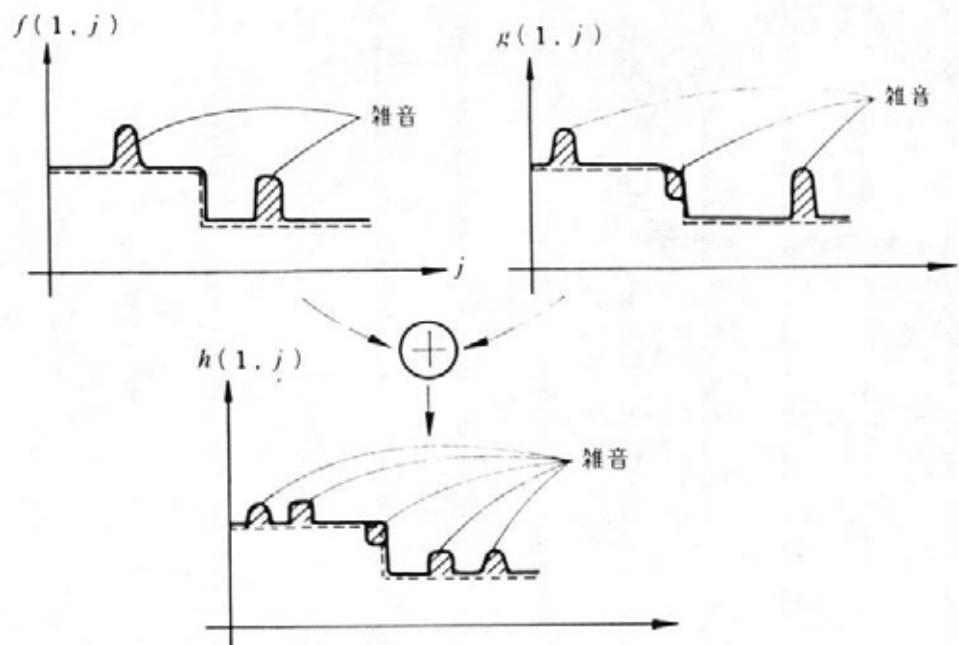
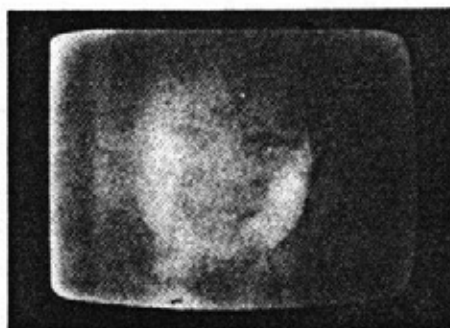


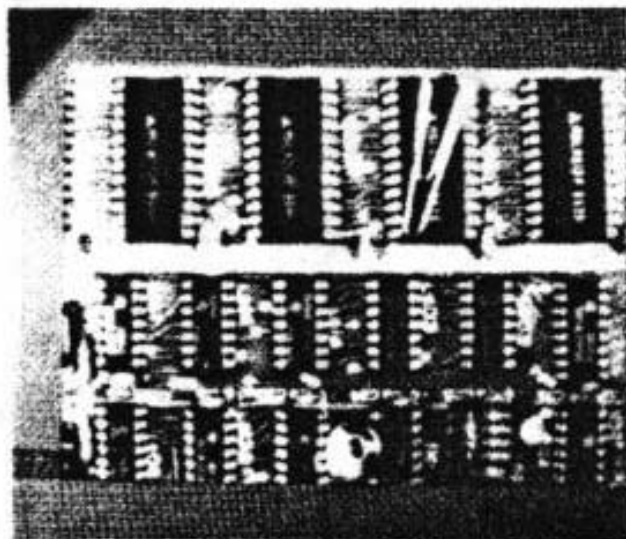
図 3.1 画像の和による雑音の減少



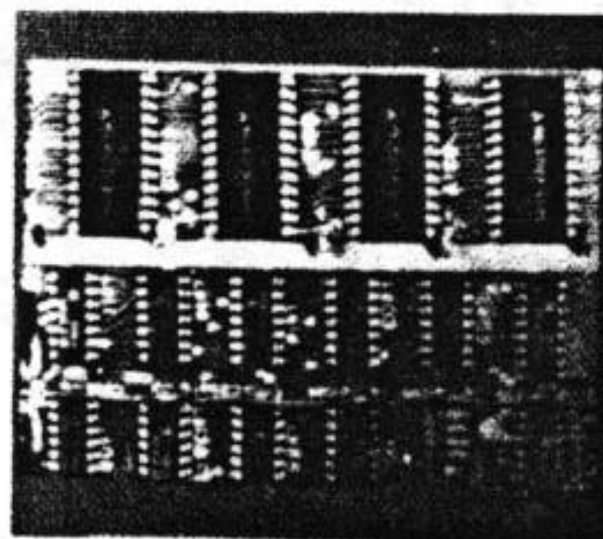
(a) 原画像



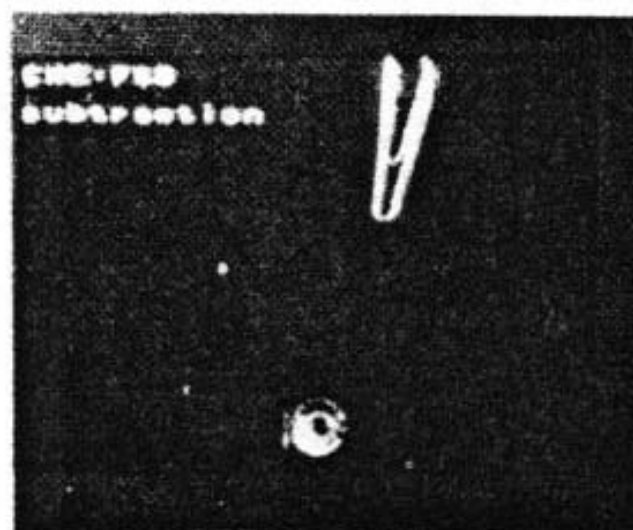
(b) 積分処理画像



原 画 A

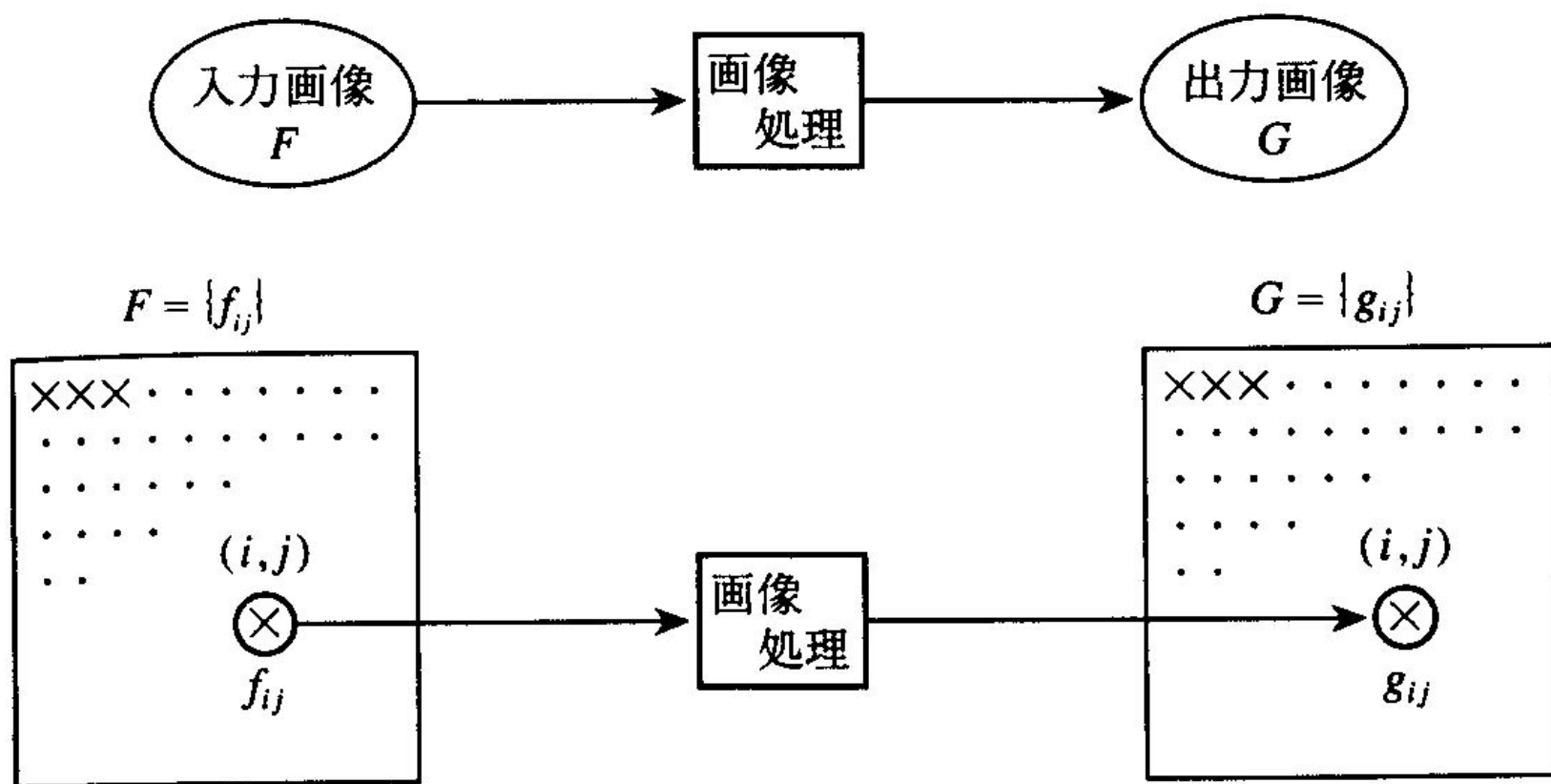


原 画 B

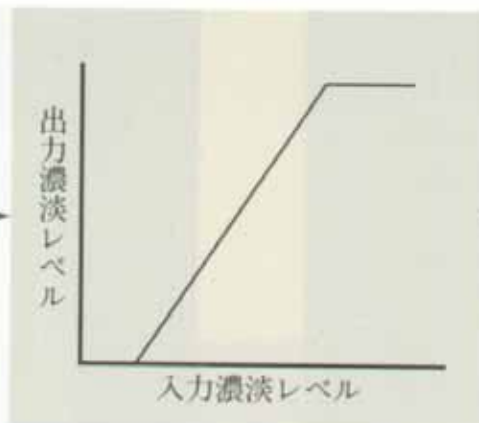


画像間差 A - B

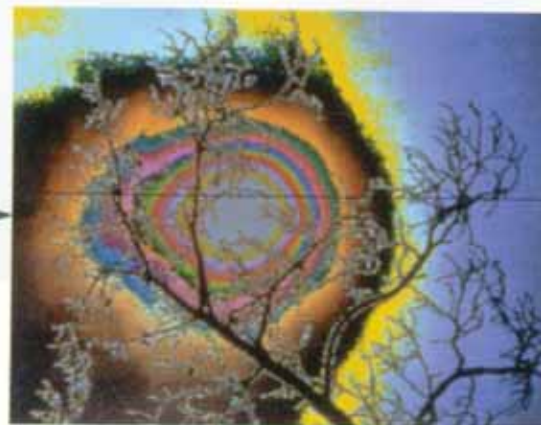
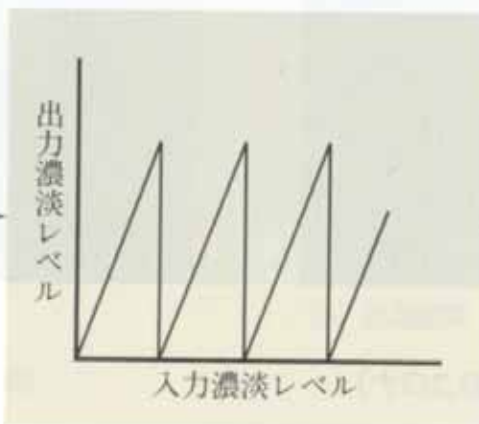
図 3.4 画像間差による異物検査例



1枚の画像上での処理 (1入力1出力)
階調処理, フィルタリング, フーリエ変換 等

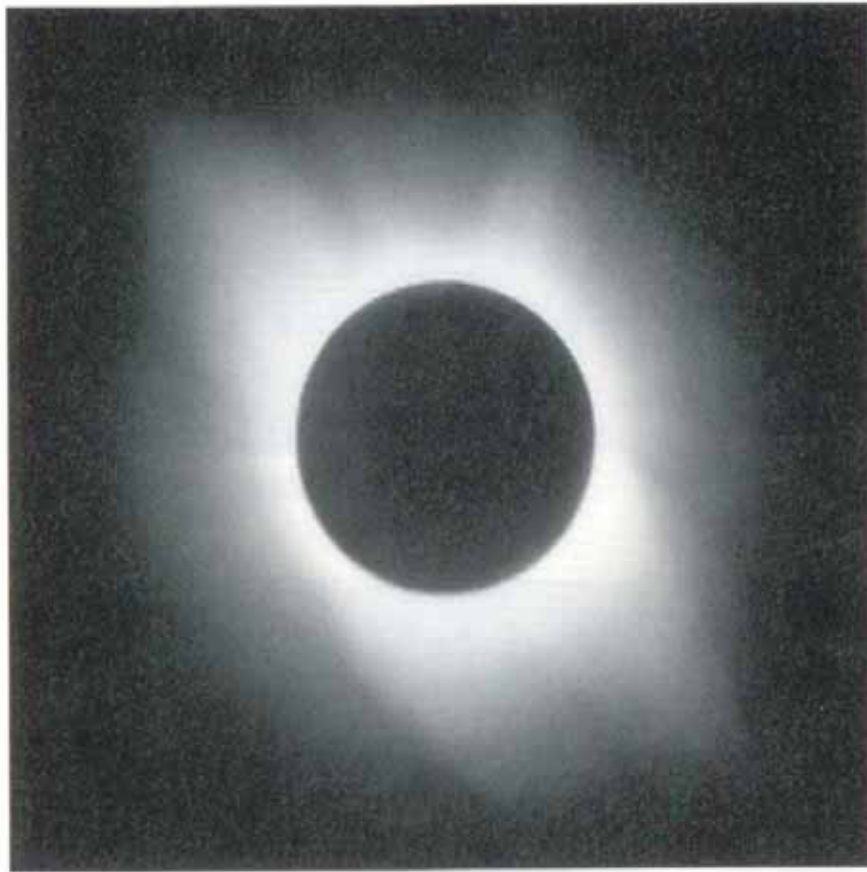


〈a〉線形変換関数



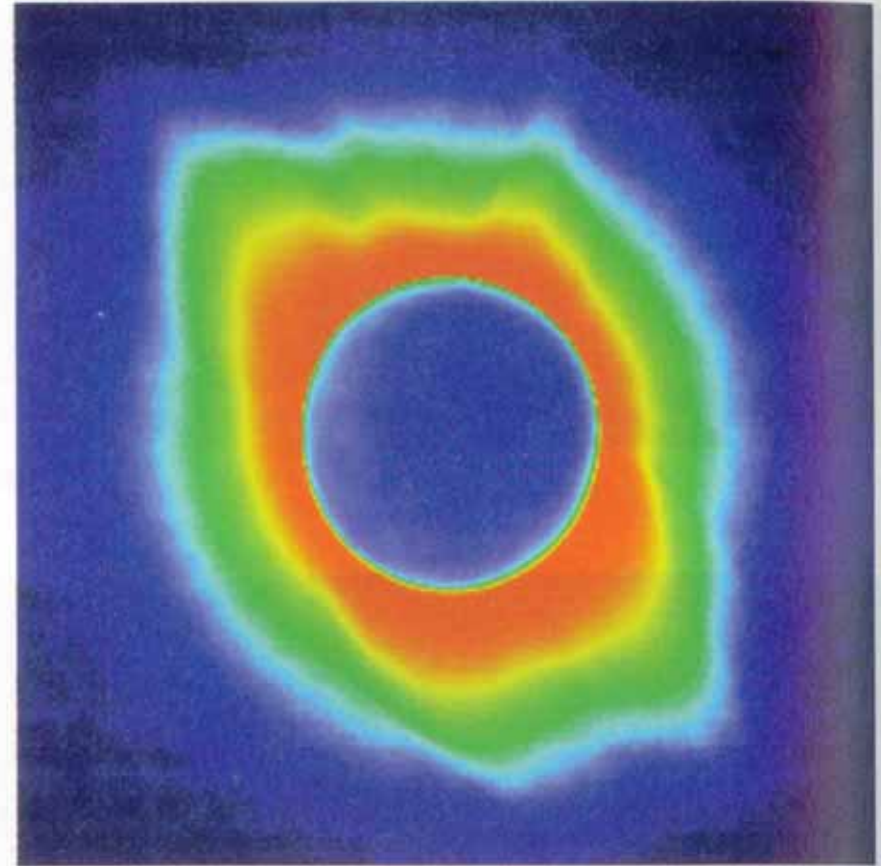
〈b〉鋸歯状波関数

コントラスト変換



〈a〉 白黒画像

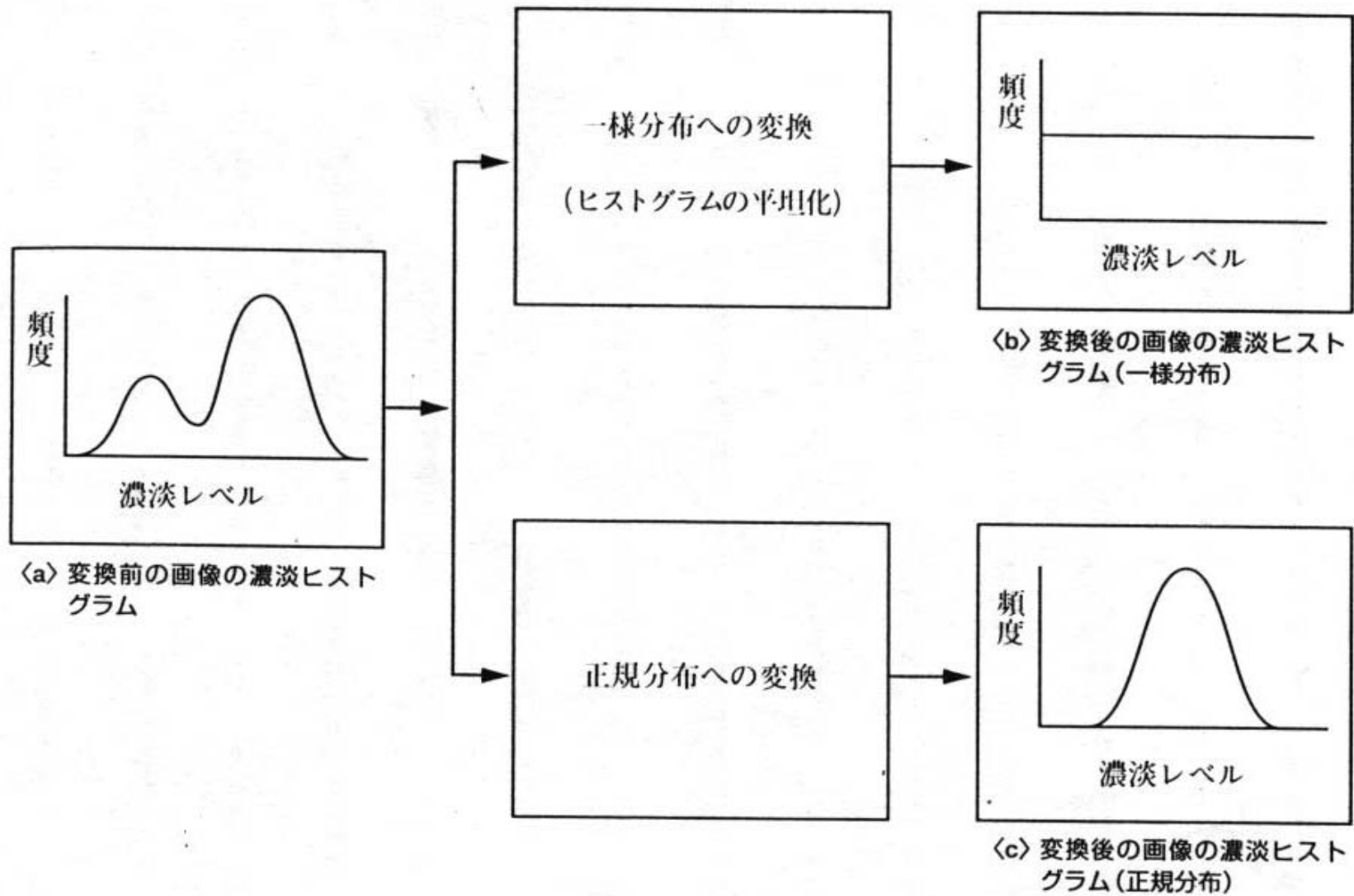
白黒



〈b〉 シュードカラー表示

疑似カラー

疑似カラー表示(太陽のコロナ)



ヒストグラム変換



一様分布への変換
(ヒストグラムの平坦化)
一様分布化

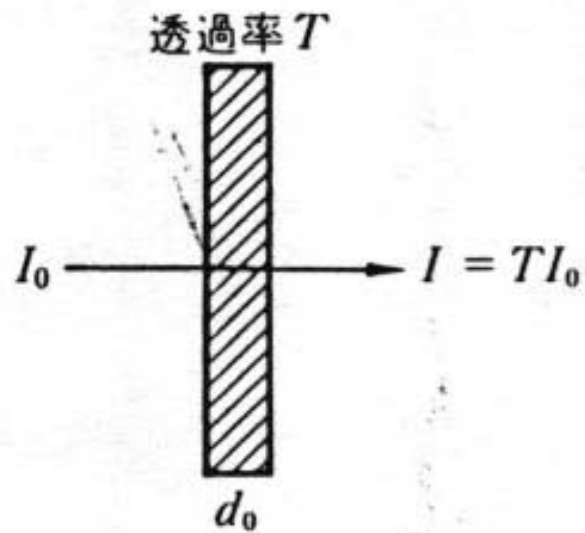


正規分布への変換

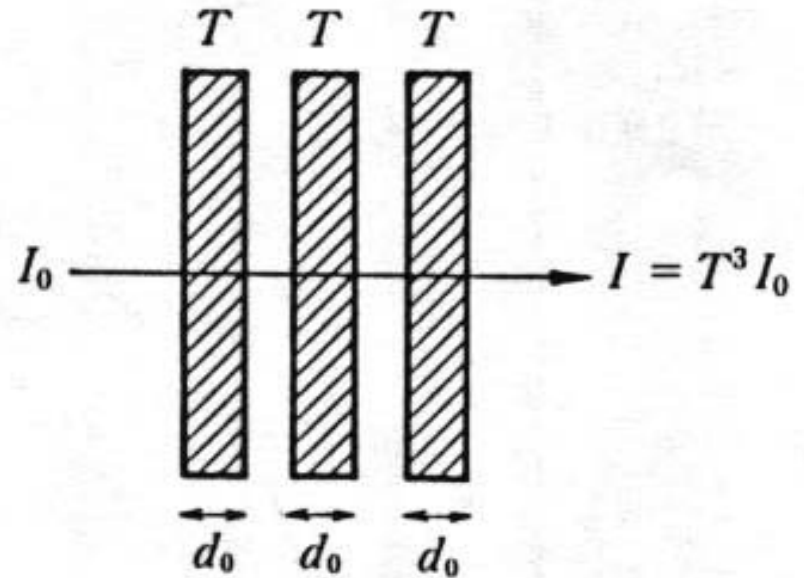
正規分布化



ヒストグラム変換

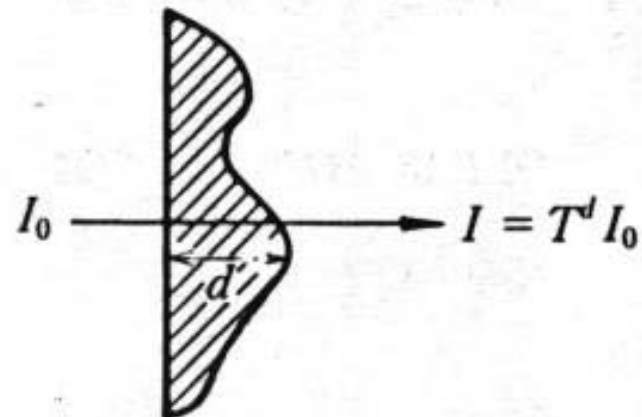


(a) 半透板 1 枚のときの透過強度



(b) 半透板 3 枚のときの透過強度 I

透過強度は
厚さ・黒化度の指数



(c) 厚さ d の半透板の透過強度

図 2.17 半透板の透過強度 I

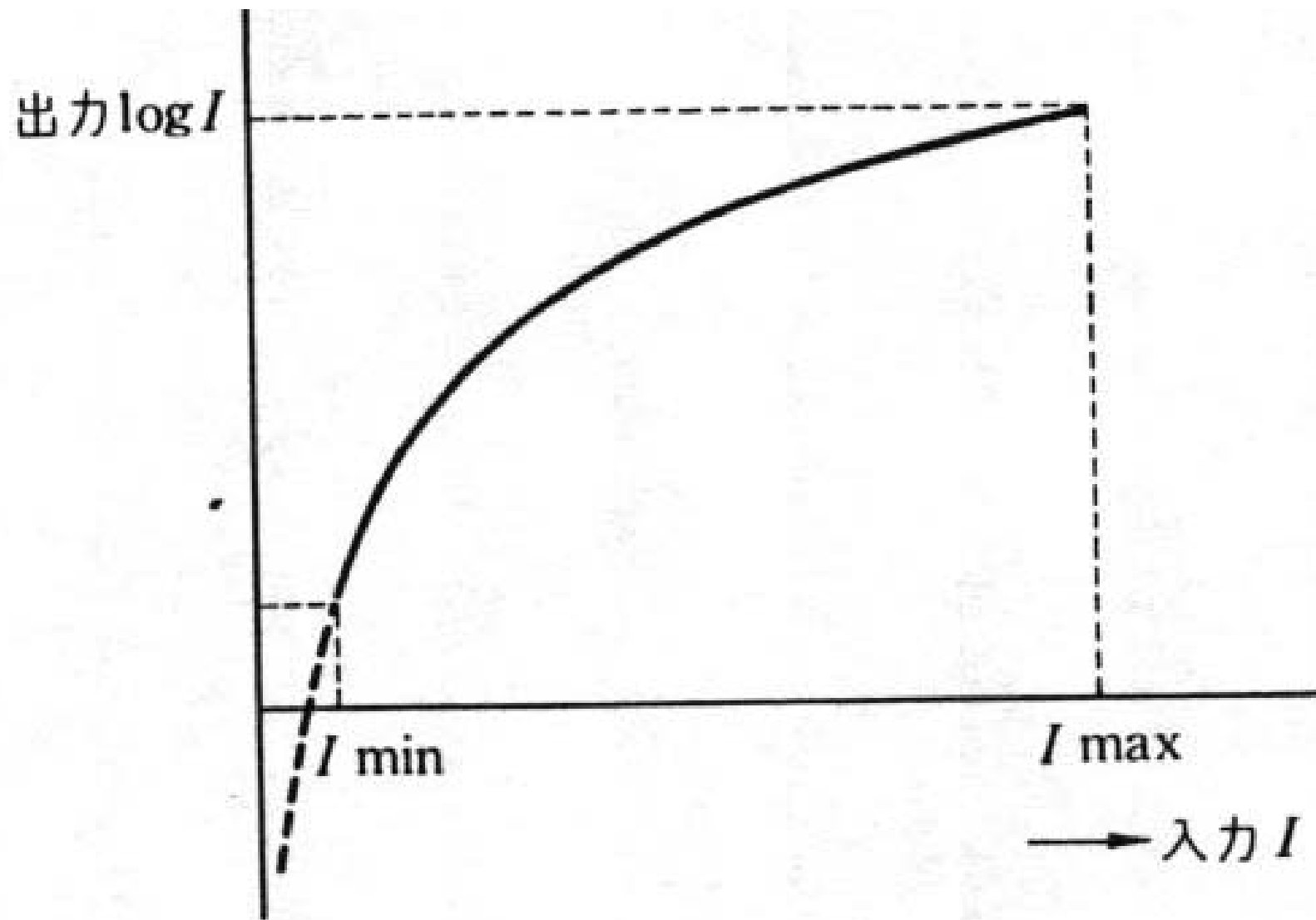
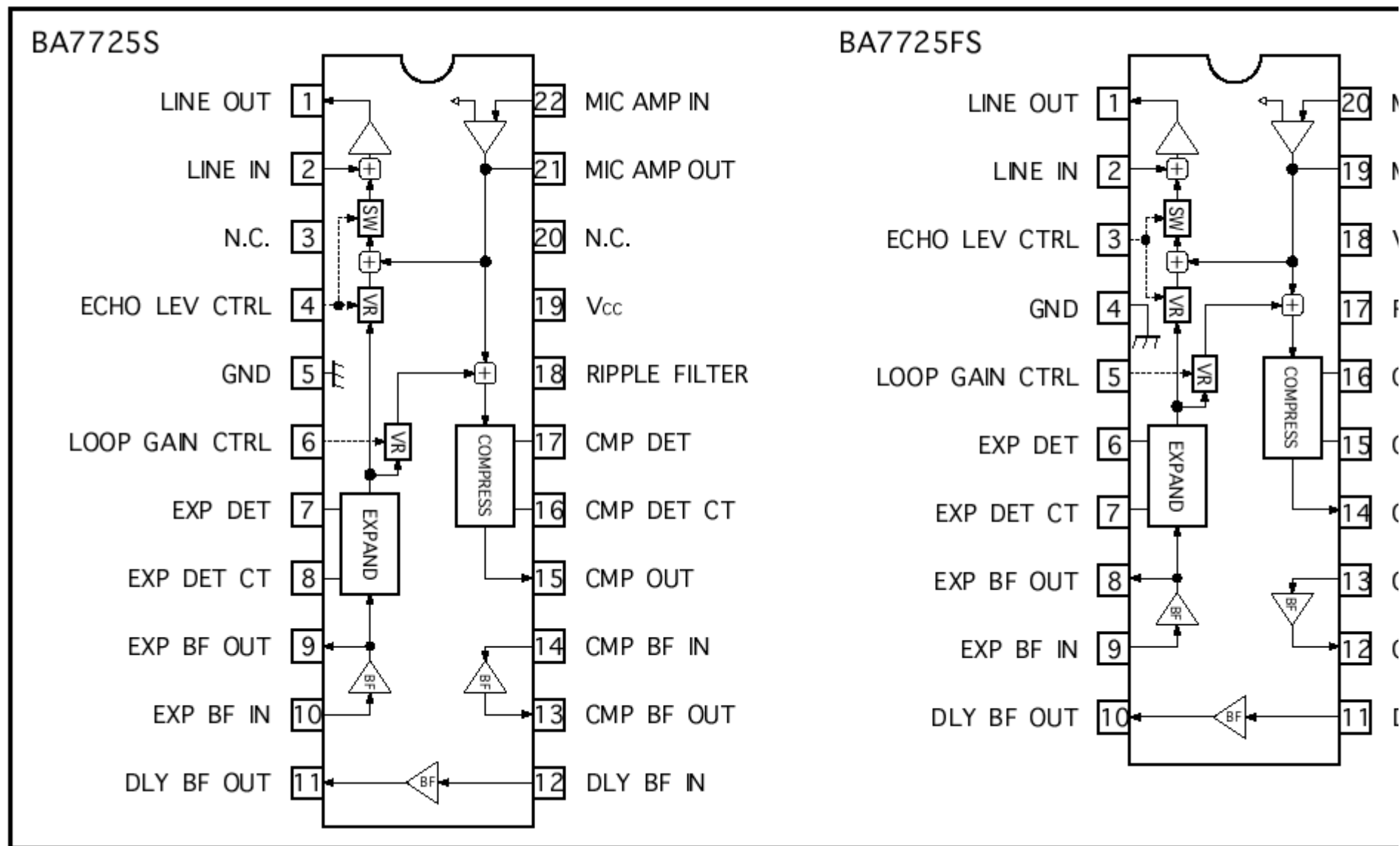


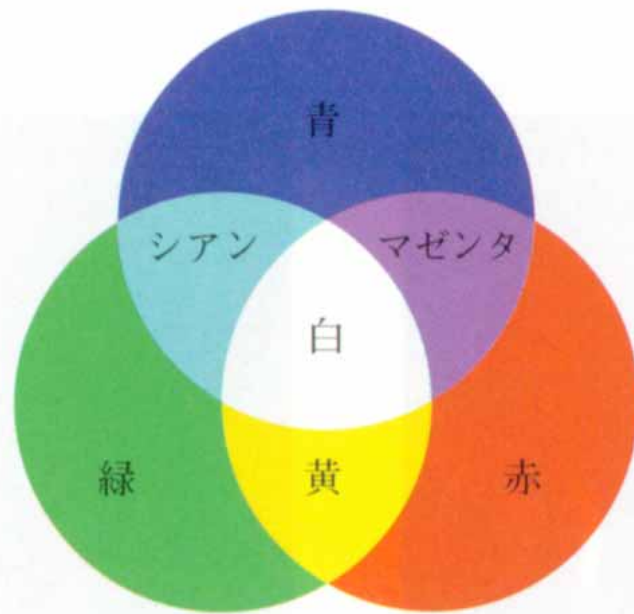
図 2.18 対数アンプ特性

厚さ・黒化度を得るためには、対数操作必要

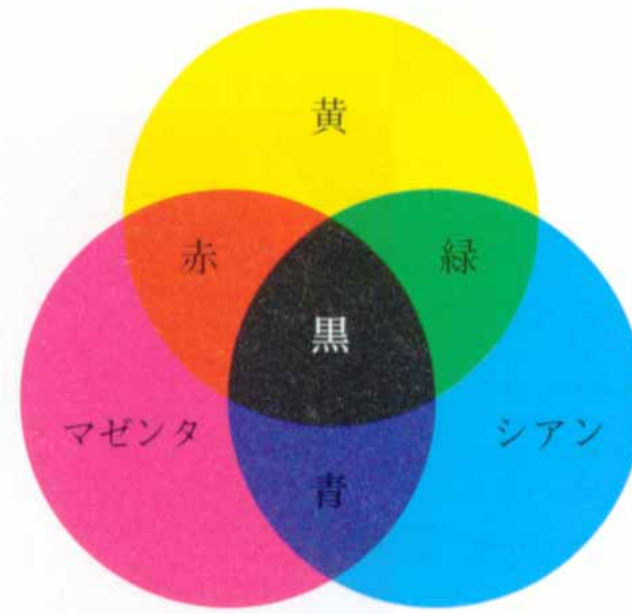


対数圧縮型 CMOSイメージセンサー
 120dB 輝度レベルで $10^{**}6$
 日向と日陰

対数アンプ

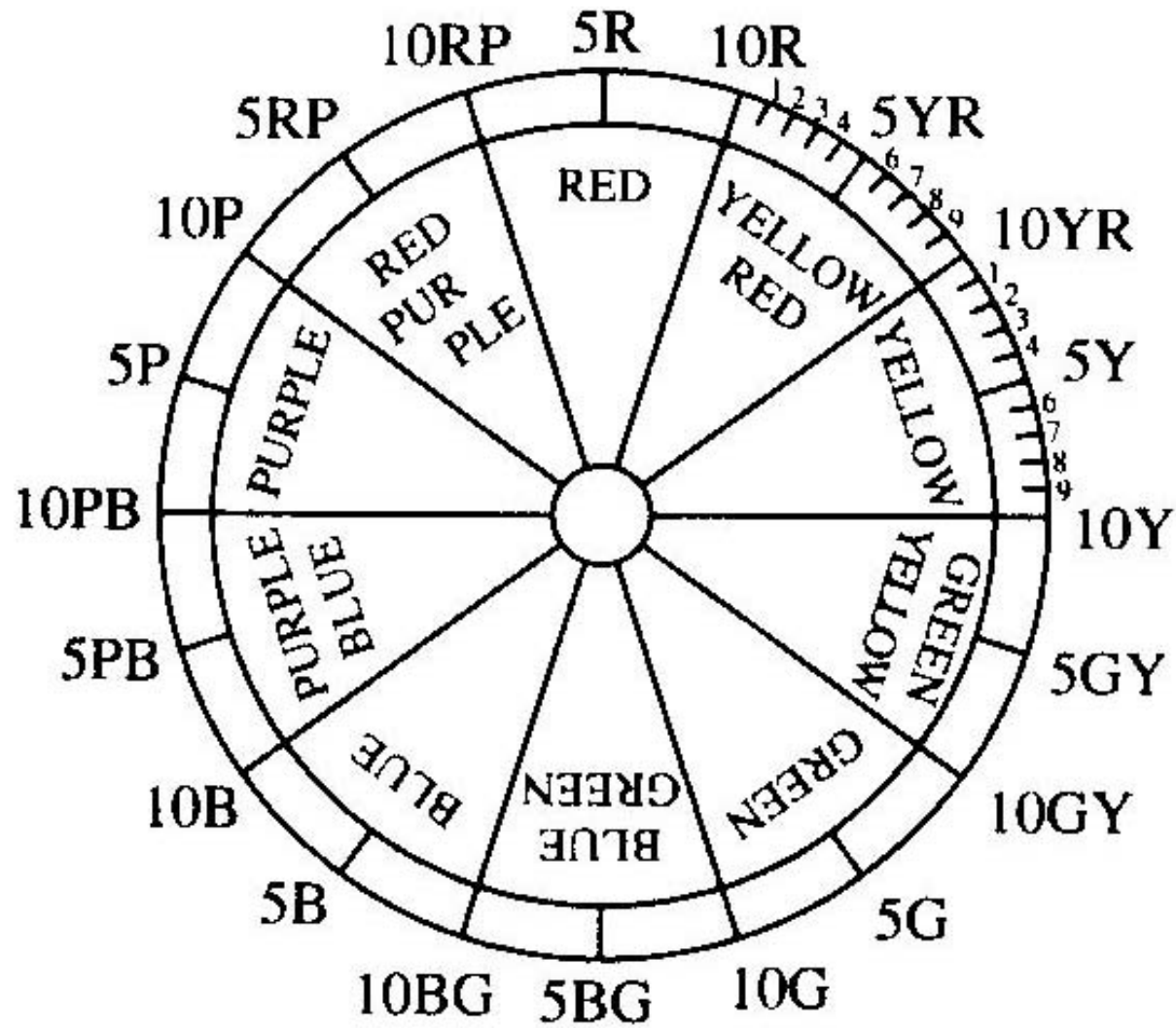


加法混色

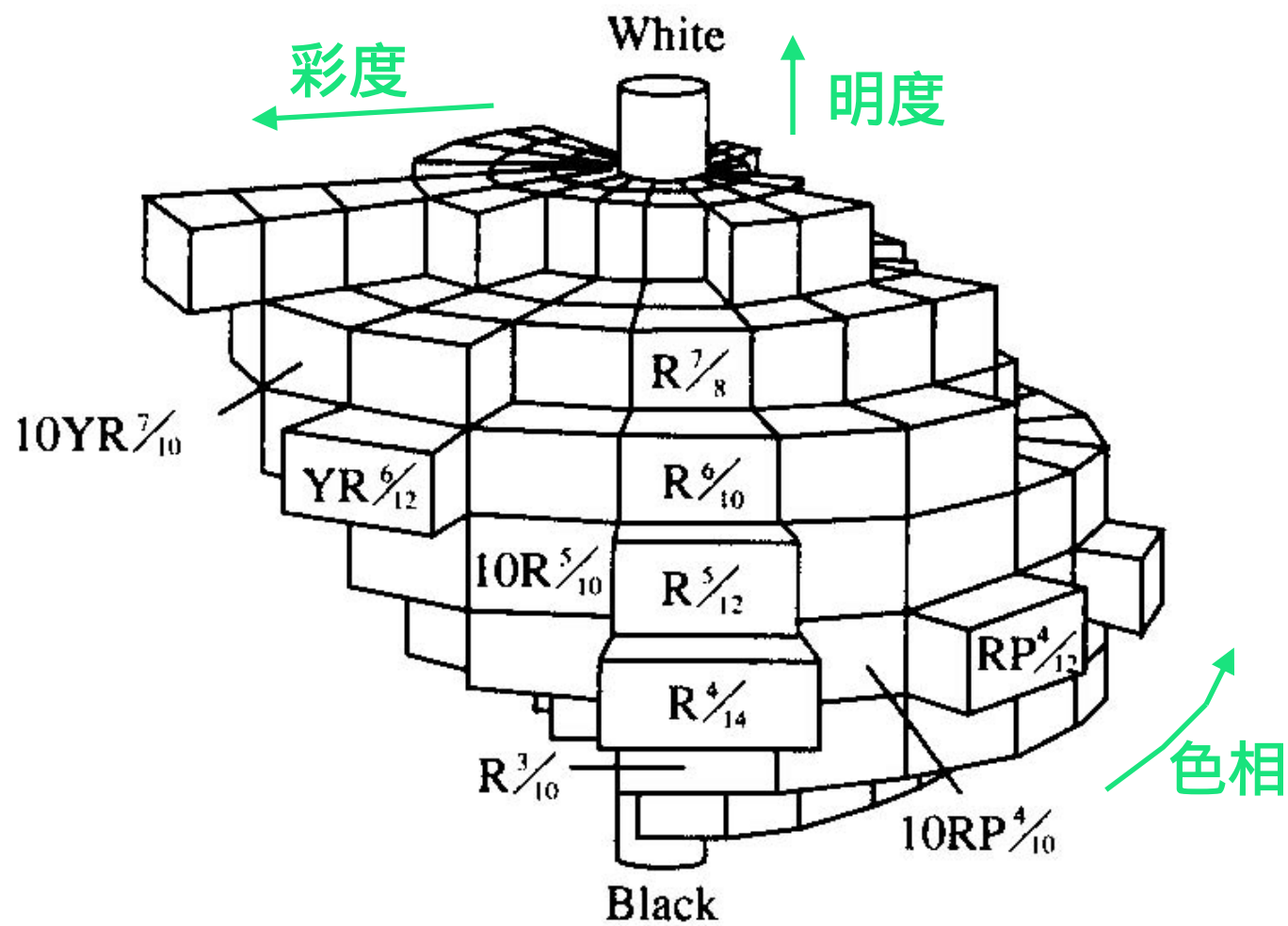


減法混色

混色の原理



マンセルの色相環



マンセルの色立体



〈a〉 フルカラー表示 (RGB各8ビット)

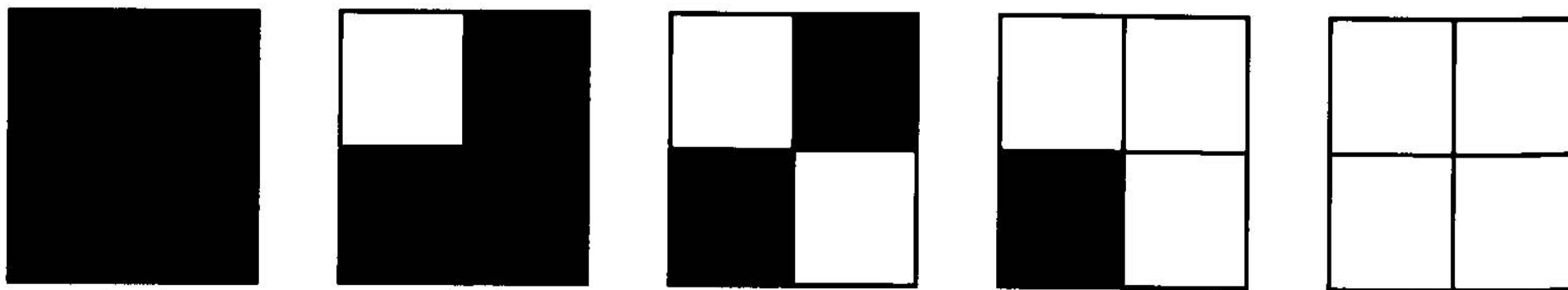
フルカラー (RGB各 8 bit)



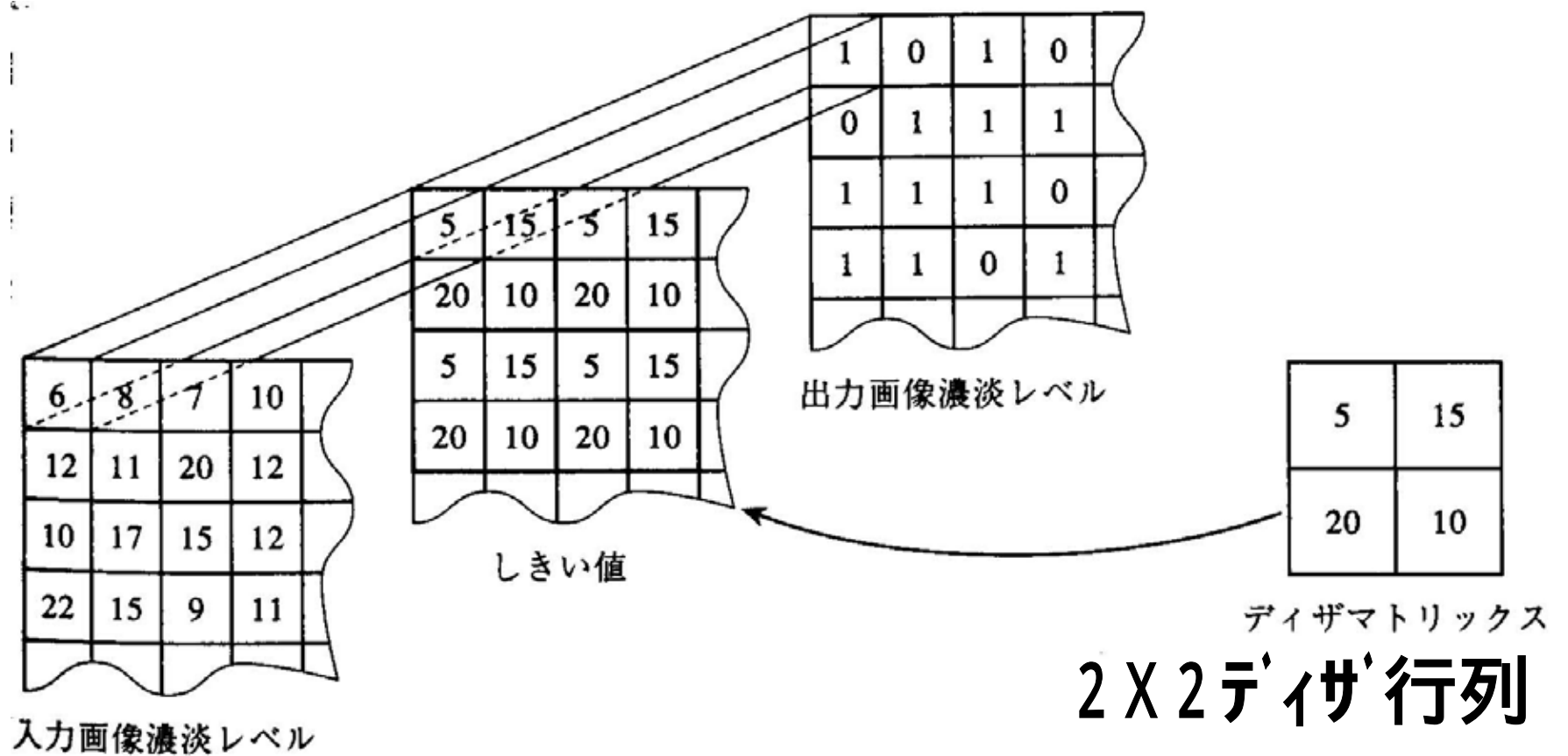
〈b〉 256色表示

256色 (8bit)

限定色表示



疑似濃淡表示 -- 濃度パターン法



2X2ディザ'行列

組織的ディザ法



〈a〉 入力画像

原画像



〈b〉 濃度パターン法

濃度パターン法



〈c〉 組織的ディザ法

組織的ディザ法

面積階調法による濃淡表示



〈a〉 変換前

変換前 (x)



〈b〉 変換後

変換後 (u)

アフィン変換 $u = Ax + T$



〈a〉 変換前

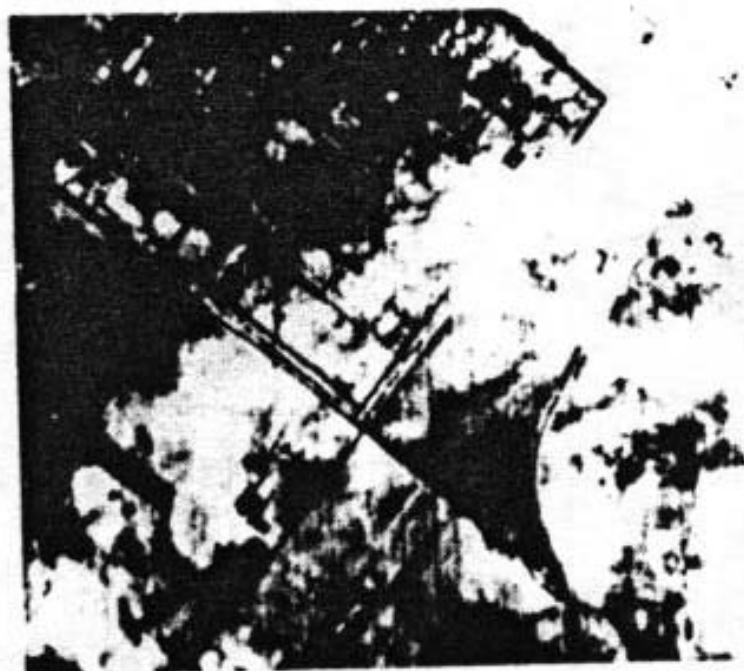
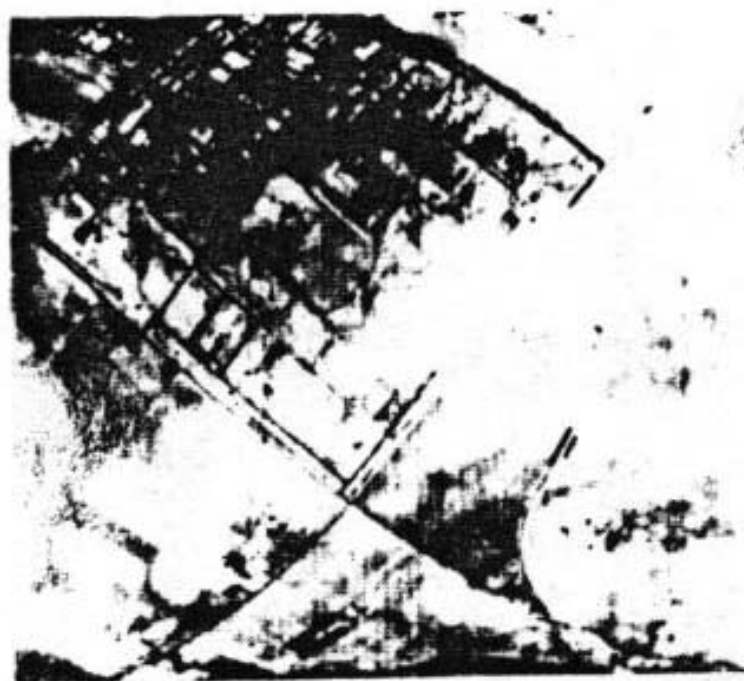
原画像



〈b〉 変換後

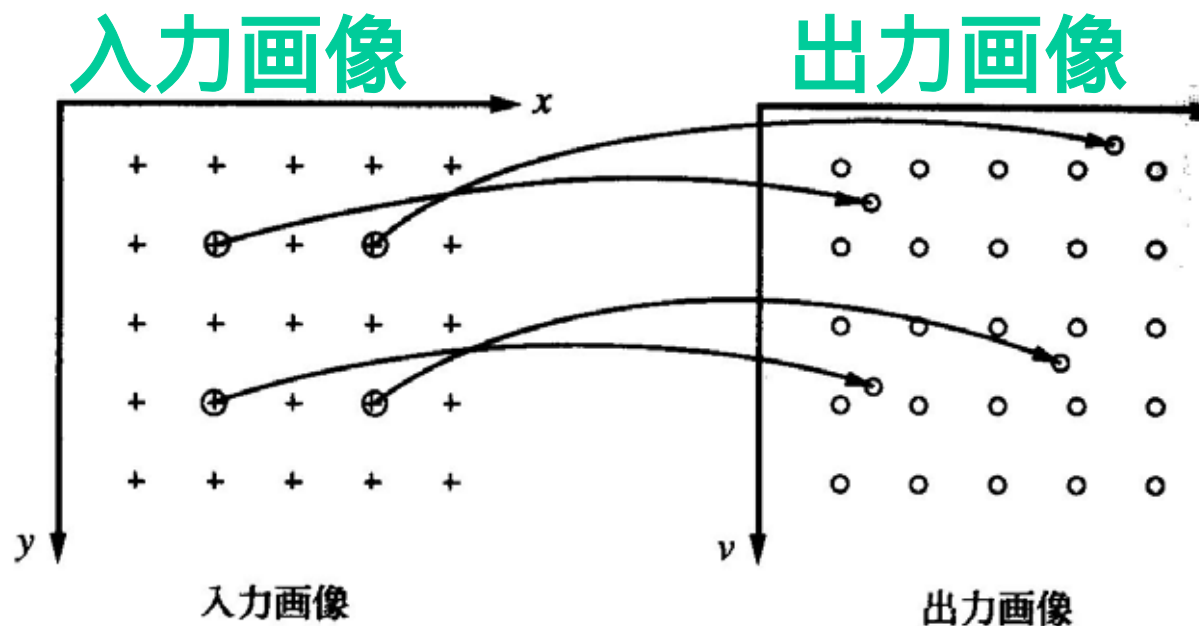
変換後

疑似アフィン変換



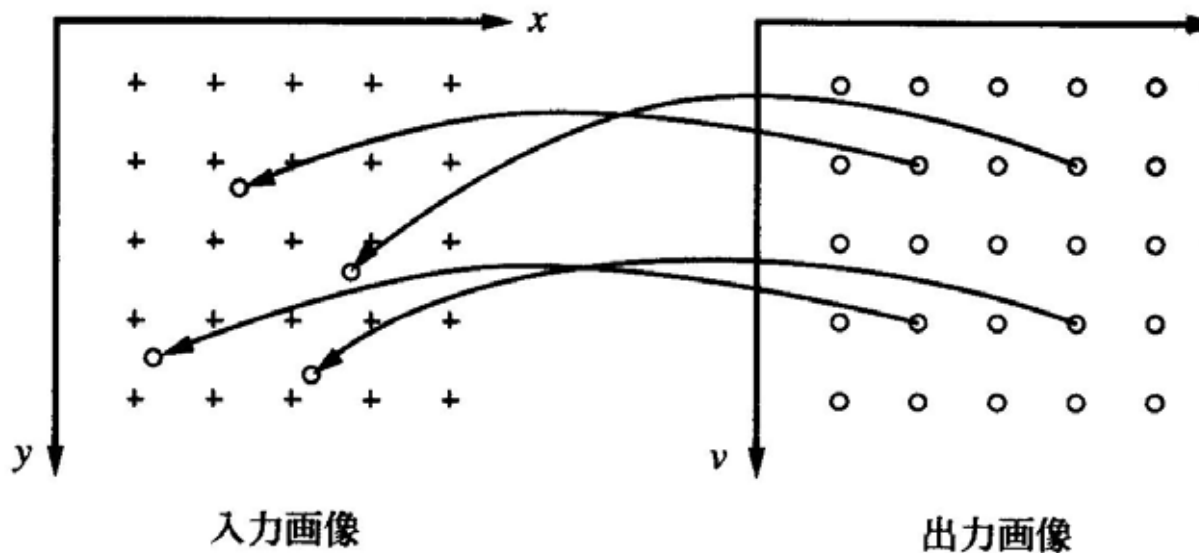
9 赤外線航空写真の幾何学的歪み補正。左は原画像，右は補正画像で道路が一直線に表現されている。

順変換法

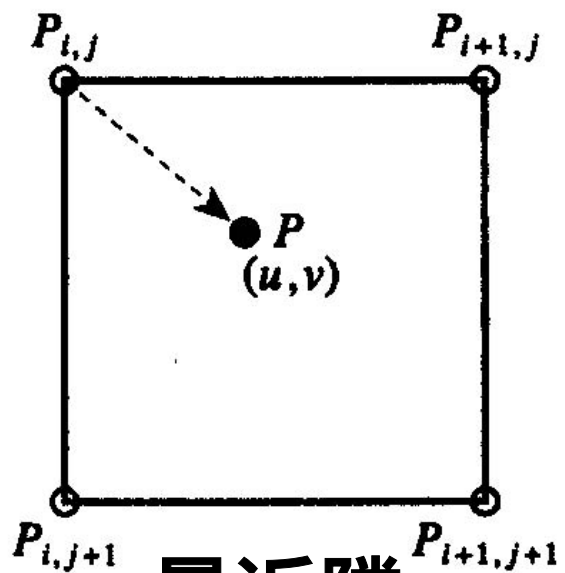


〈a〉 順変換の考え方に基づく再配列

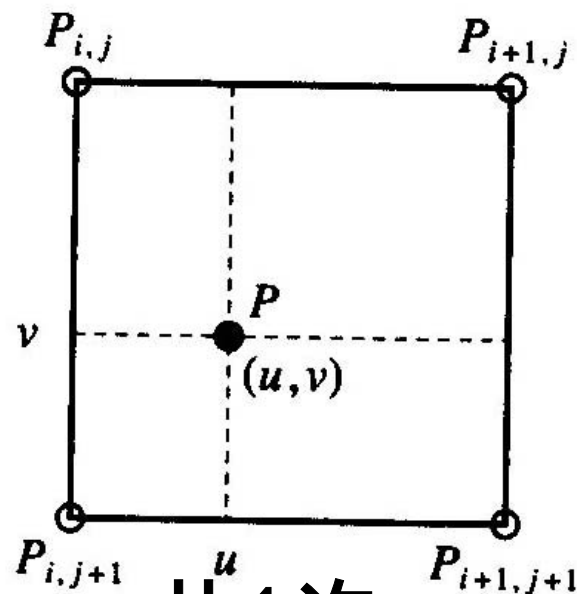
逆変換法 (一般的)



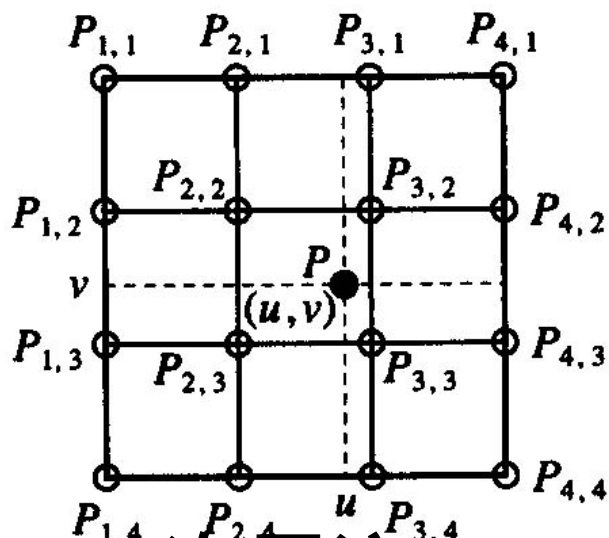
画像の再配列 (resampling)



最近隣



共1次



3次畳込み

- 画像データを内挿したい点
- 画像データが存在する点

画素間内挿法



〈a〉 最近隣内挿法

最近隣



〈b〉 共1次内挿法

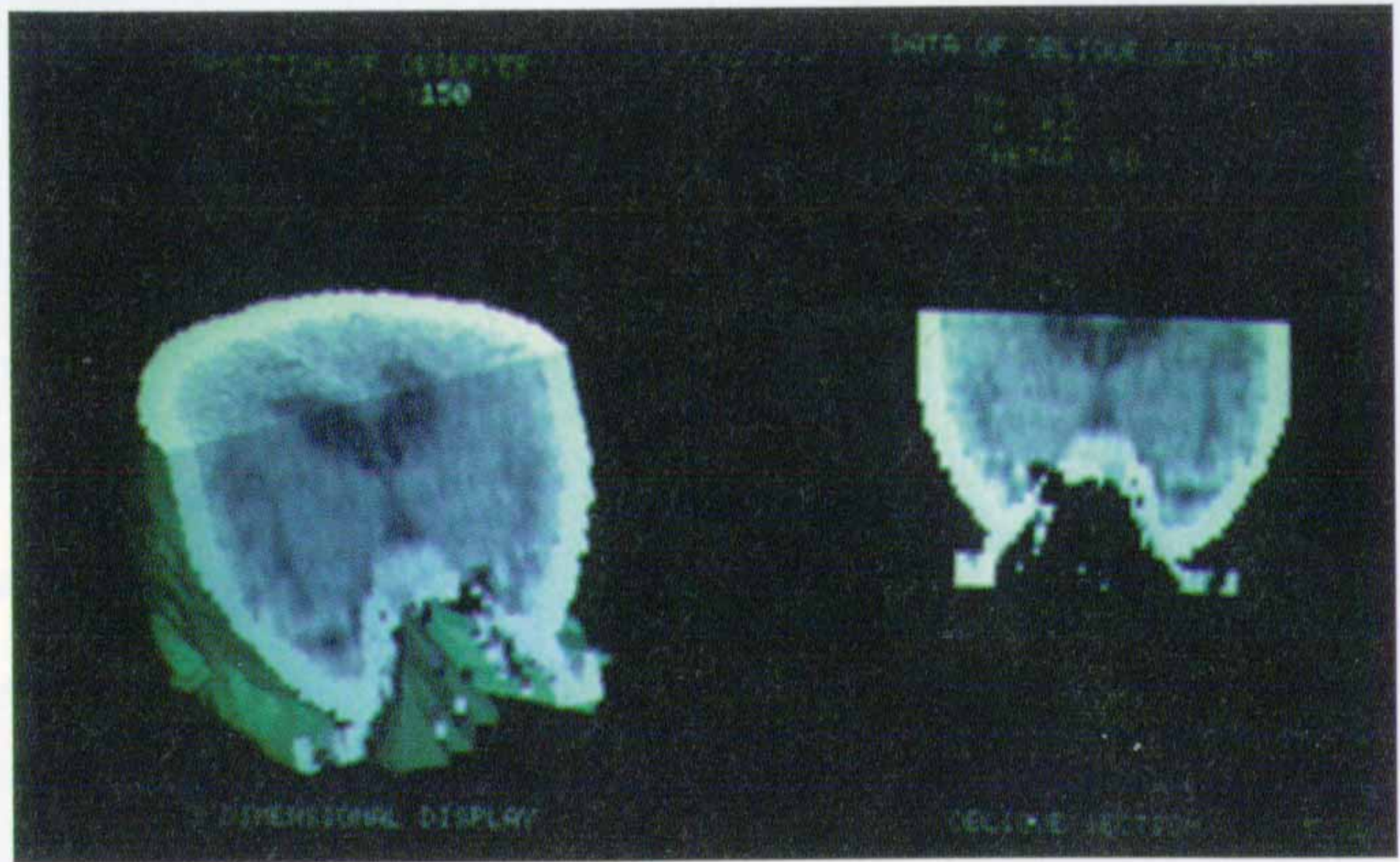
共1次



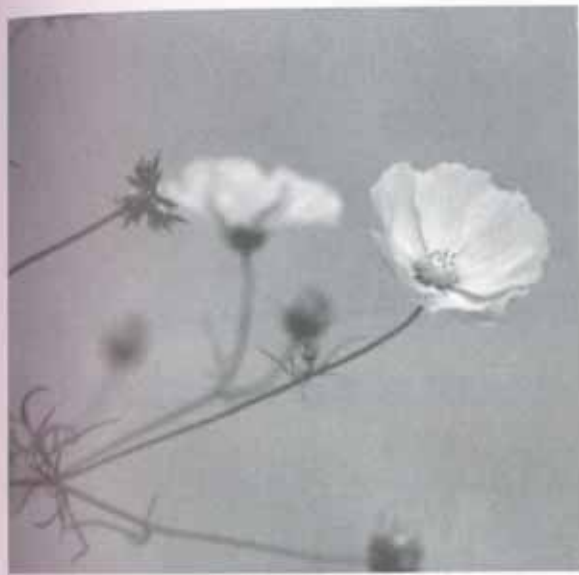
〈c〉 3次たたみ込み内挿法

3次畳込み

各種内装法 (輪郭に注目)



X線CT画像からの3次元表示



原画像



〈b〉 Robertsのエッジ検出オペレータ

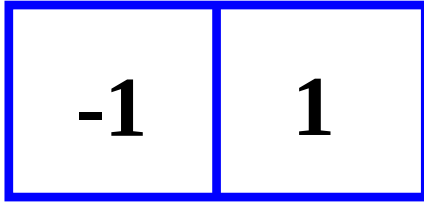


〈c〉 Prewittのエッジ検出オペレータ

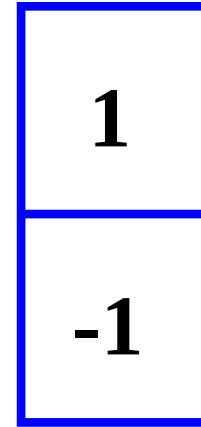


〈d〉 Sobelのエッジ検出オペレータ

エッジ検出



f_x



f_y

1次微分フィルタ (単純差分マスク)

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

f_x

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

f_y

$$| \text{grad } f | = \text{sqrt}(f_x^2 + f_y^2)$$

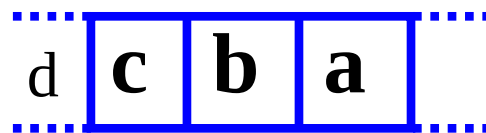
Sobel のエッジ検出オペレータ

画素値

差分

差分

2次差分



$$a-b$$

$$-) \quad b-c$$

$$a-2b+c$$



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

1	-2	1
---	----	---

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

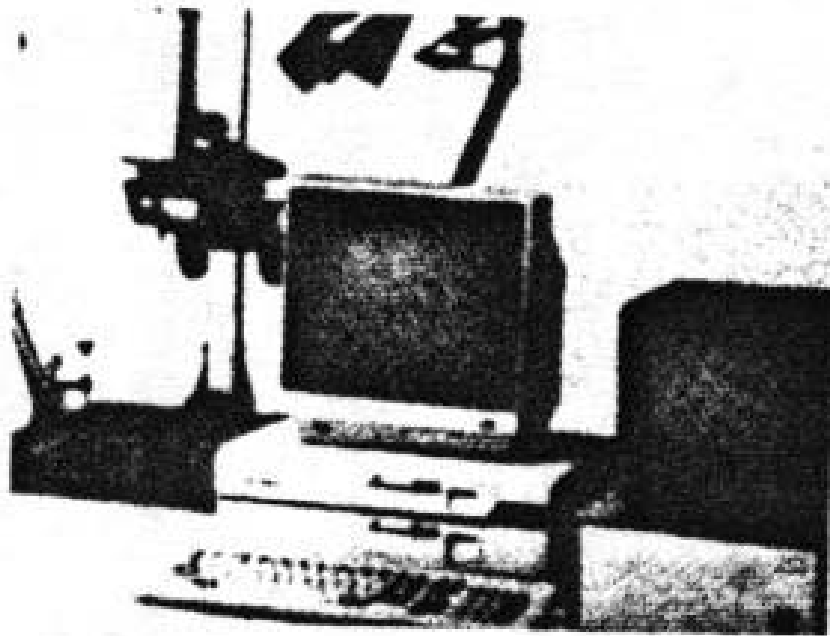
または

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

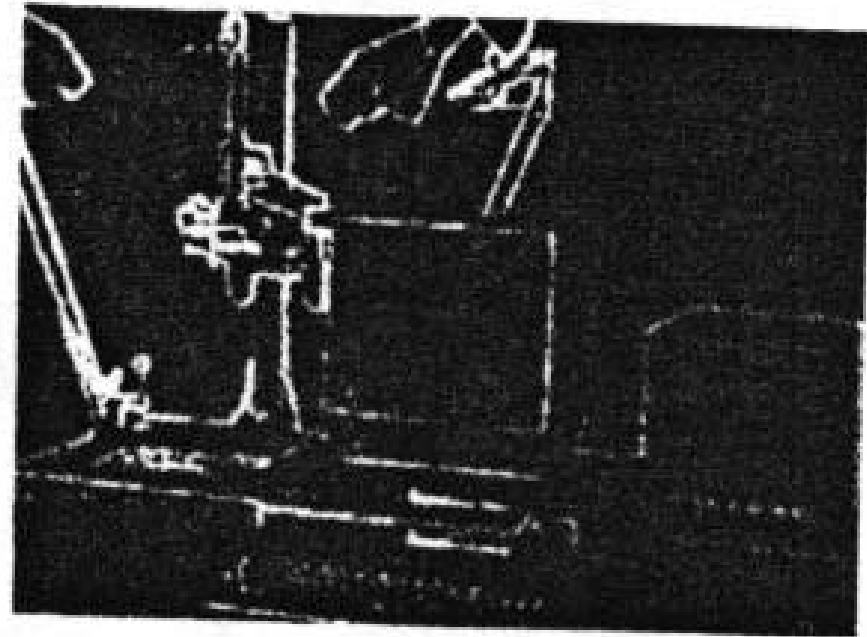
2次微分フィルタ

Laplacian

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



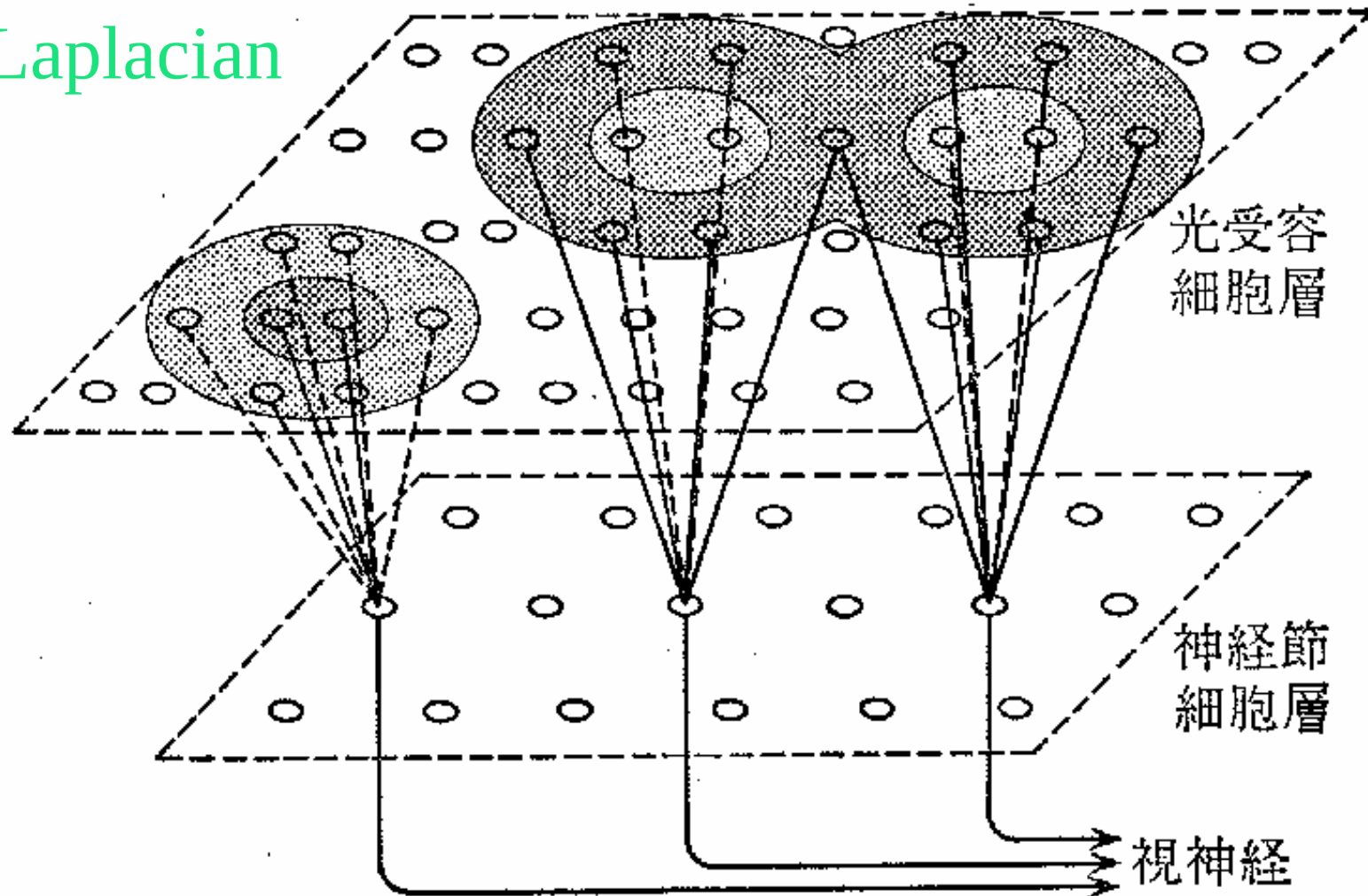
(b) 原 画



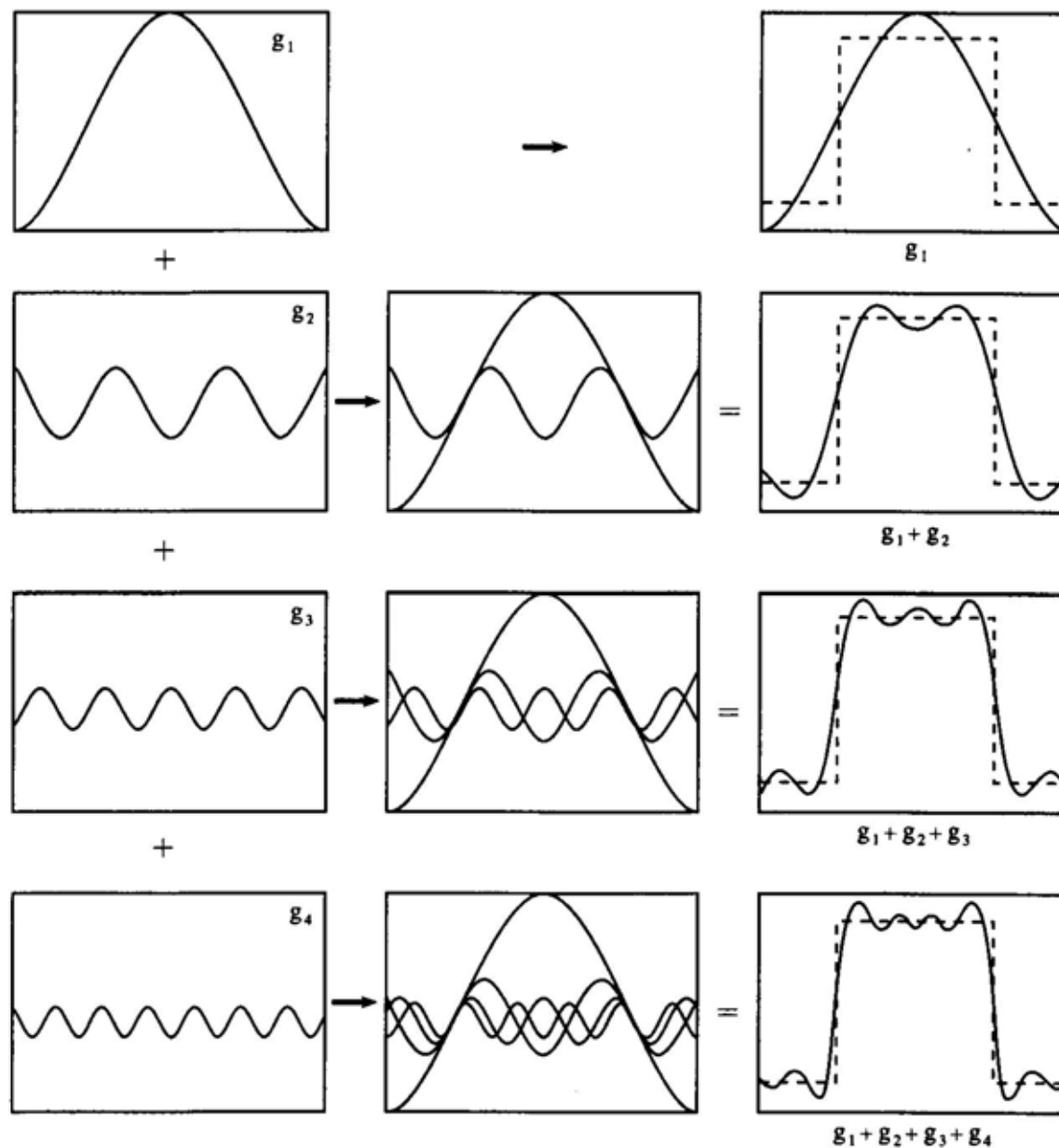
(c) フィルタ出力

Laplacian によるエッジ抽出

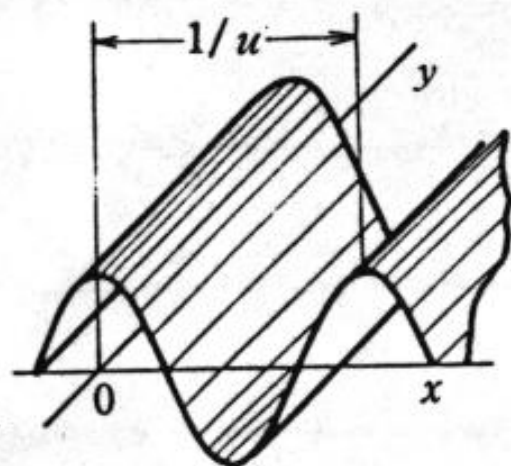
ぼけた2階微分 Laplacian



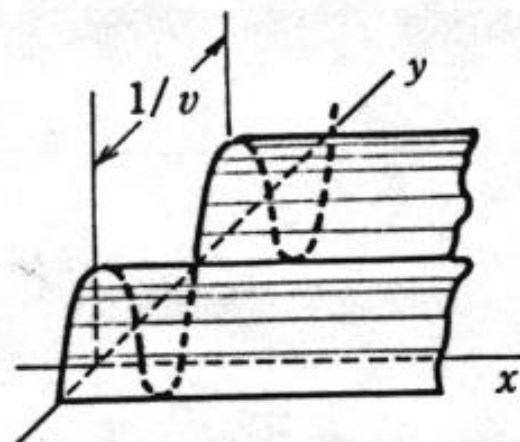
網膜の受容野と神経回路



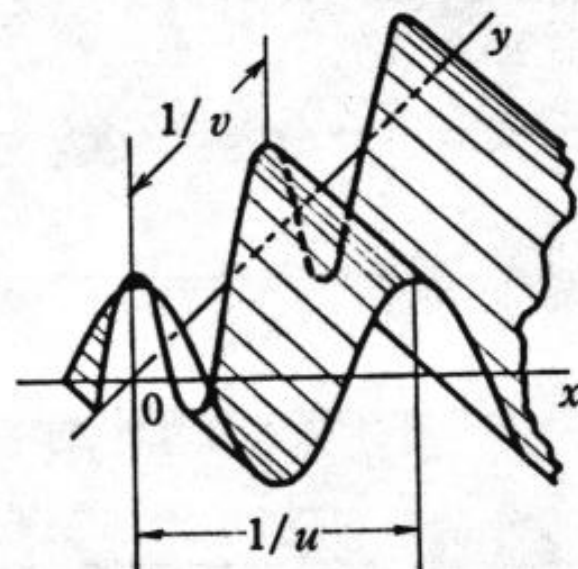
矩形波の正弦波への分解 (フーリエ級数展開)



(a) $u \neq 0, v = 0$ のとき

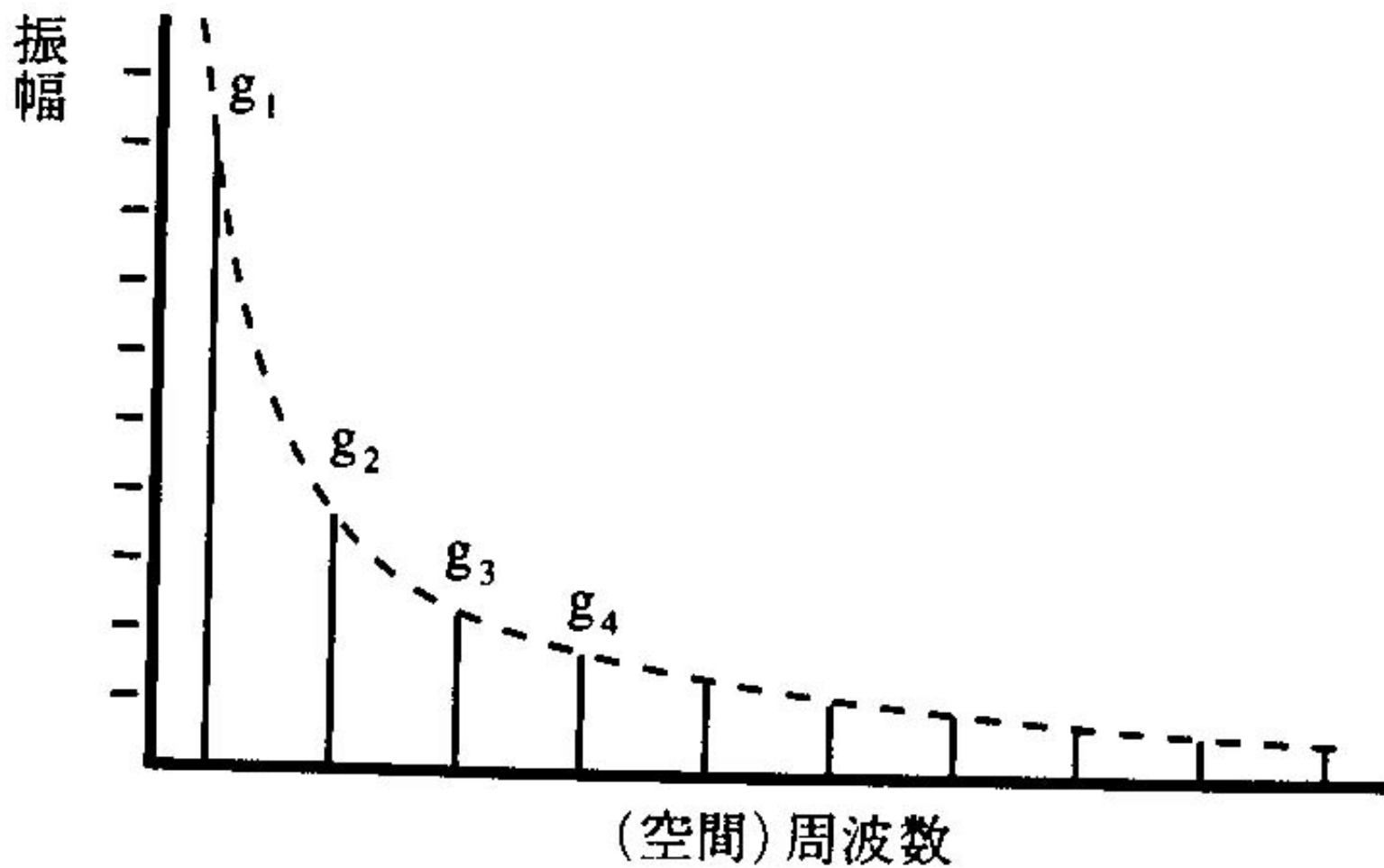


(b) $u = 0, v \neq 0$ のとき

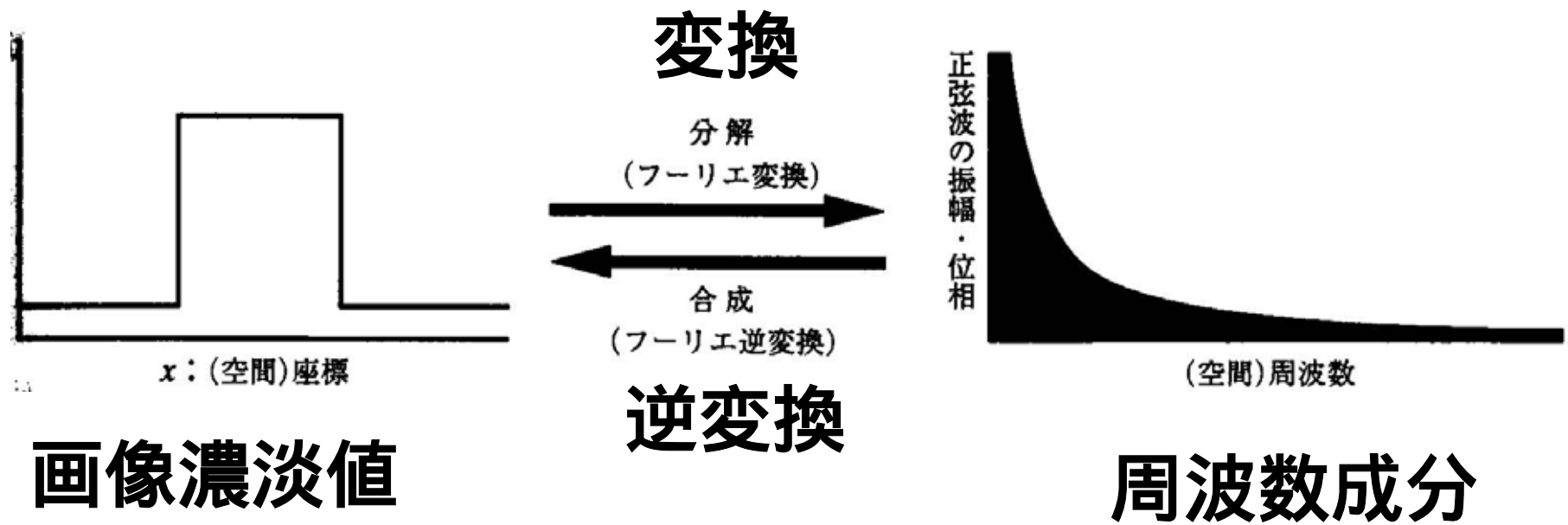


(c) 一般の空間周波数波

図 2.5 空間周波数の波



周波数成分 (振幅スペクトル)



フーリエ変換

Fourier 変換

一次元の場合，フーリエ変換

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

フーリエ逆変換は，

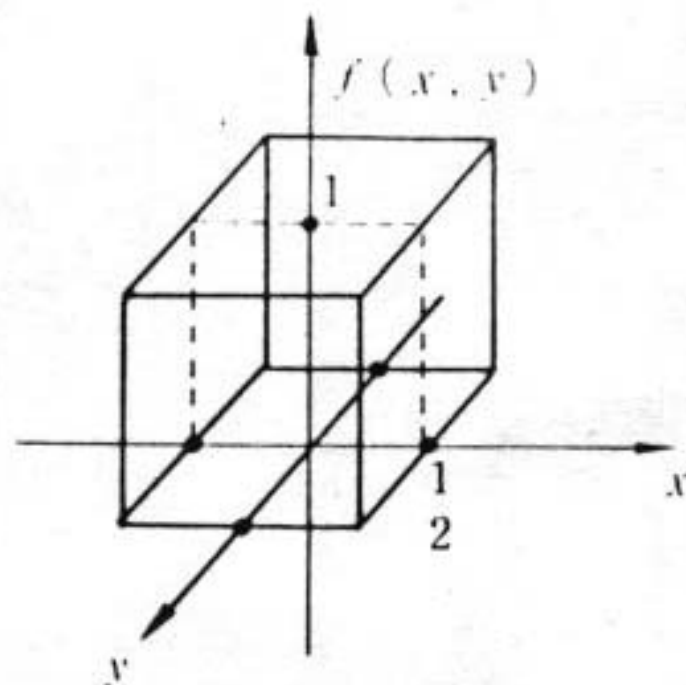
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

で与えられる。いっぽう，2次元フーリエ変換は，

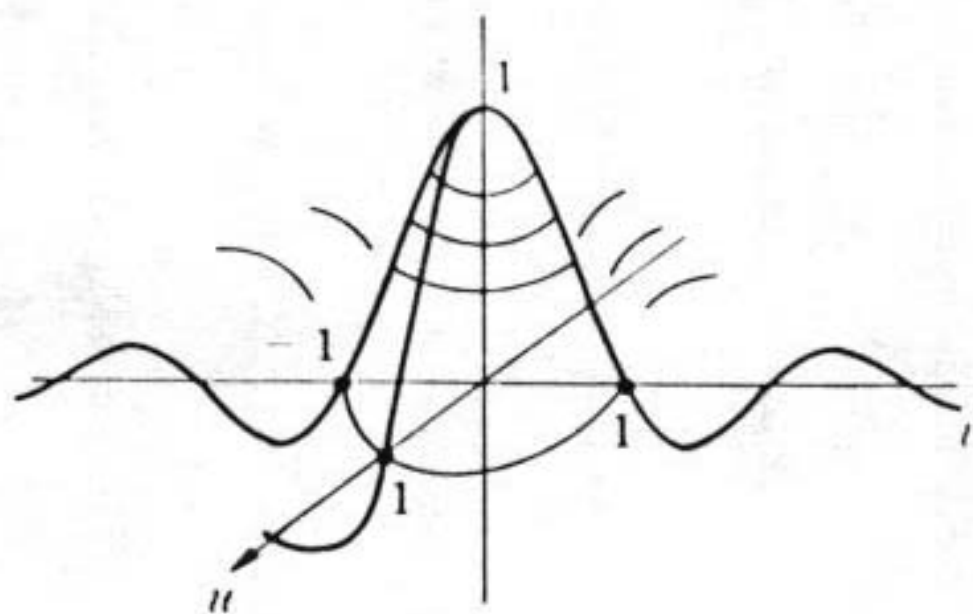
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

2次元フーリエ逆変換は，

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$



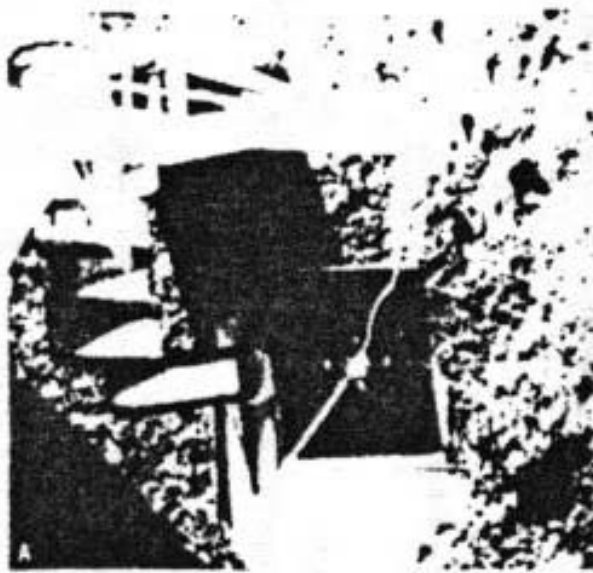
(a) $\text{rect}(x, y)$



(b) $F(u, v)$

図 2.4 2次元 rect 関数(a)とそのフーリエ変換(b)

原画



振幅
スペクトル



低周波
成分



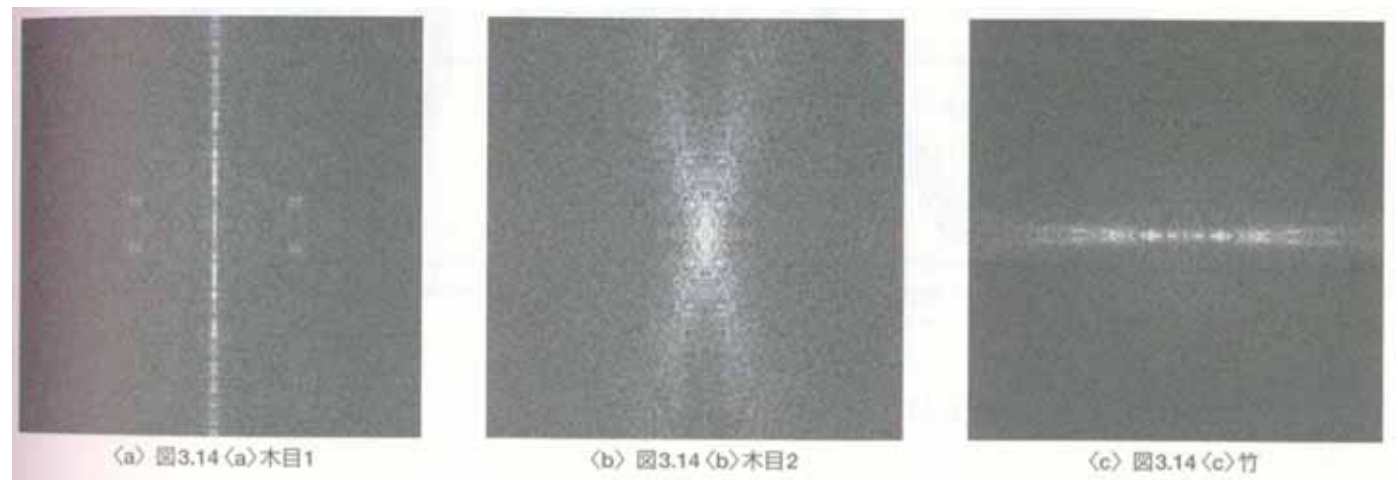
高周波
成分



テクスチャ



スペクトル



テクスチャとスペクトル

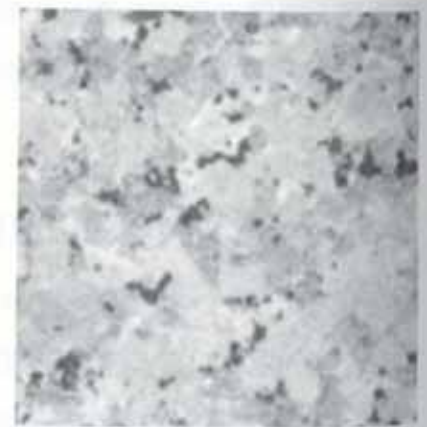
テクスチャ



〈d〉 布

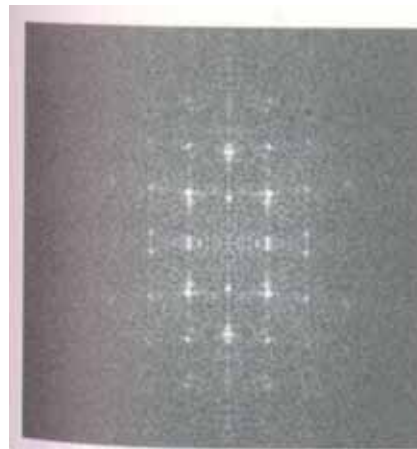


〈e〉 砂利



〈f〉 大理石

スペクトル



〈d〉 図3.14 〈d〉 布

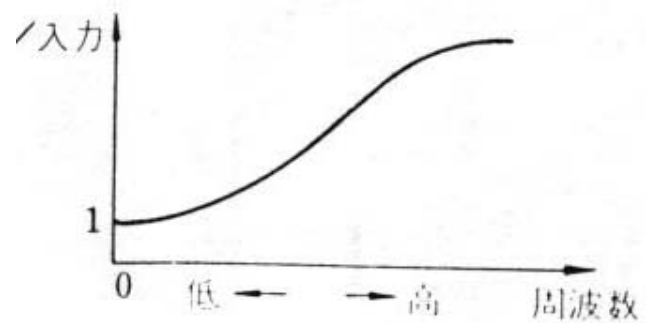


〈e〉 図3.14 〈e〉 砂利

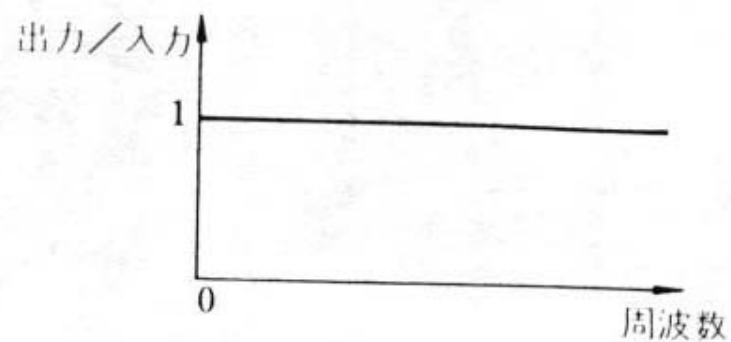


〈f〉 図3.14 〈f〉 大理石

テクスチャとスペクトル(2)



(a) 高域強調フィルタ



(b) フィルタリング後の特性

図4.3 図4.2のMTFを平坦にするフィルタと補正後の特性

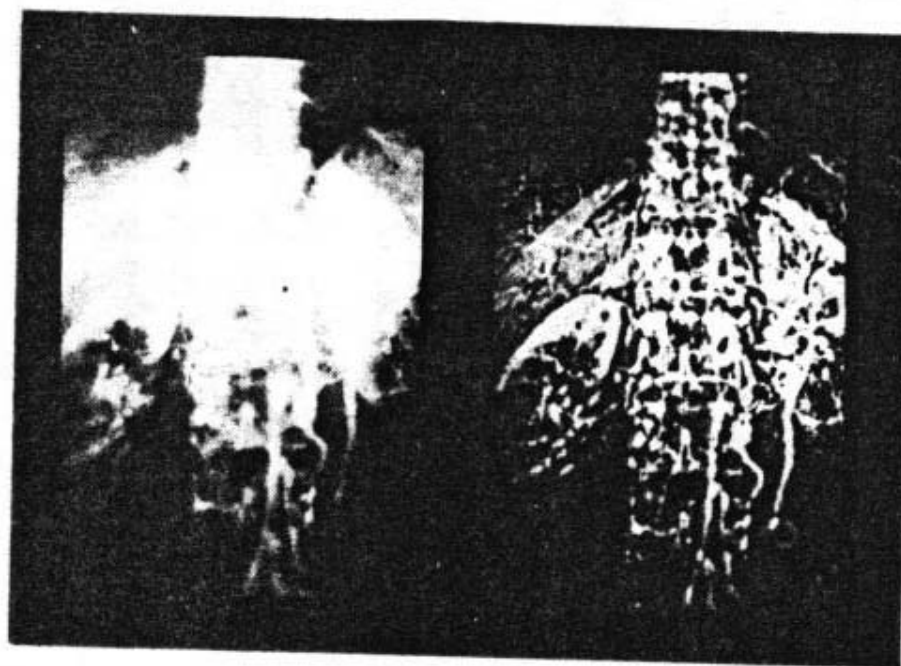


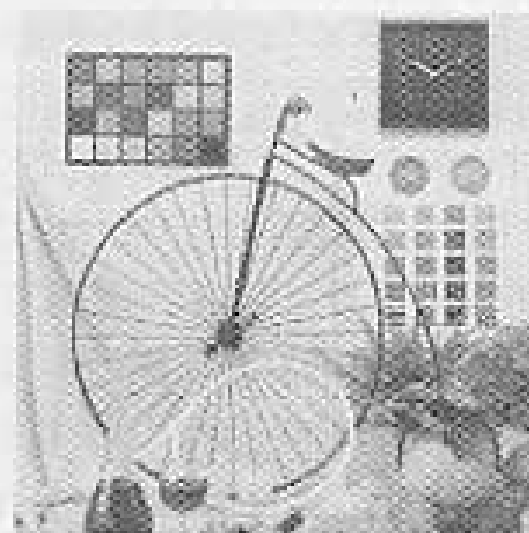
図4.4 ハイパスフィルタによる細部強調。
左が原画像，右が処理画像

振幅と位相 の交換

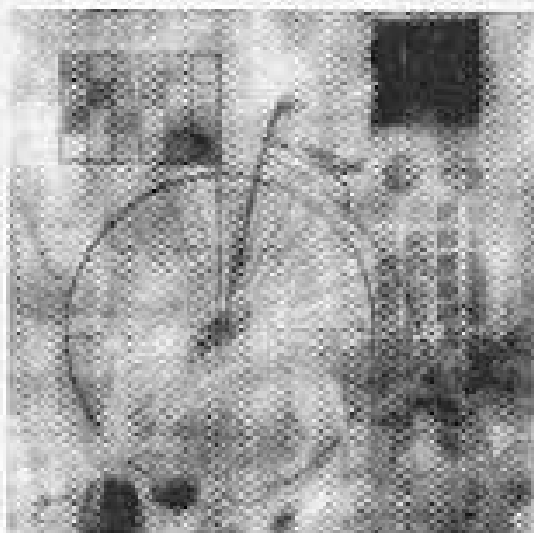
位相の影響大



画像 1: $A_1(u, v)e^{j\phi_1(u, v)}$



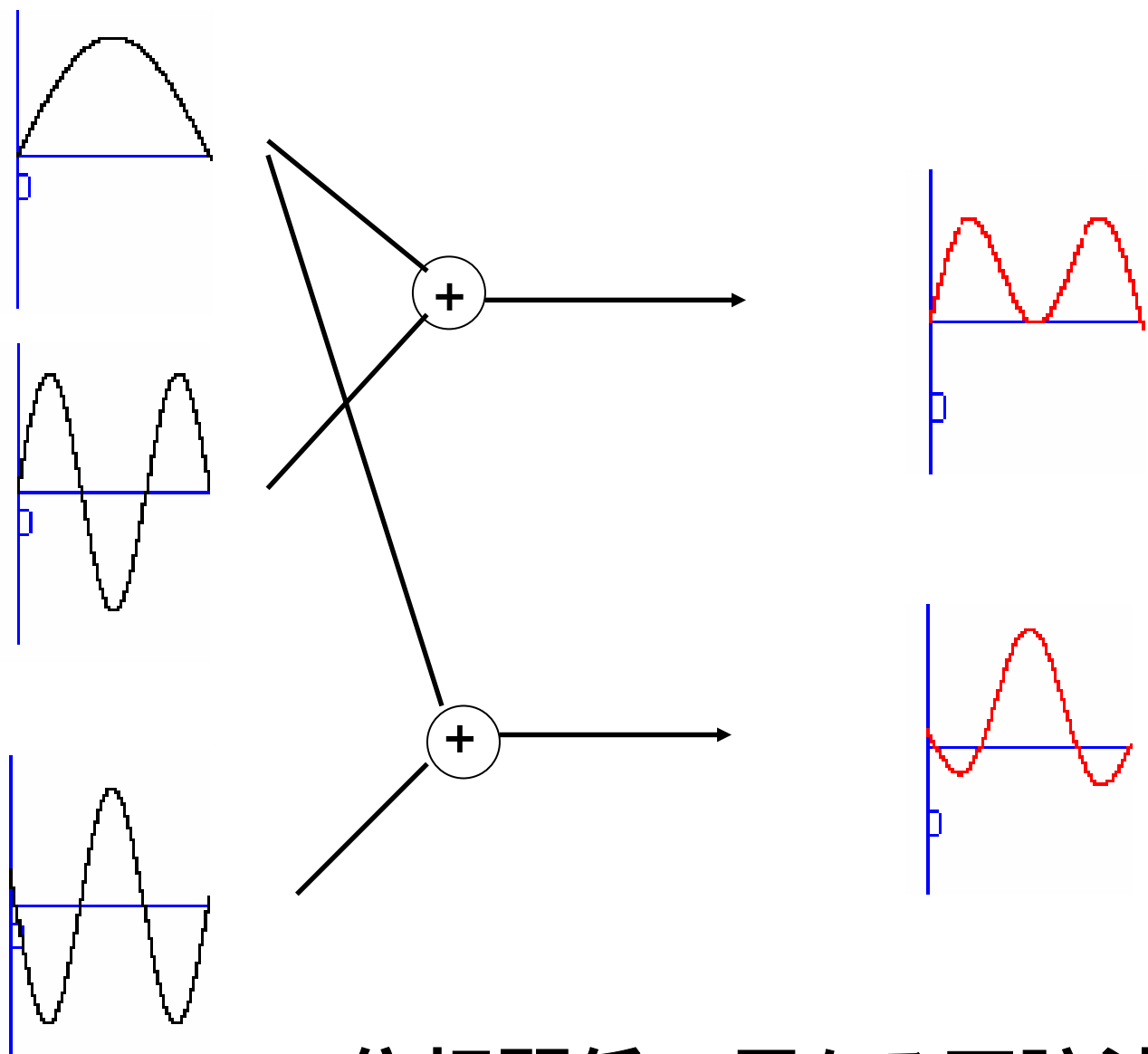
画像 2: $A_2(u, v)e^{j\phi_2(u, v)}$



画像 1': $A_1(u, v)e^{j\phi_2(u, v)}$



画像 2': $A_2(u, v)e^{j\phi_1(u, v)}$



位相関係の異なる正弦波の加算
(合成波の形状が異なる)

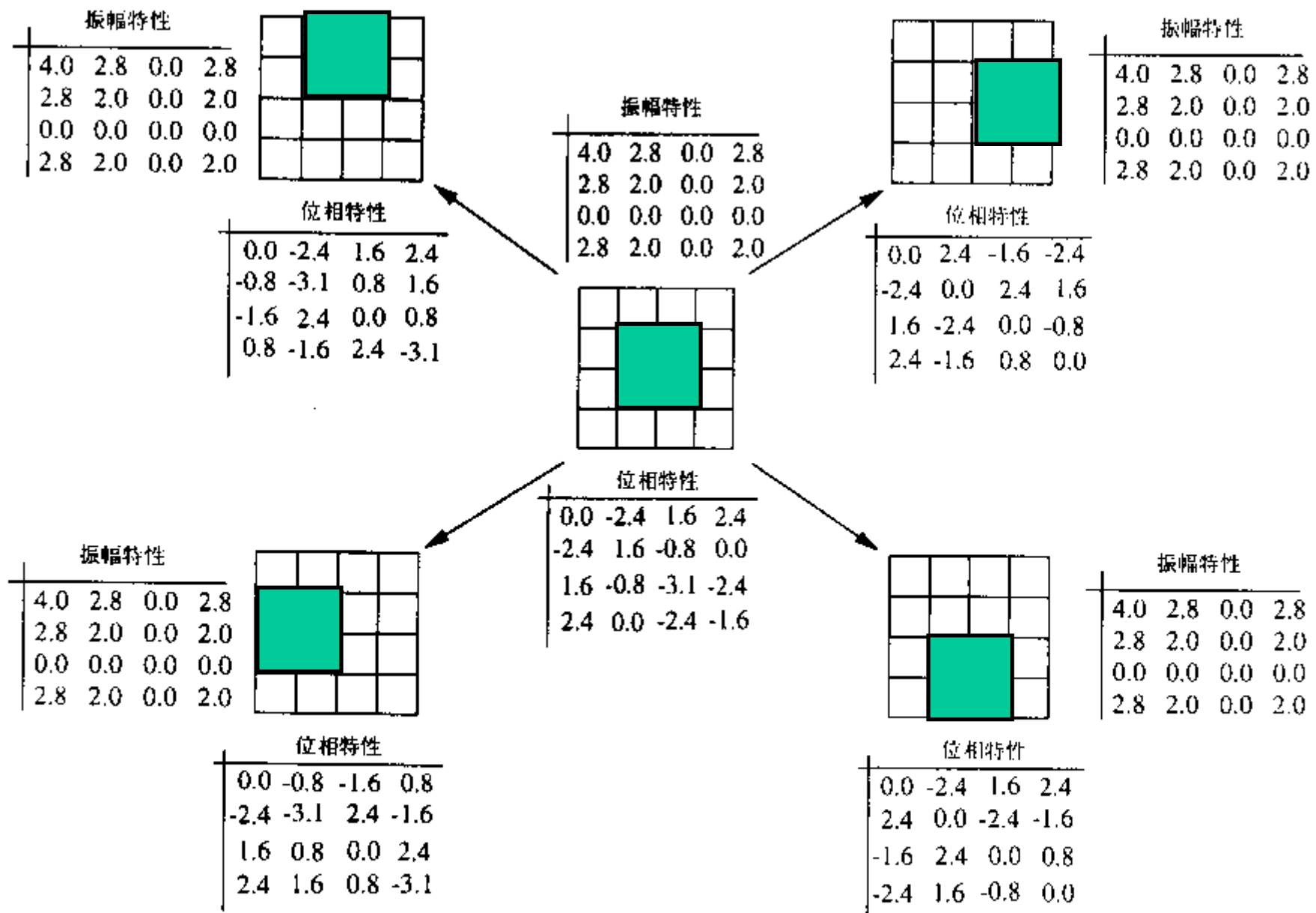


図 2 パターンの平行移動に対するフーリエ変換の例

位置が動いても、振幅変わらず (パワースペクトルの位置不変性)

2次元Hadamard関数

基底関数

$$H_{00} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H_{01} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$H_{10} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$H_{11} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

画像

$$g = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

展開係数

$$c_{ij} = (1/4) \times g \cdot H_{ij}$$

展開係数

$$c_{00} = 23/4 \quad c_{01} = -5/4 \quad c_{10} = -3/4 \quad c_{11} = 1/4$$

画像の復元

$$g = \sum_{ii=00}^{11} c_i H_{ij}$$



低鮮鋭画像



空間周波数



高鮮鋭画像



空間周波数

鮮鋭度と空間周波数スペクトル

$1/9$	$1/9$	$1/9$
$1/9$	$1/9$	$1/9$
$1/9$	$1/9$	$1/9$

移動平均フィルタ



〈a〉 対象画像

原画像



〈b〉 処理結果

処理結果

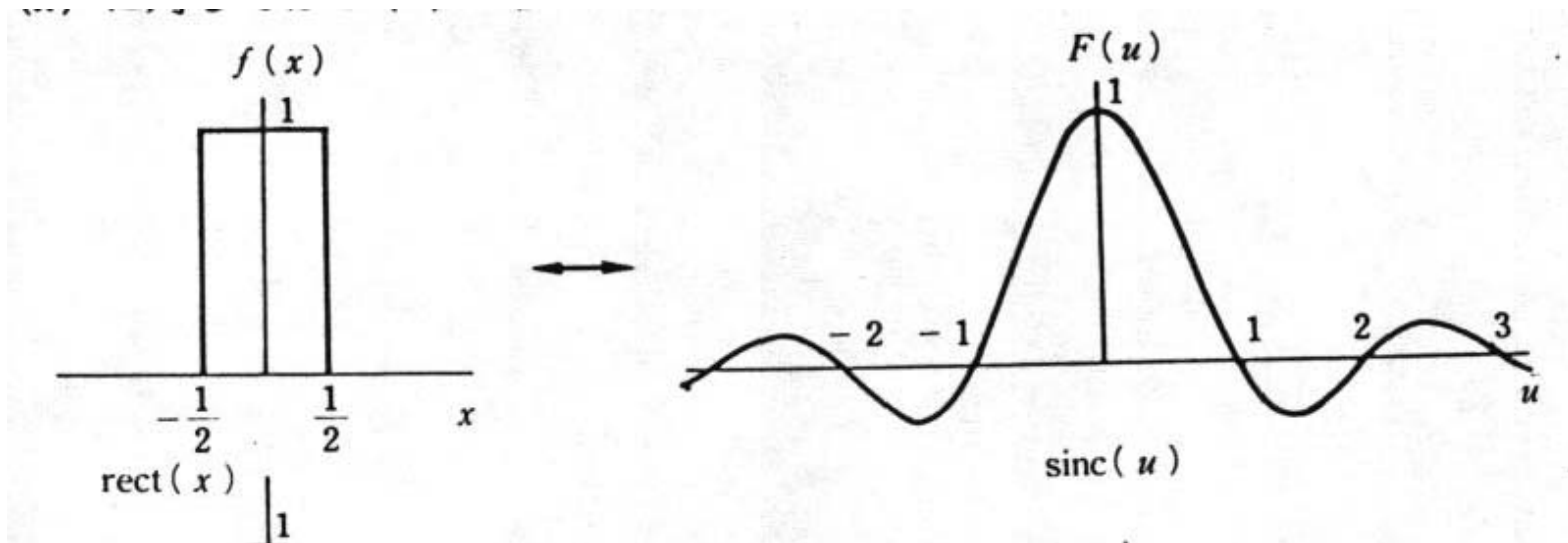
移動平均フィルタ

移動平均法の問題点

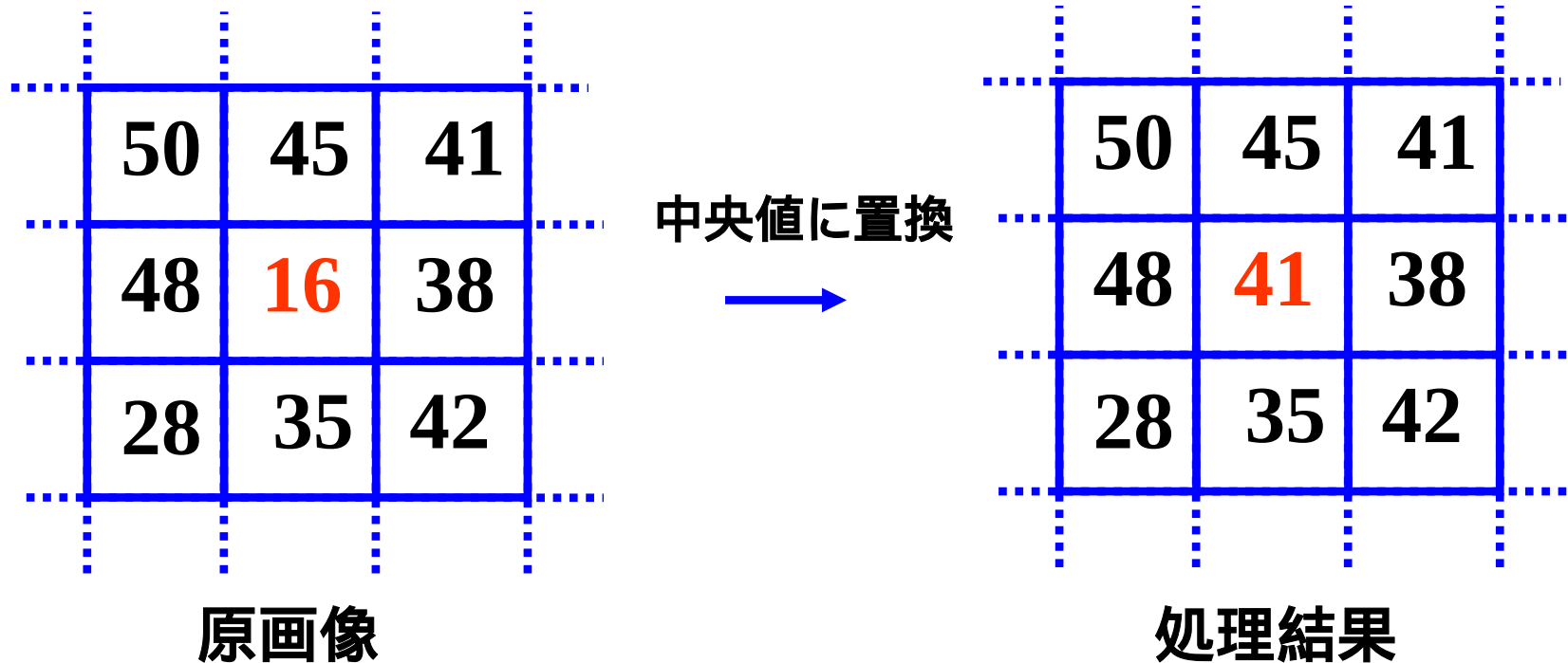
周波数により雑音抑制効果にむらができる

(特定周波数を通さない)

エッジをぼかしてしまう



中央値フィルタ (外れ値を除去)



順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9
画素値	50	48	45	42	41	38	35	28	16

中央値



〈a〉 対象画像

原画像

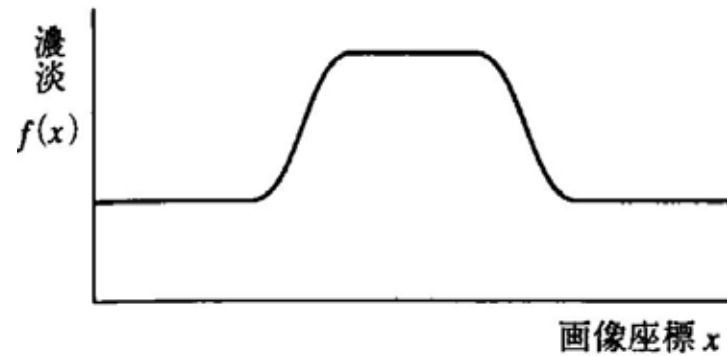


〈b〉 処理結果

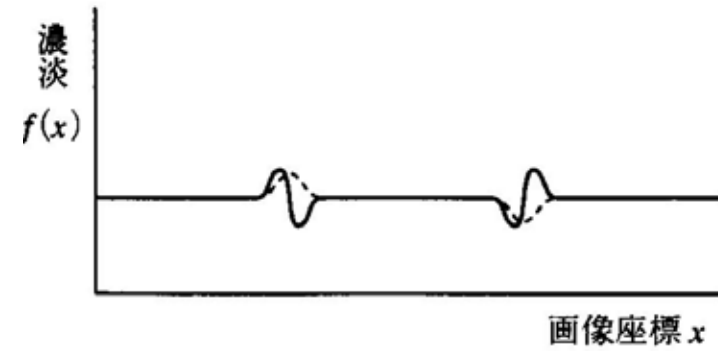
処理結果

メディアンフィルタ（中央値を出力）

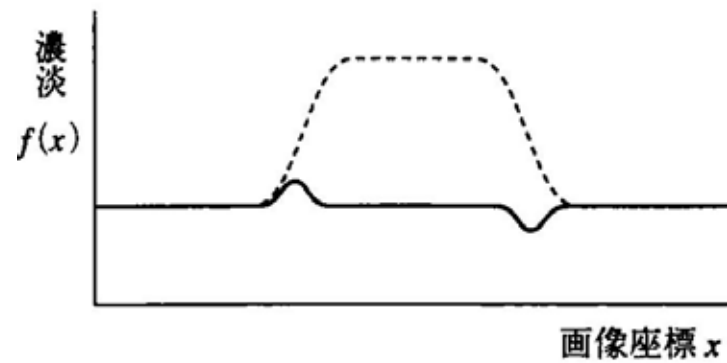
外れ値を除去し、エッジはぼかさない



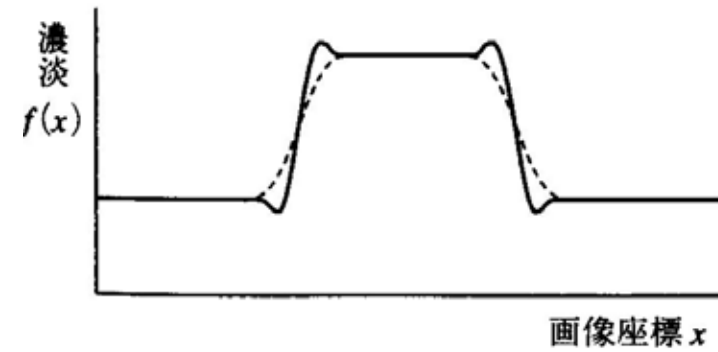
〈a〉 原画像



〈c〉 2次微分



〈b〉 1次微分



〈d〉 原画像 - 2次微分

2次微分を加えることによる鮮鋭化

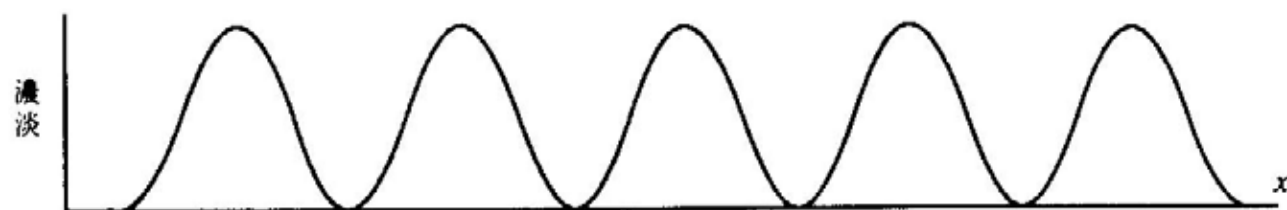


原画像

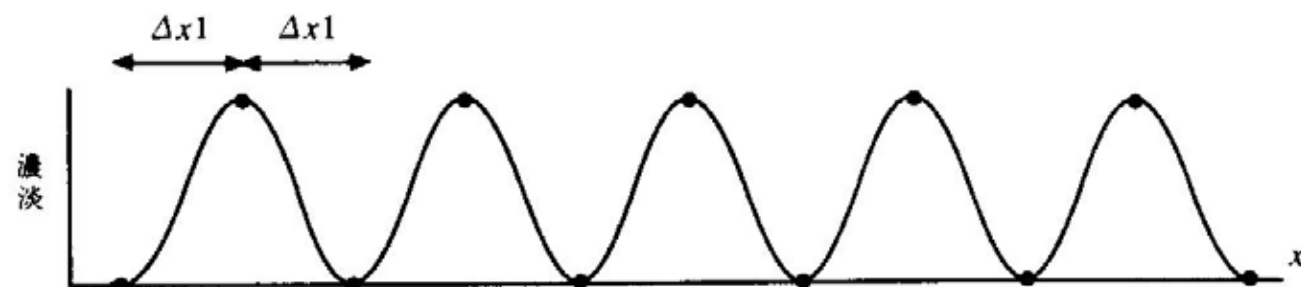


処理結果

鮮鋭化フィルタ (unsharp masking)



〈a〉 正弦波状に明暗が変化する縞 (元の正弦波)



〈b〉 ●印の点で標本化されたデータから再生される正弦波

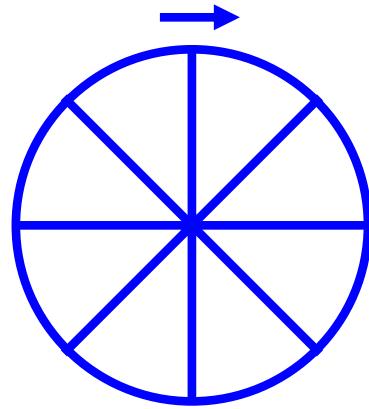


〈c〉 ■印の点で標本化されたデータから再生される正弦波

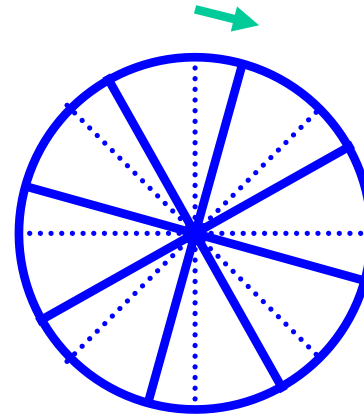
標本化定理

時間標本化
間隔

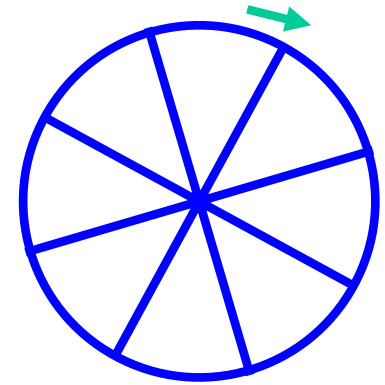
適正



frame 0

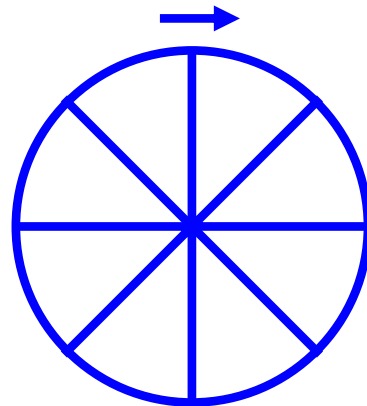


1

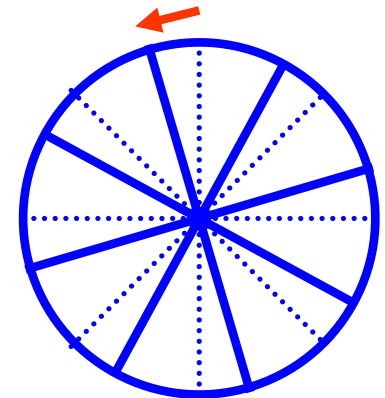


2

間隔が
空き過ぎ
逆回転に
見える

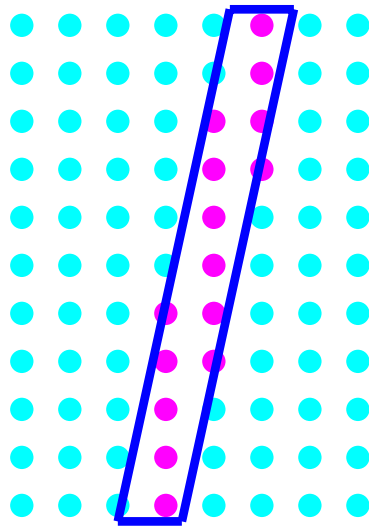


frame 0

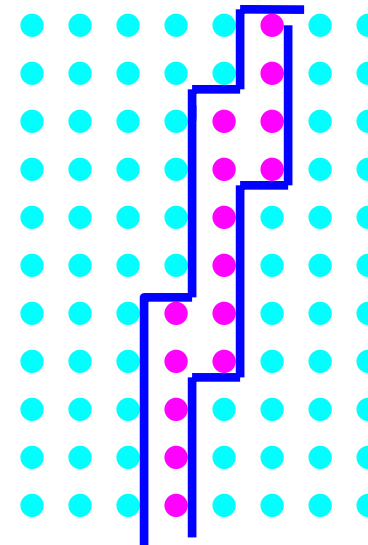


1

車輪の回転をコマ取り(時間標本化)で見れば
標本化の間に半周期以上動くと逆回転に見える(折り返し歪)

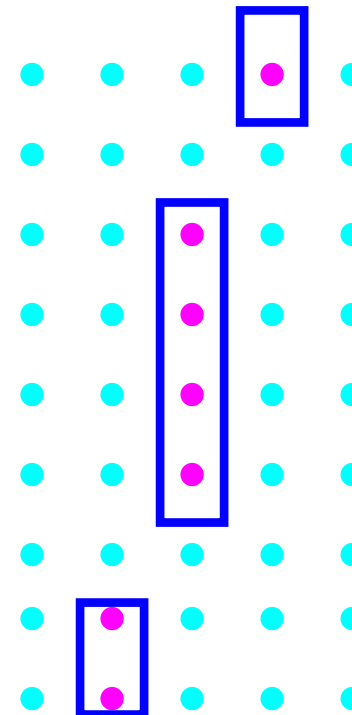
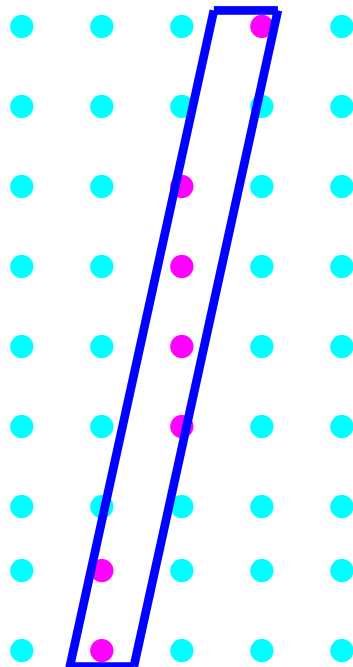


原直線



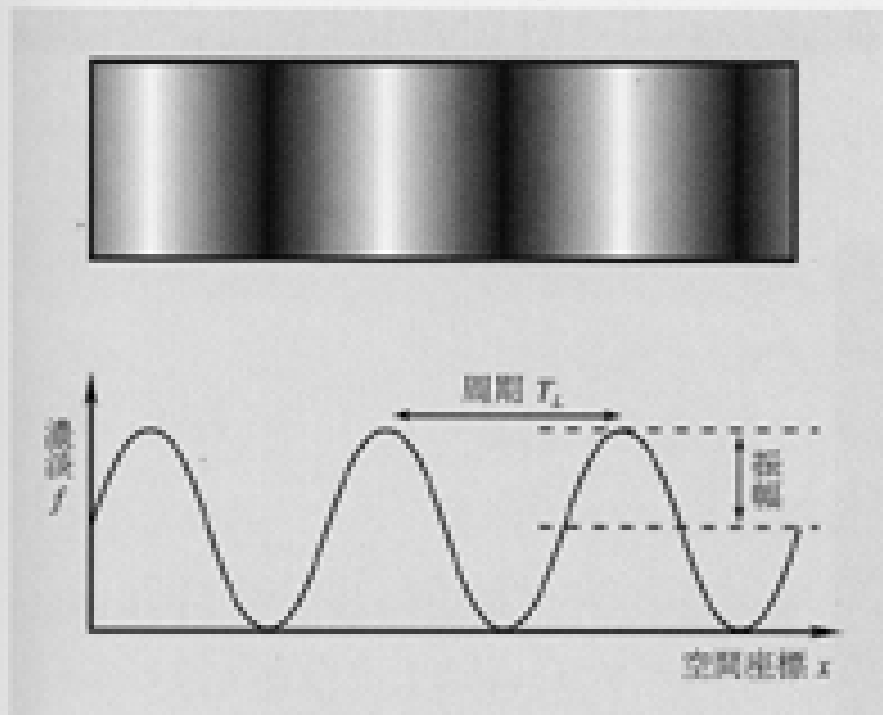
復元直線

適正

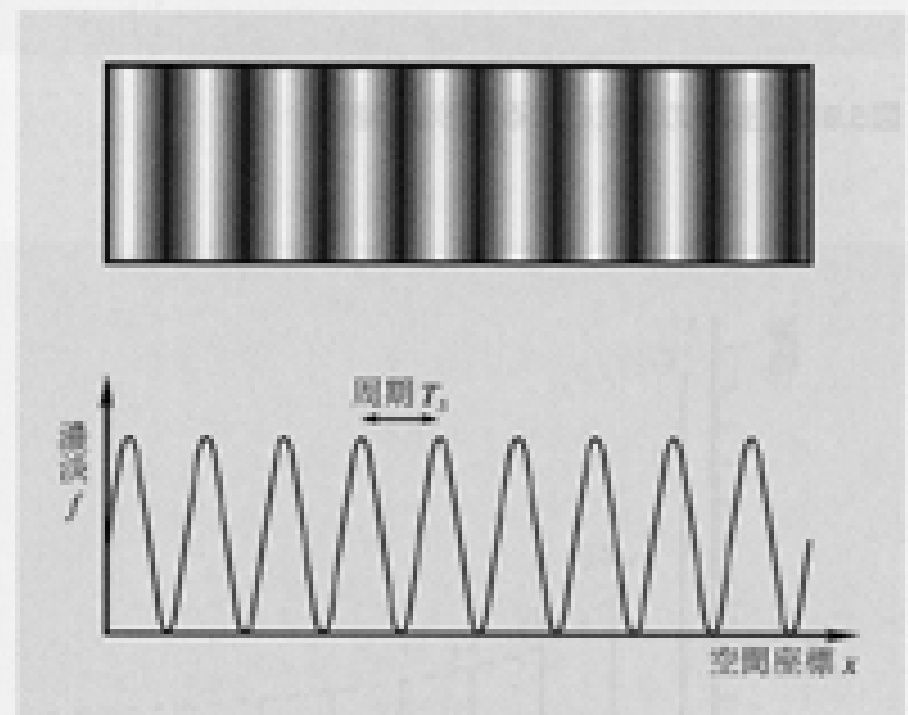


線幅(基本波の
半周期)より
標本化間隔が
広いため
点線になって
しまった

圧縮・符号化

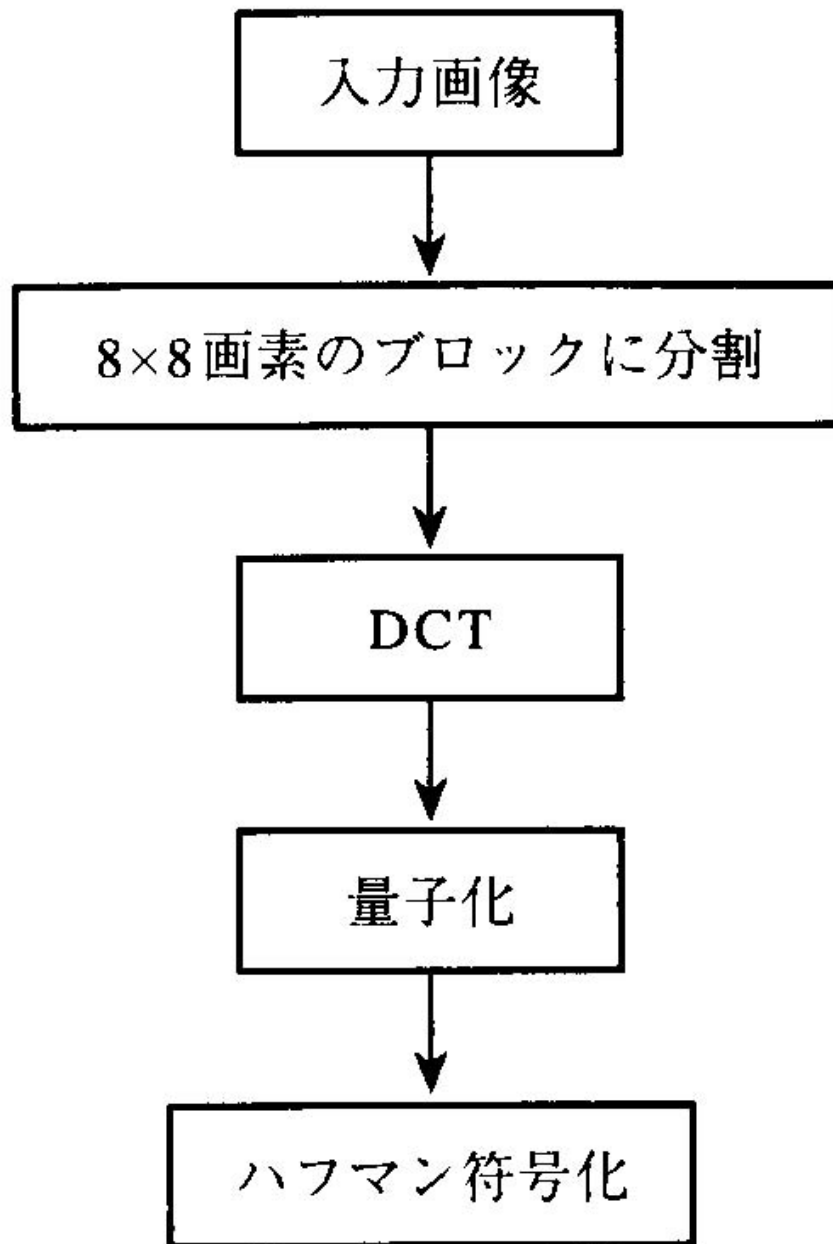


(a) 低い空間周波数 ($= 1/T_L$) の波

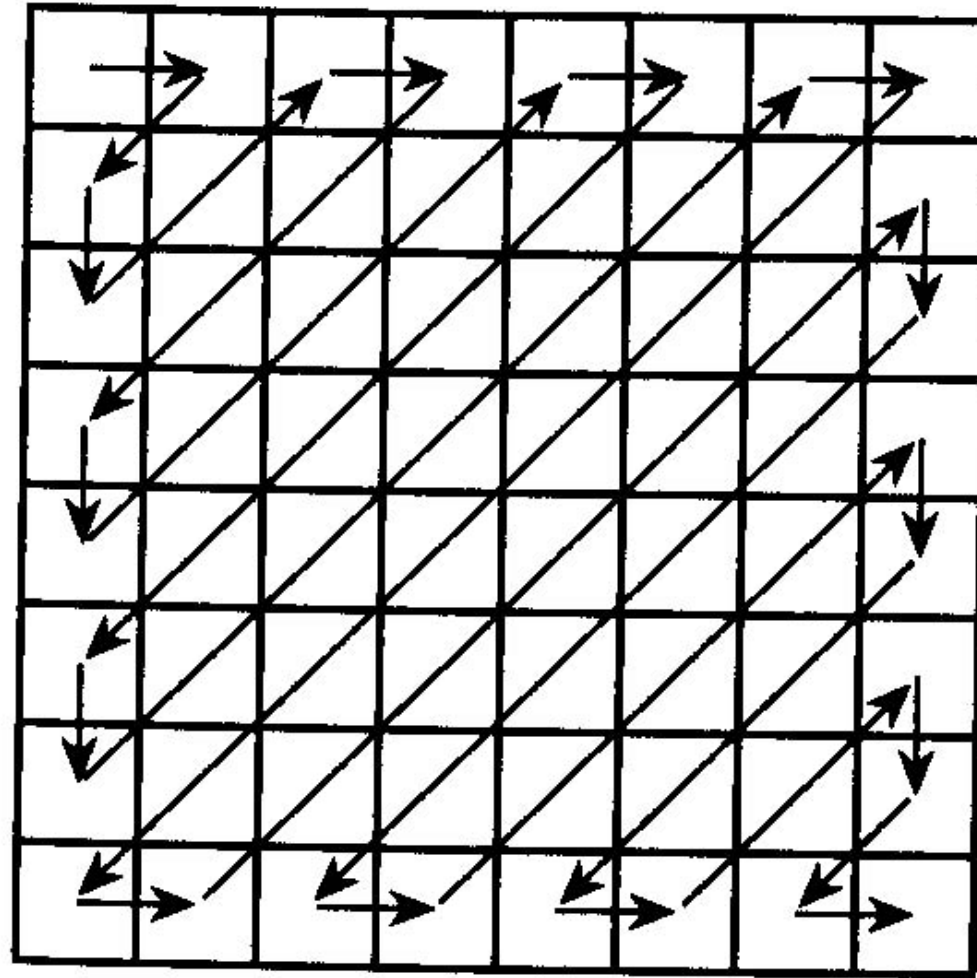


(b) 高い空間周波数 ($= 1/T_S$) の波

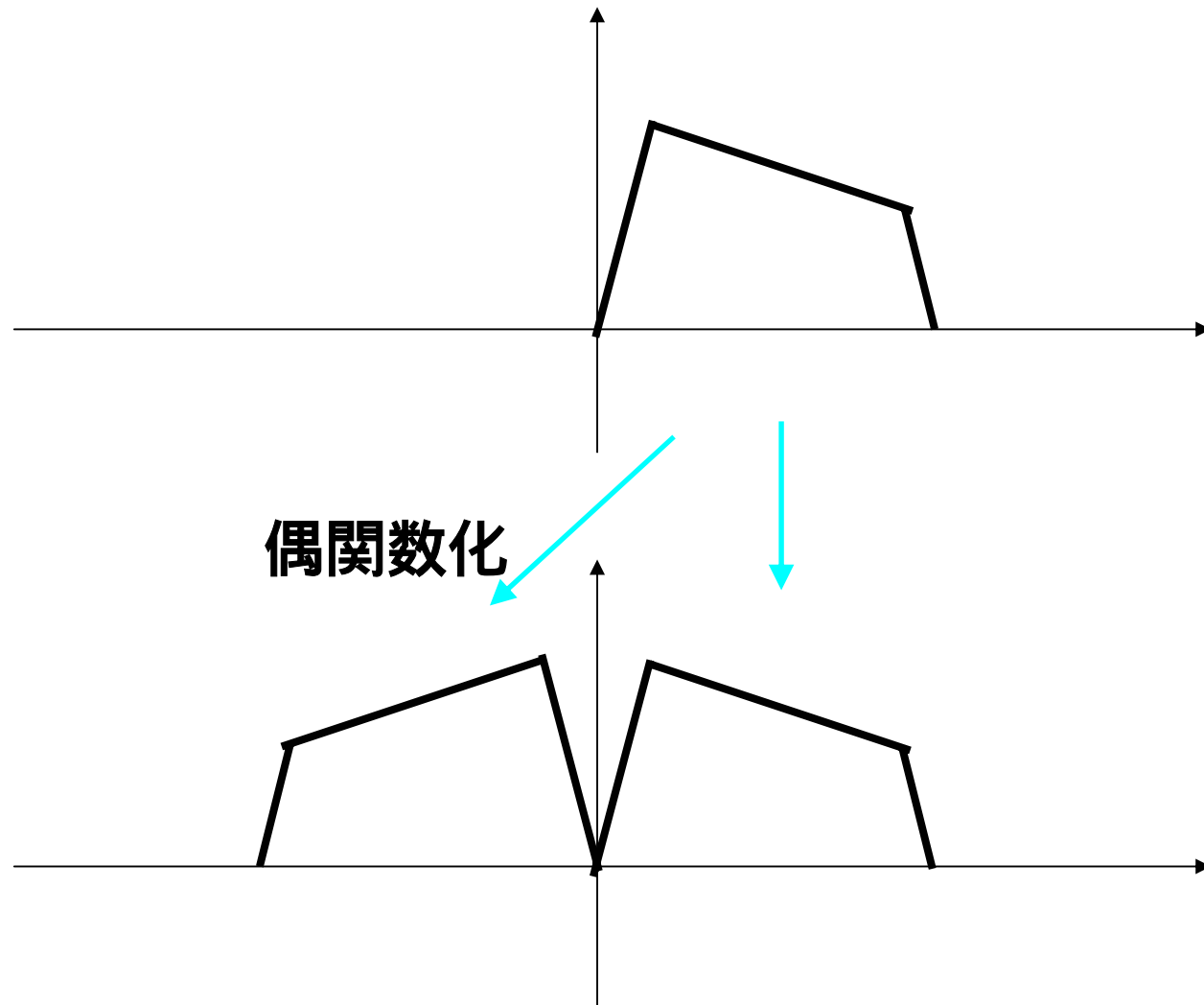
空間波



JPEG圧縮



DCT係数の並べ替え



偶関数化: COS関数のみによる展開・復元が可能となる

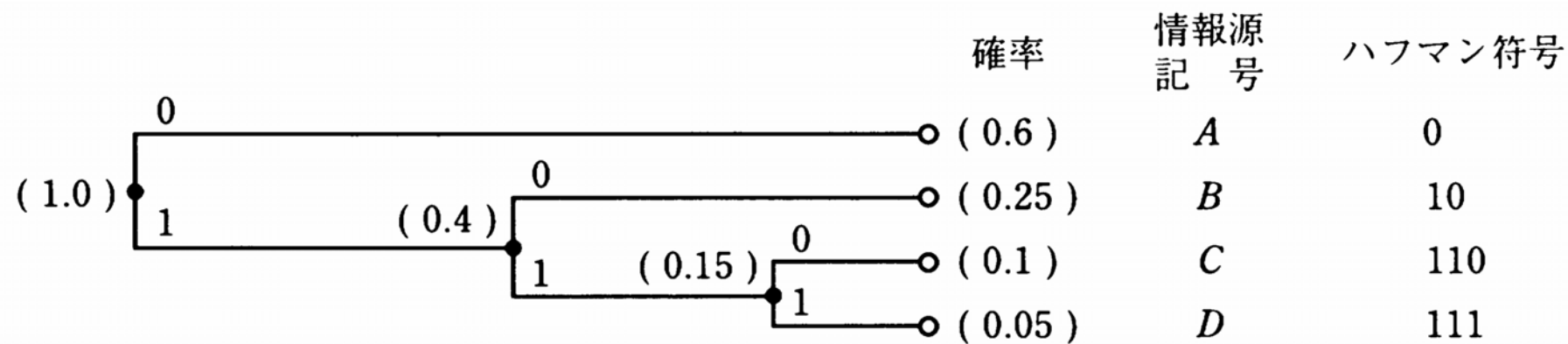


図 4.5 ハフマン符号化

ハフマン符号化

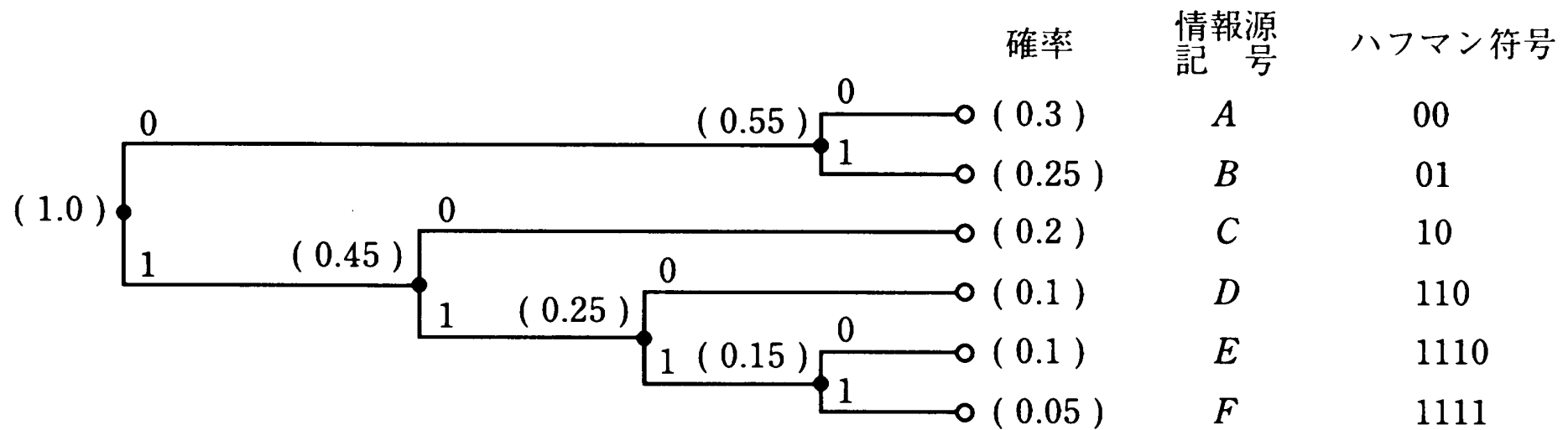
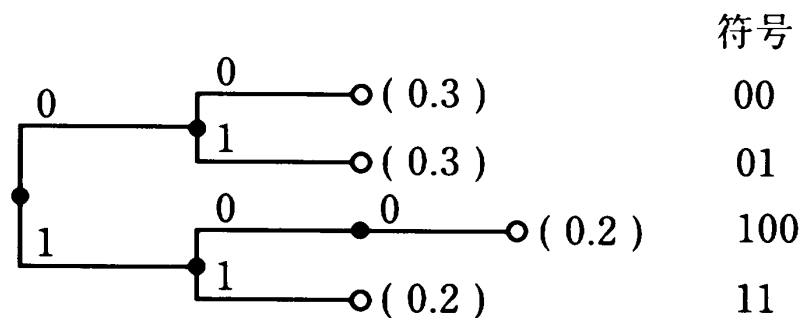
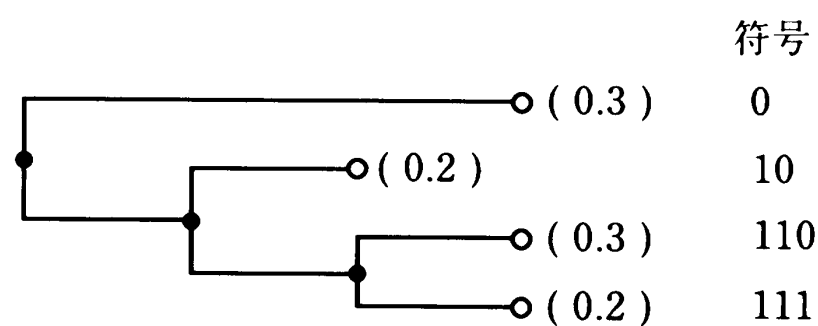


図 4.6 例 4.3 のハフマン符号の構成

ハフマン符号化 2



(a) 分岐していない節点がある。



(b) 根からの距離が短い場所に確率の小さな葉がある。

図 4.8 コンパクトでない符号。

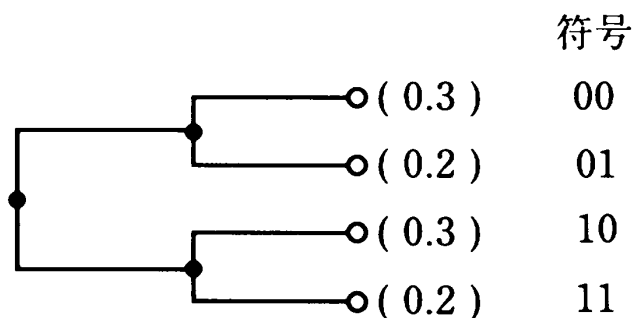


図 4.9 コンパクトであるが、ハフマン符号でない例。

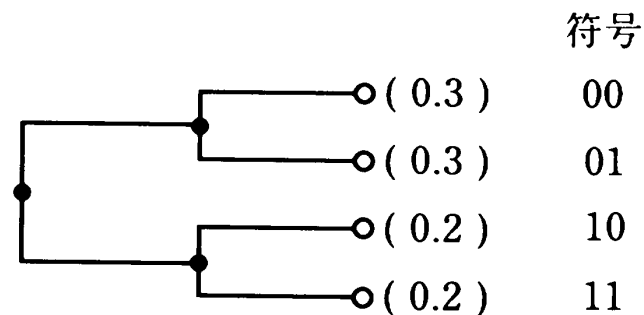


図 4.10 平均符号長が図 4.9 に等しいハフマン符号化。

ハフマン符号化でない例



〈a〉 原画像

原画像



〈b〉 1/25圧縮画像

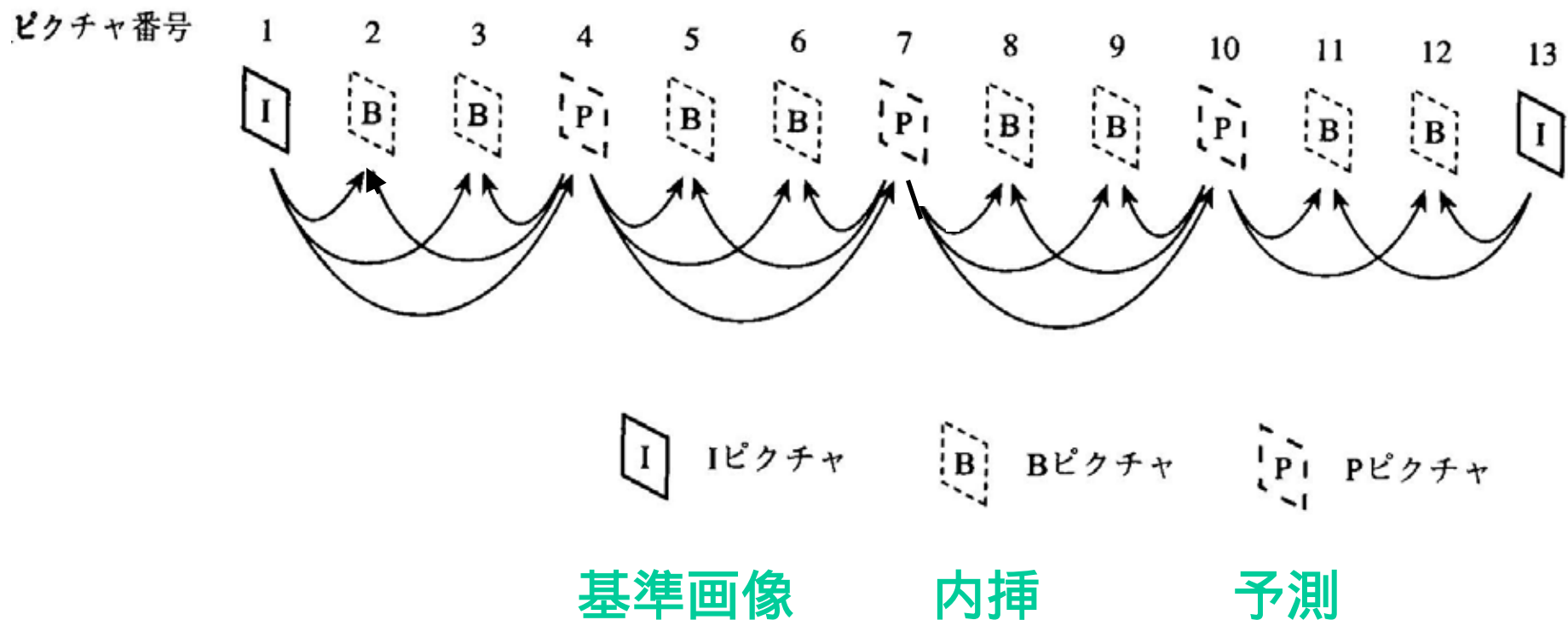
1/25圧縮



〈c〉 1/90圧縮画像

1/90圧縮

JPEGによる圧縮画像



MPEG符号化における I, P, B ピクチャの予測構造

予測がうまくできると, 情報圧縮可能

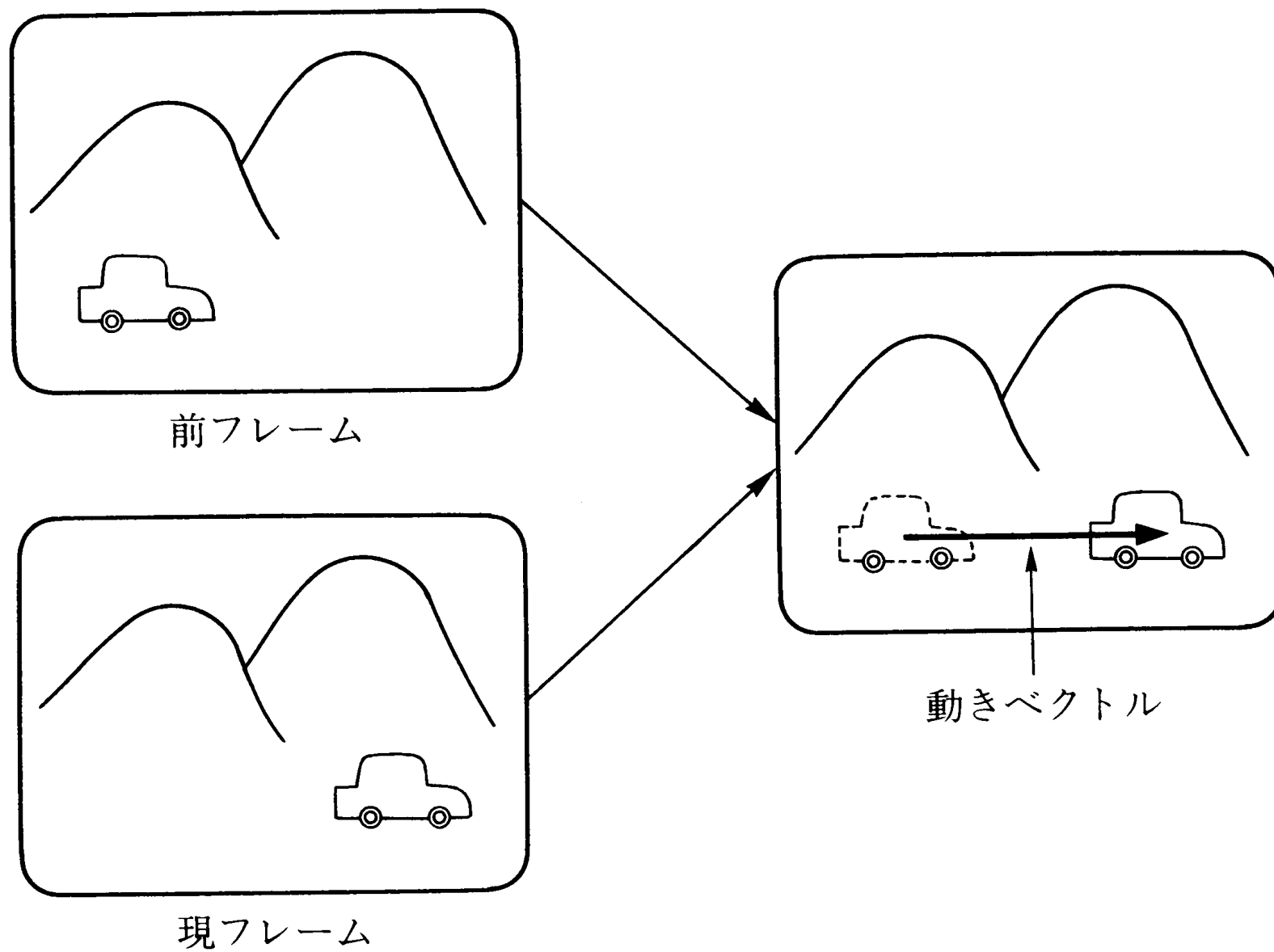
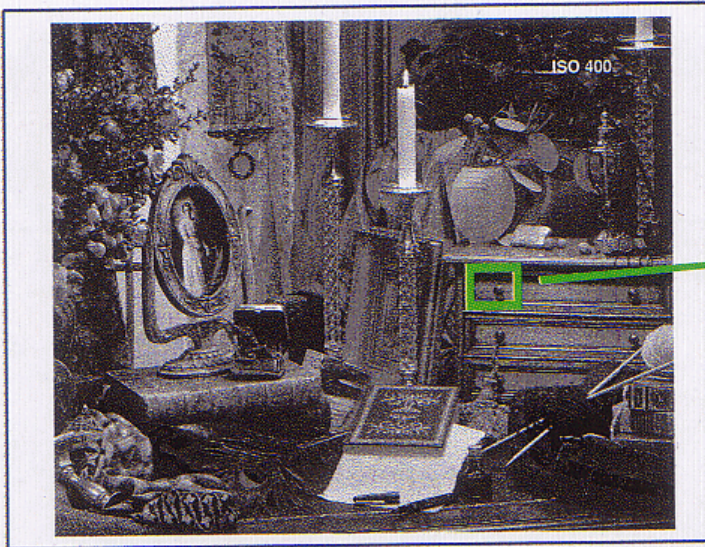
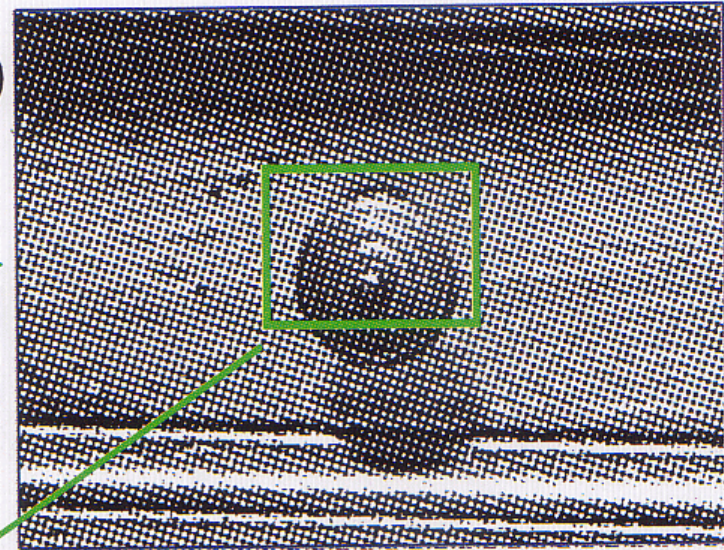


図 7.10 動きベクトルの検出

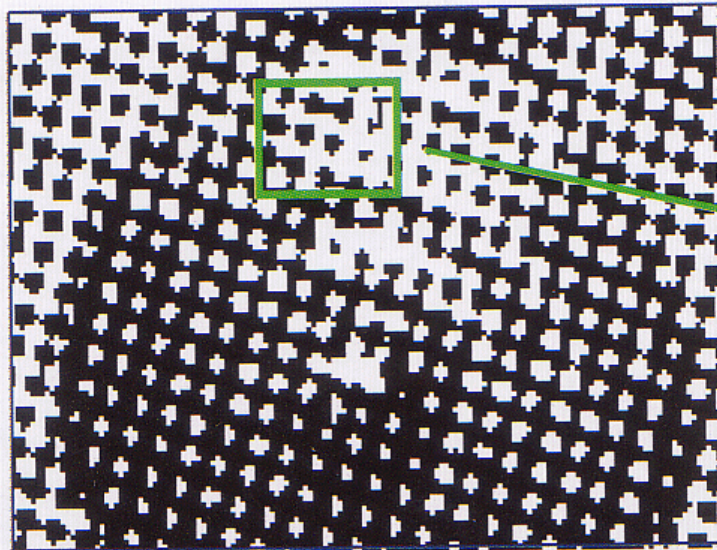
(1)



(2)



(3)



(4)

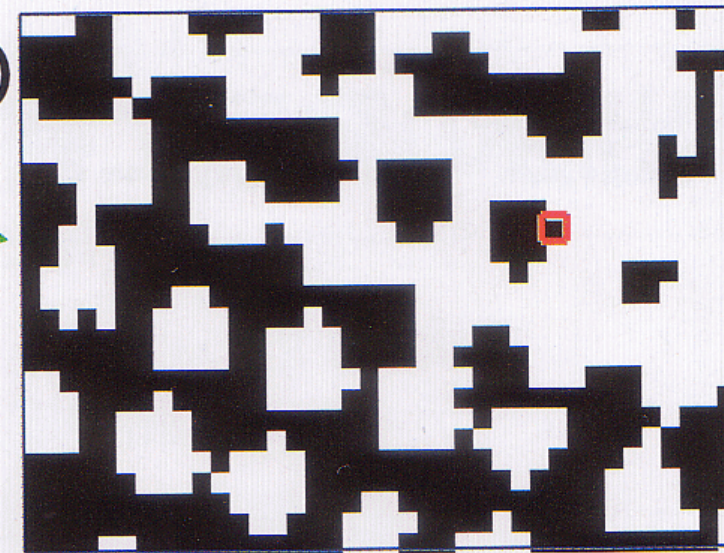
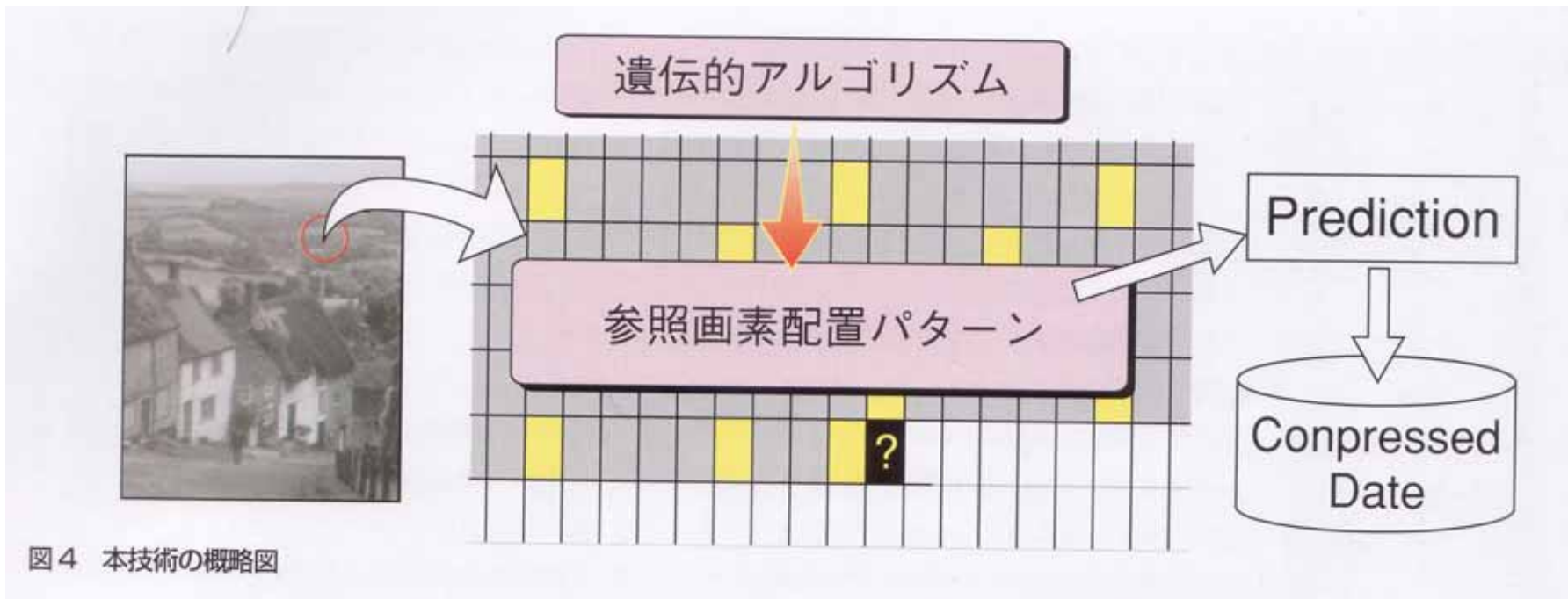


図 2

印刷画像

(赤の画素はどこまで周辺画素から予測可能か)



？の画素はどの画素を基に予測すべきか

それを遺伝的アルゴリズムを用いて求める
うまく予測できれば、それだけデータ圧縮可能



(a) 入力の低解像度の画像 (26×32)



(b) 出力の高解像度の画像 (96×128)



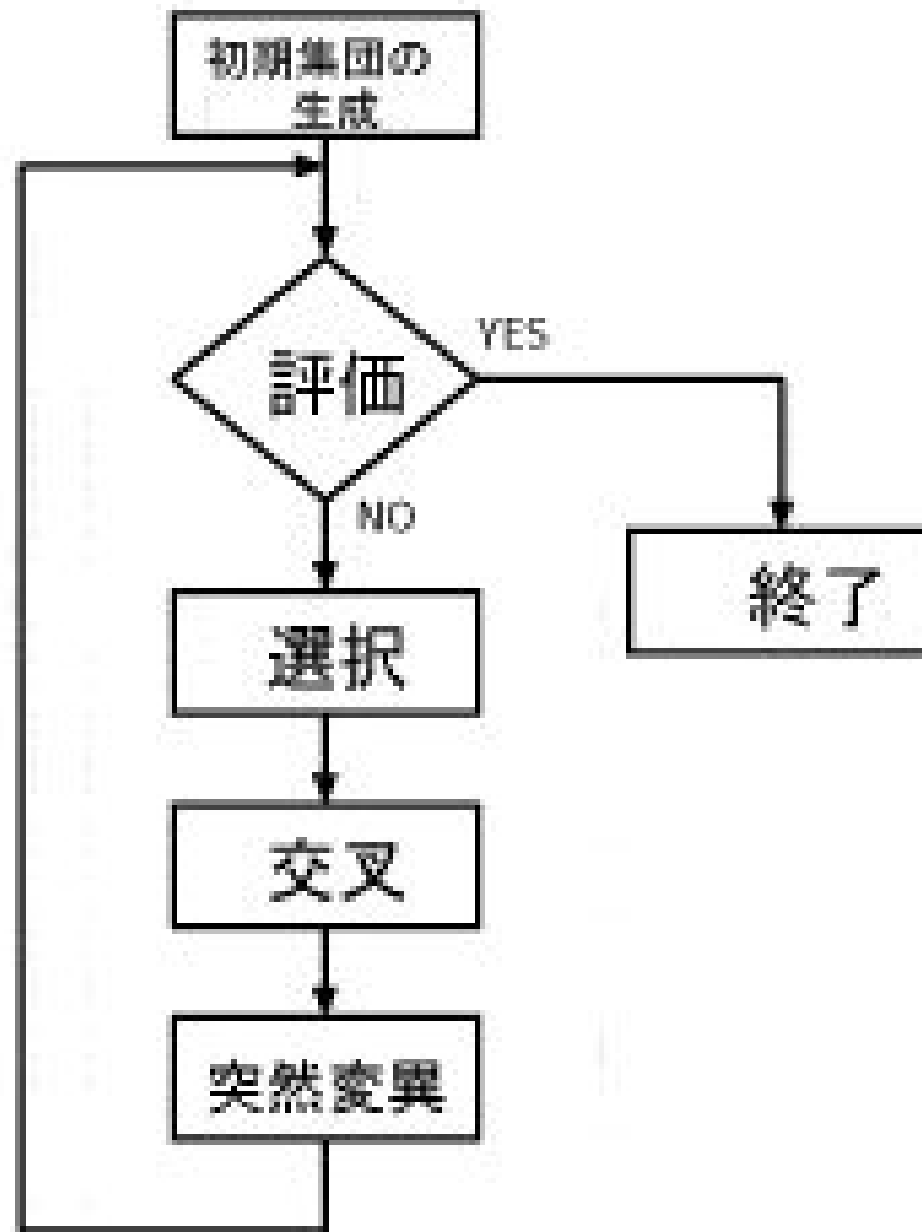
(c) 正解

図-5 画像の統計的性質

低い解像度の画像から高い解像度の画像が作れるか.

統計的性質を利用すれば(a)から(b)を導出可能(超解像の一種)

GAとは



遺伝的アルゴリズムのフローチャート

遺伝子の変化:進化

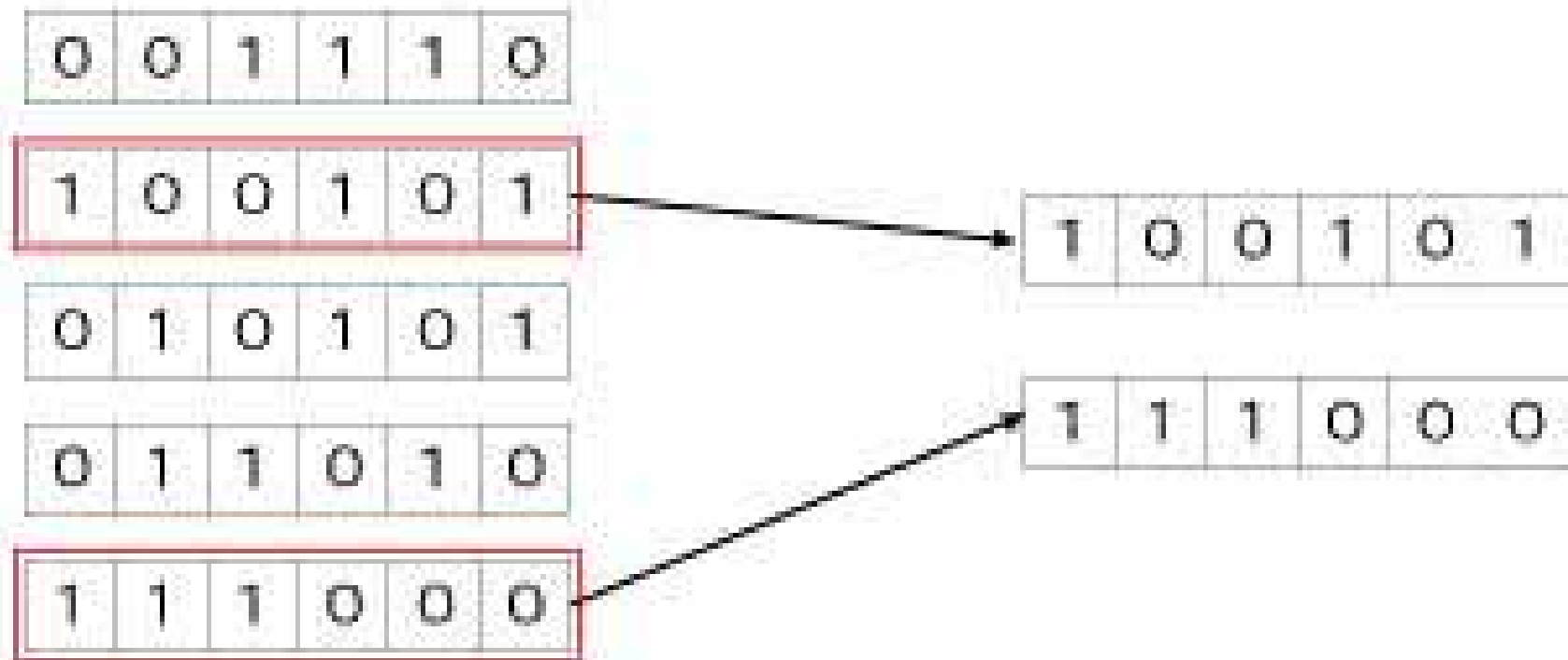


図.4: 選択

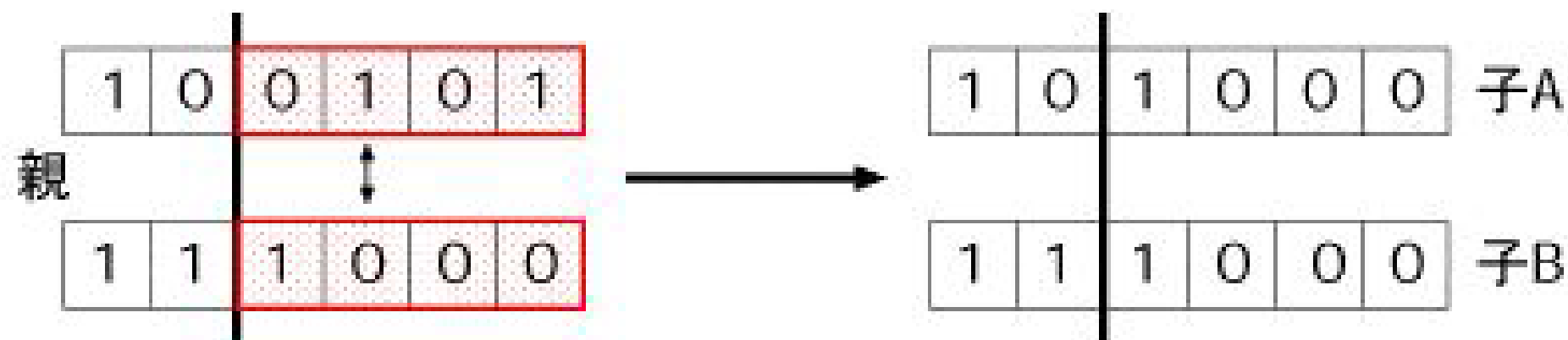


図.5: 1点交叉

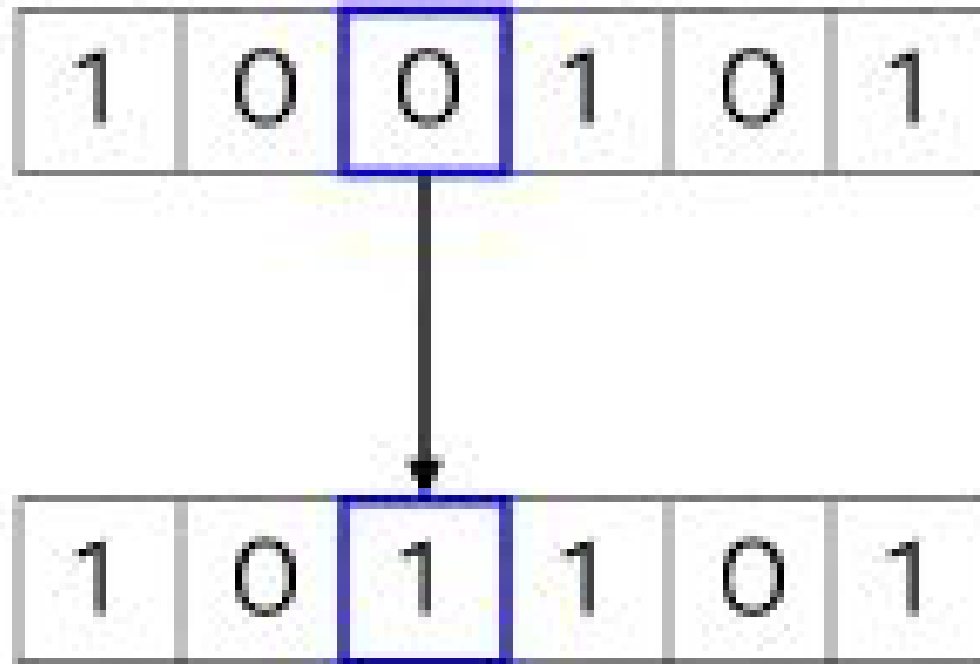


図.7: 突然変異

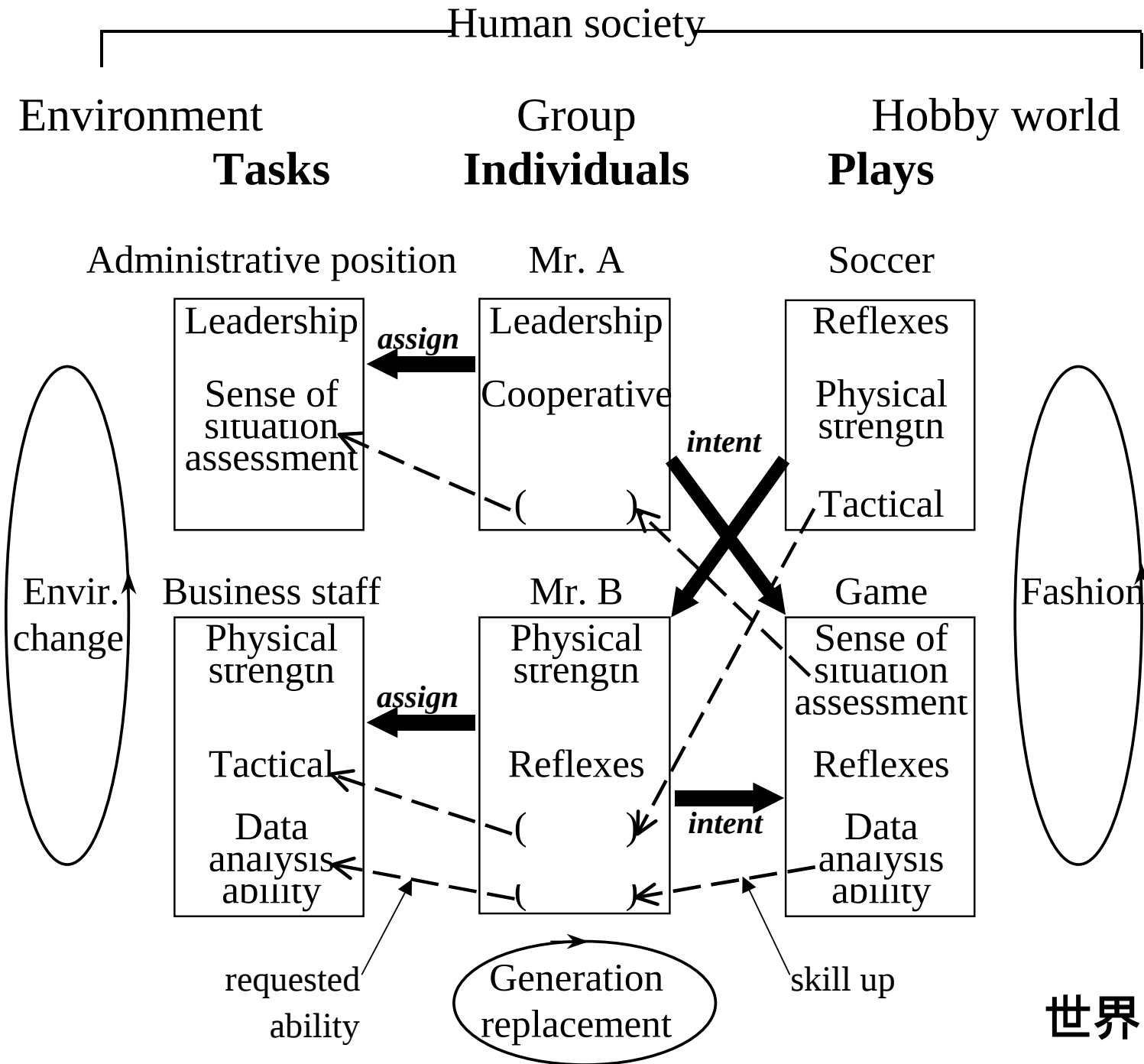
<http://ipr20.cs.ehime-u.ac.jp/column/ga/>

人はなぜ遊ぶか？

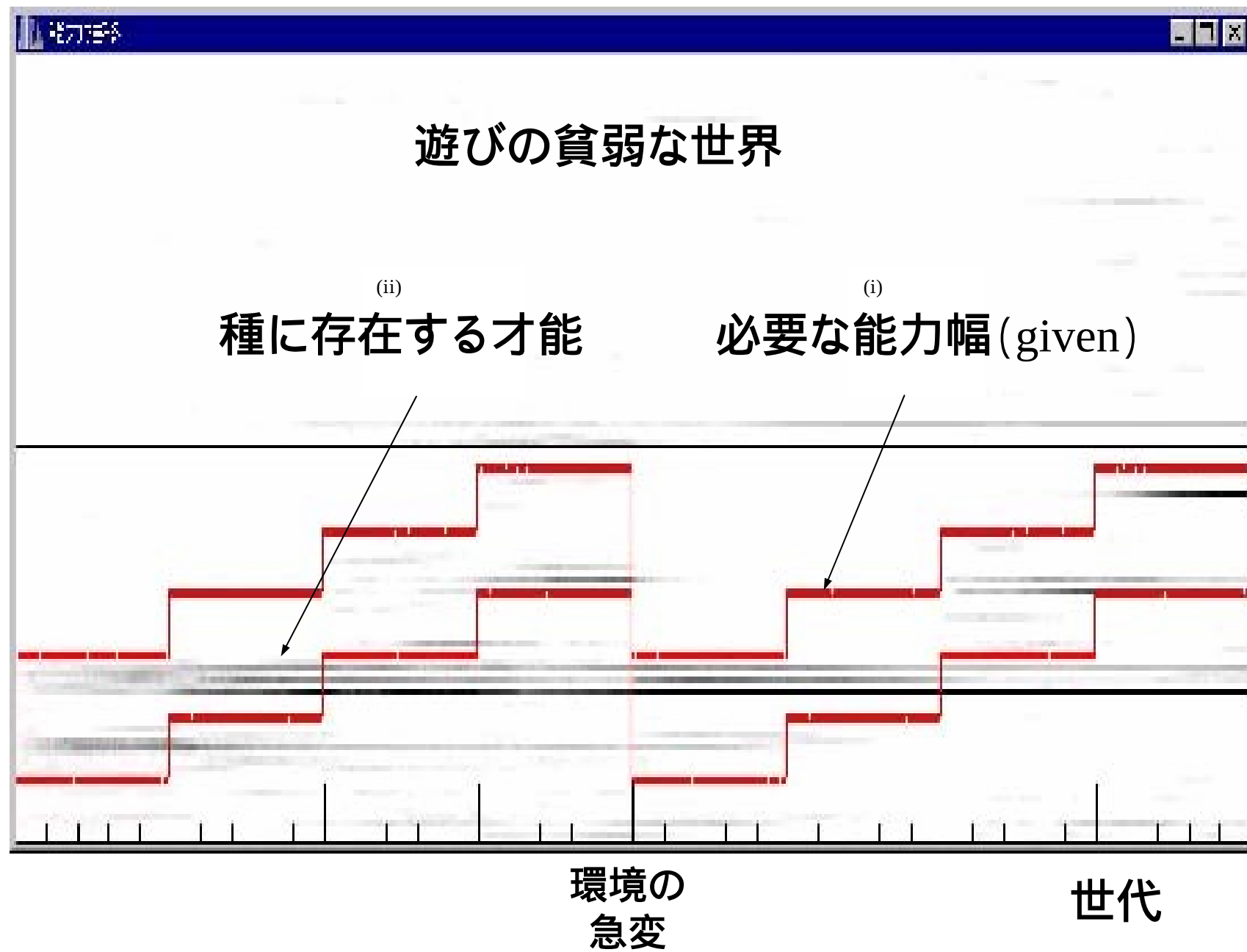
楽しいから
では、なぜ楽しいのか？

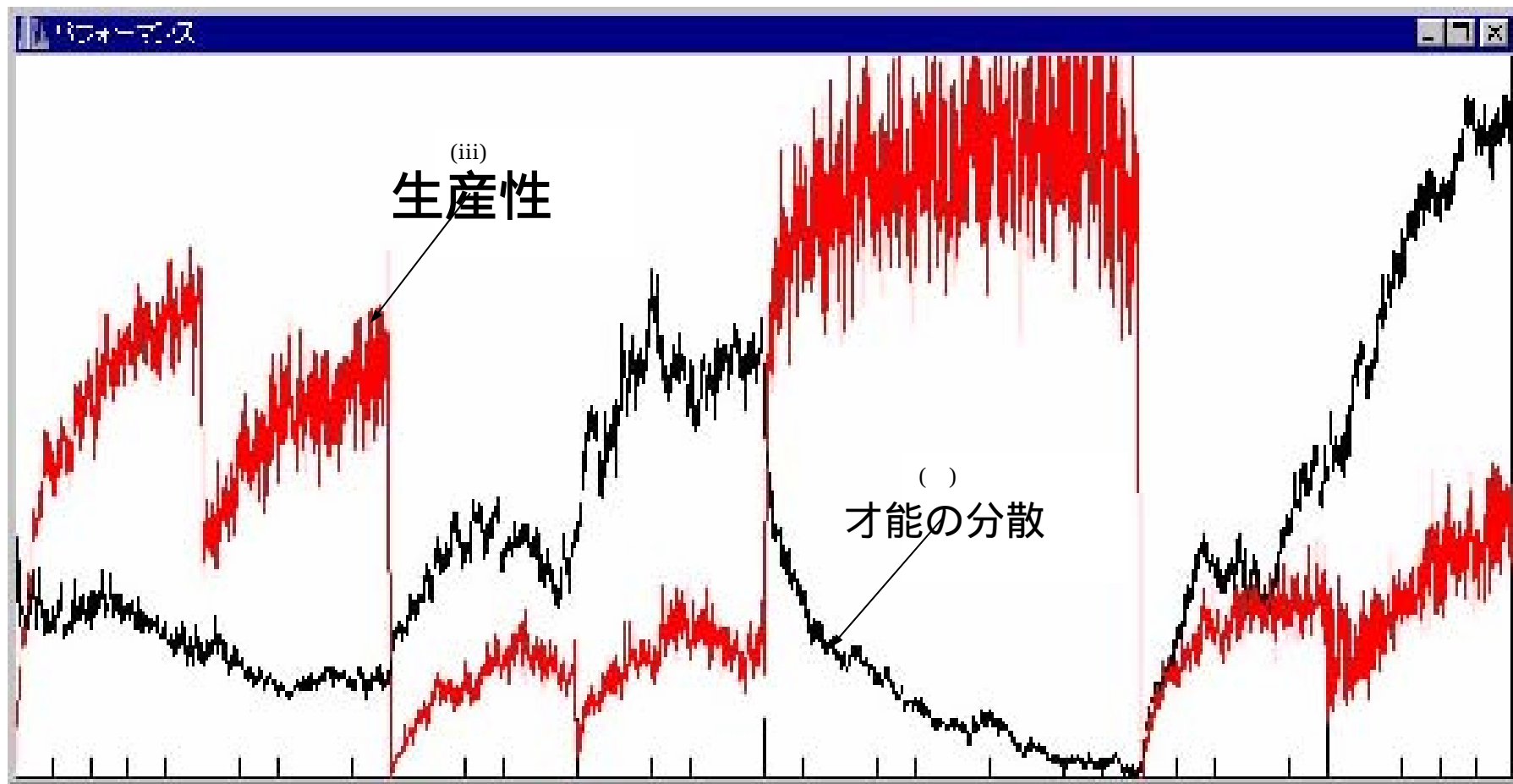
生存に必要なものには快樂がある
では、遊びはなぜ生存に都合がいいのか？

ありは遊ぶか？ 猿は遊ぶ
遊びは高度な知的活動である



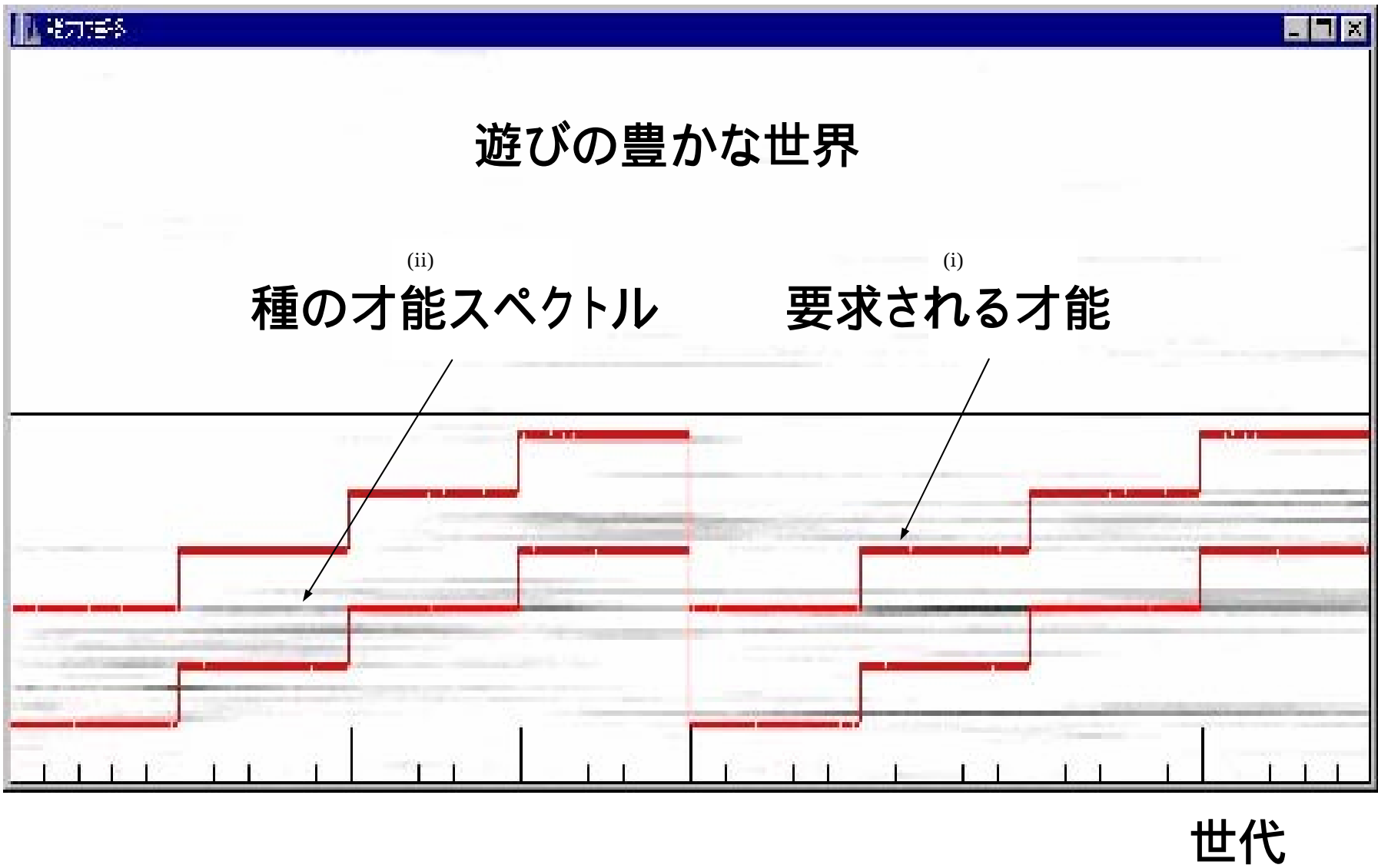
世界モデル

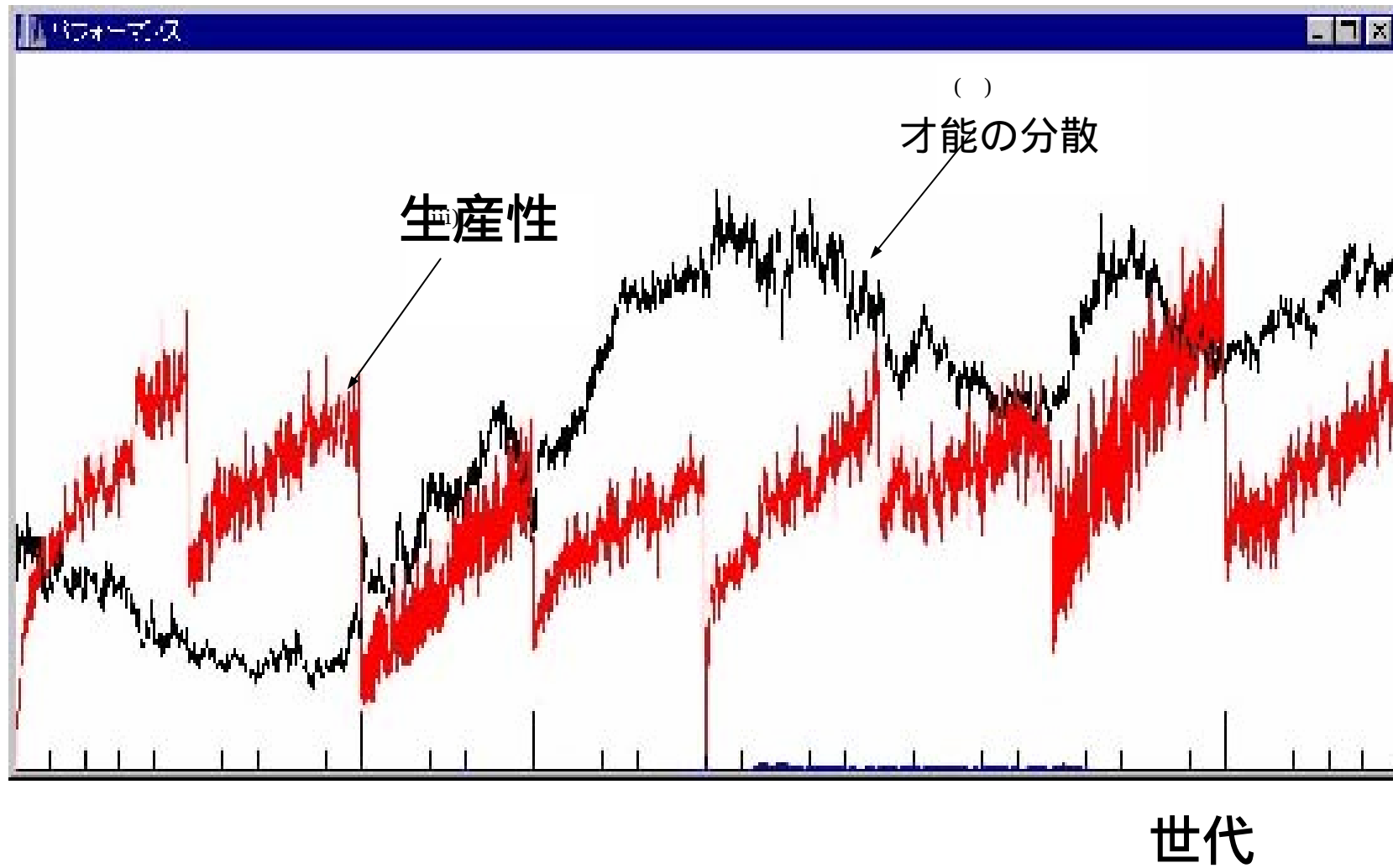




世代

遊びの貧弱な世界
遊び以外の才能に基づく生産性は変動大





遊びの豊かな世界は、環境変化に対して生産性が安定

直交周波数分割多重 OFDM

地上波デジタルテレビ放送

IEEE802.11a , 11g (45M無線LAN等)

ADSL

移動体など過酷な伝送路(マルチパス)に強い

周波数利用効率よい

情報の階層化が容易

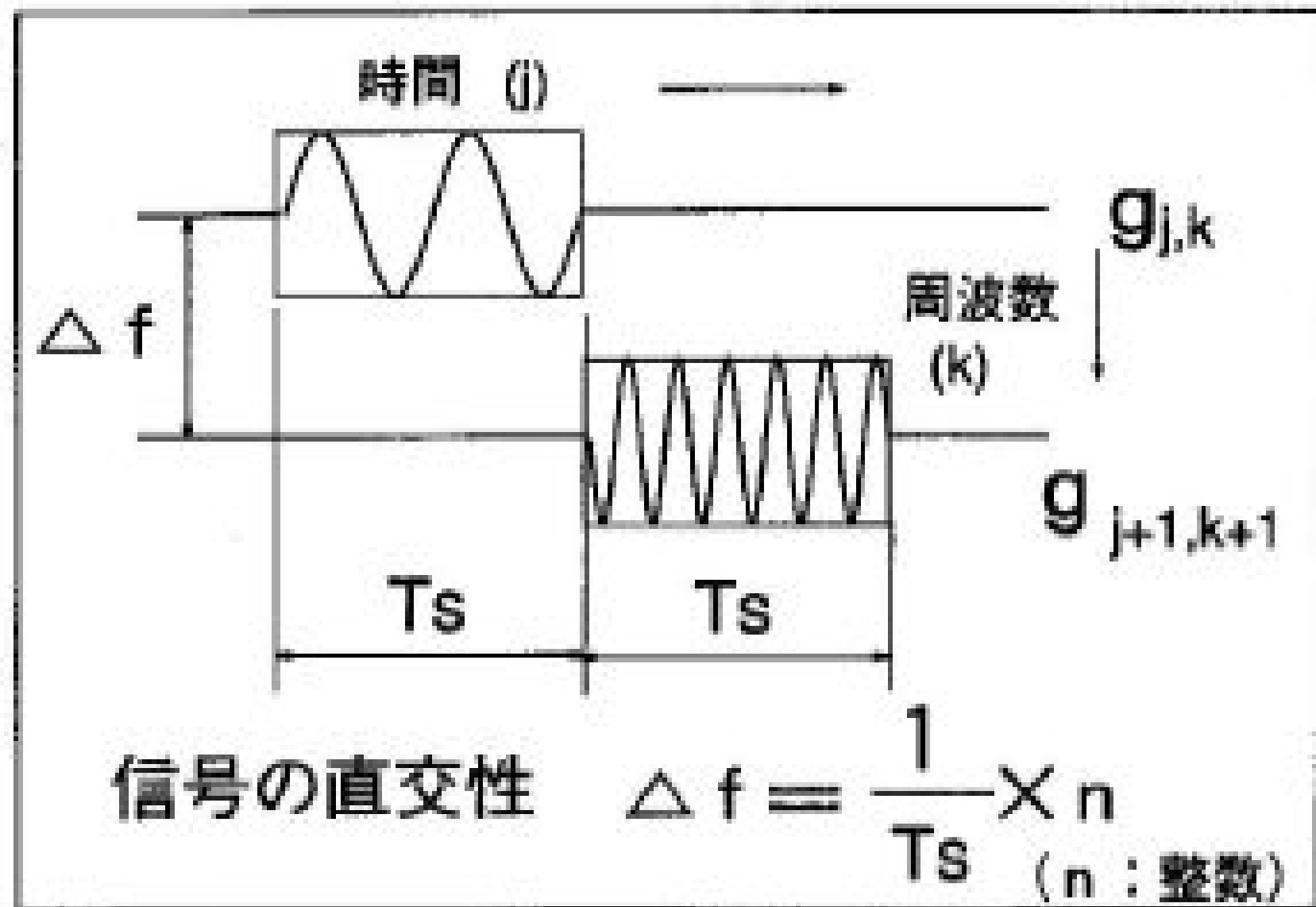


図3 OFDMの原理

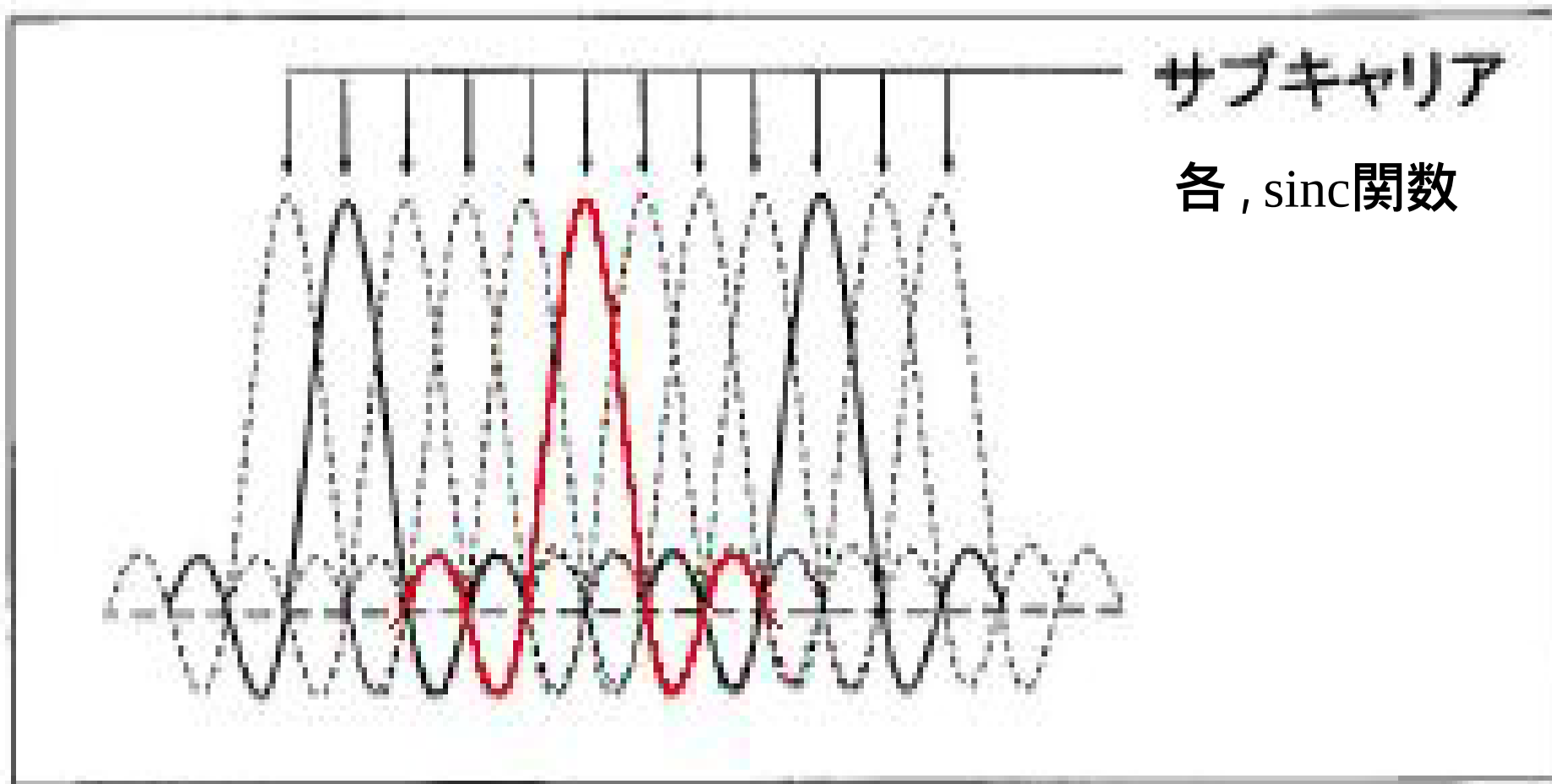


図4 OFDM サブキャリアのスペクトラム

ピーク周波数で, 互いの干渉ない

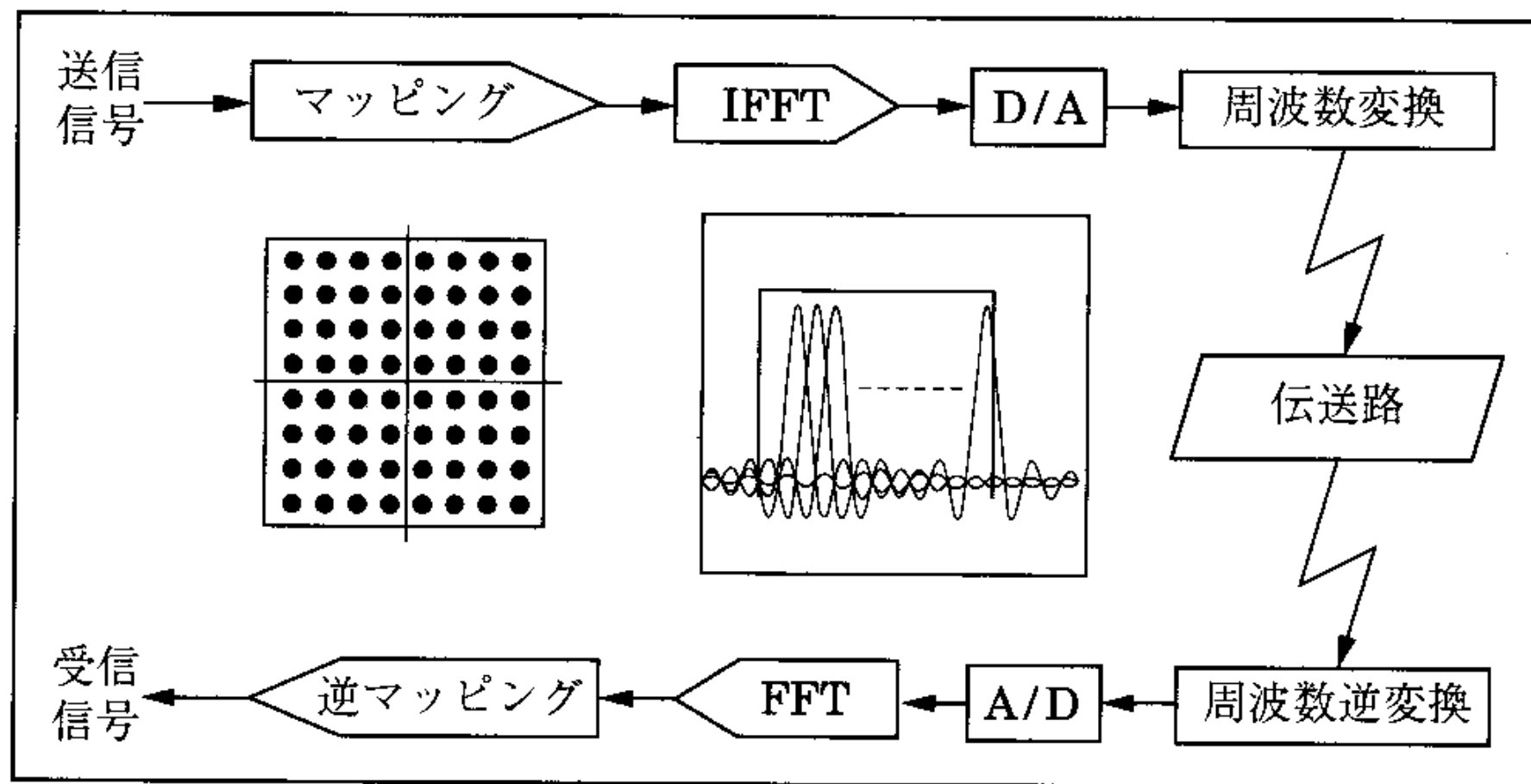
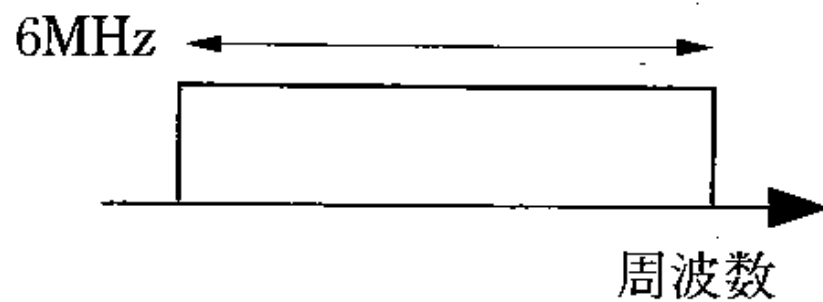
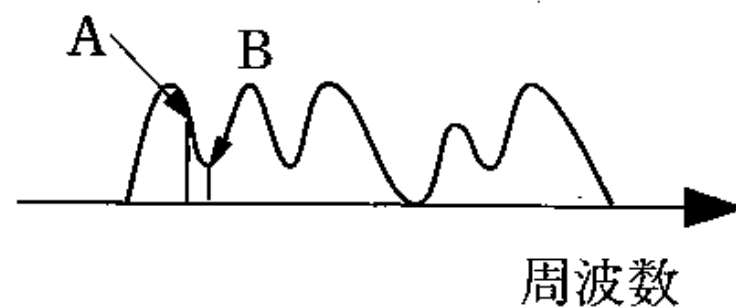


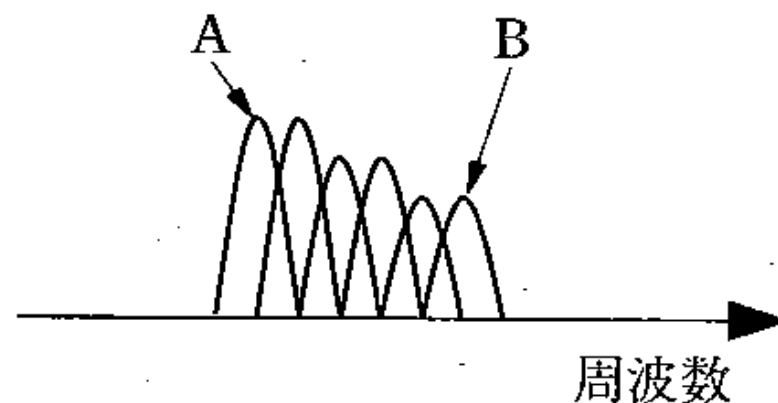
図1 OFDMの原理



(a) 送信スペクトル



(b) 受信スペクトル



(c) AB を拡大して見た受信スペクトル (OFDM の場合)

図2 信号のスペクトル

(b)のように選択的フェーディングがあっても、独立に復調可

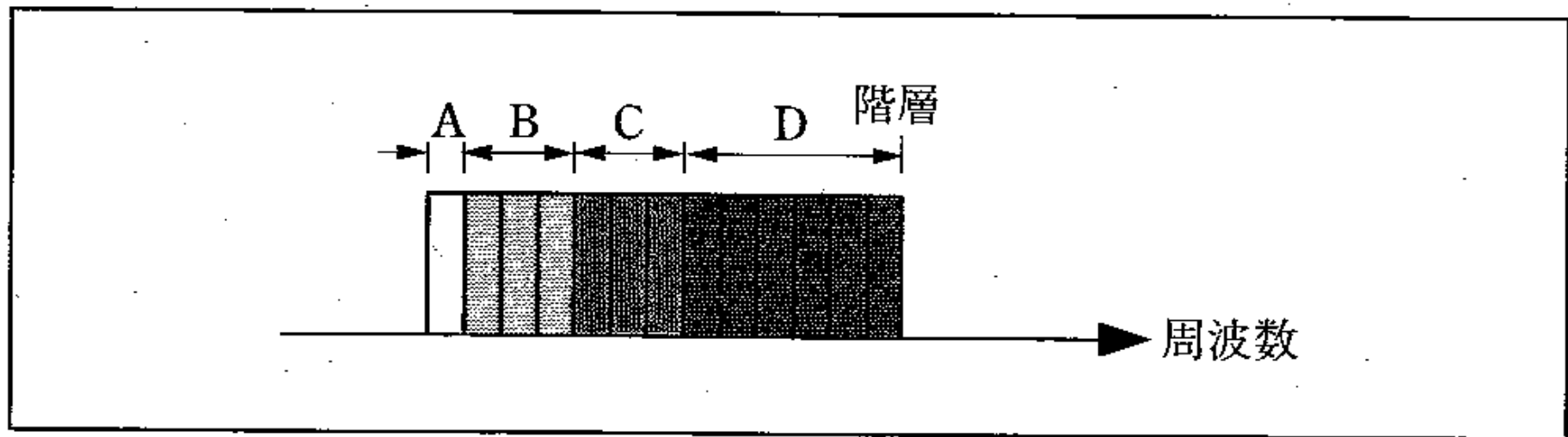
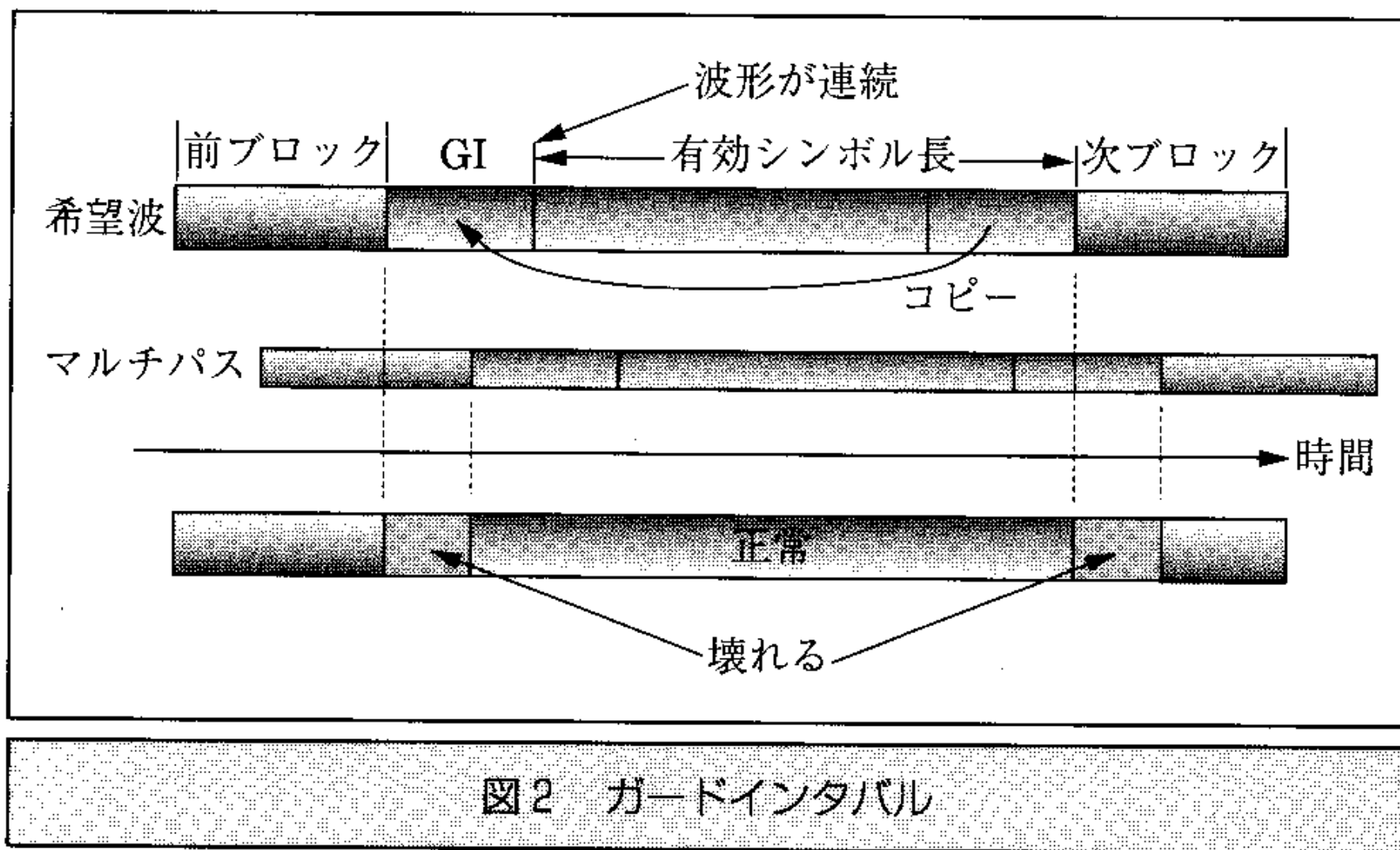


図3 BSTのセグメントと階層化

情報を分割できる



時間空隙を設けることにより、マルチパスに対処

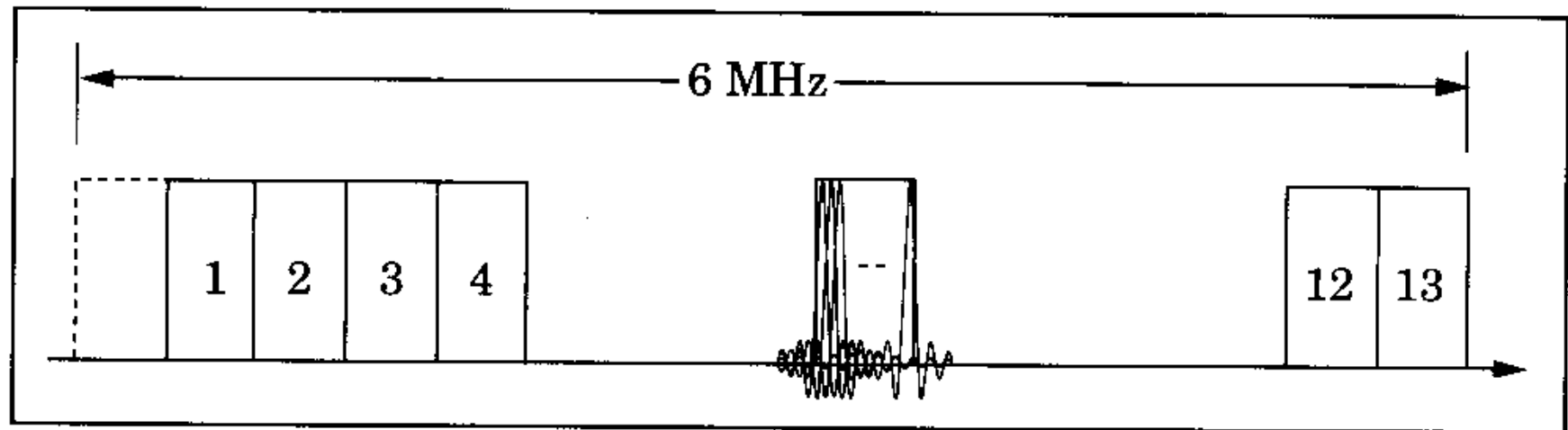


図3 セグメント分割

なお、 S が記憶をもつ場合でも、 $H(S)$ を後の 4.8 節で述べる 1 次エントロピーと呼び換えるだけでまったく同じ定理が成立する。

【例 4.1】 表 4.1 の情報源につき、平均符号長の下限を求めてみよう。情報源のエントロピーは

$$H(S) = -0.6 \log 0.6 - 0.25 \log 0.25 - 0.1 \log 0.1 - 0.05 \log 0.05 \\ = 1.490 \dots \quad (4.18)$$

である。つぎに、式(4.15)に従って記号 A に対する符号長 l_A を求めると

$$-\log 0.6 = 0.737 \leq l_A < -\log 0.6 + 1 = 1.737$$

より、 $l_A = 1$ となる。同様に $l_B = 2$ 、 $l_C = 4$ 、 $l_D = 5$ が導かれる。このとき、平均符号長は 1.75 となり、 C_2 、 C_3 よりも長くなってしまふ。すなわち、式(4.15)をそのまま用いて符号を構成しても、効率の点では必ずしもよいものではない。しかしながら、それから得られた定理の式(4.7)は、拡大情報源を用いたときに平均符号長が情報源エントロピーにいくらでも近い符号が構成できることを示すときに重要な式となる。

では、情報源記号を一つずつ逐次的に符号化する方法で平均符号長を最小にする手法はないのであろうか。それを与えるのが次に述べるハフマン符号化である。

4.6 ハフマン符号化

ある与えられた情報源 S に対し、情報源記号を一つずつ逐次的に一意的復号可能な符号に符号化するとき、平均符号長を最小にする符号をコンパクト符号(compact code)、または最短符号という。また、そのような符号はコンパクトであるという。ハフマンは具体的に最短符号の構成法を示した。これがハフマン(Huffman)符号である。ハフマン符号は符号の木を葉のほうからつくっていくことにより構成される。以下では、2 元の場合についてハフマン符号のつくりかたを述べる。

【2 元ハフマン符号化法の手順】

(1) M 個の情報源記号に対応する葉をつくる。それぞれの葉には生起確率を記しておく。

(2) 確率の最も小さい 2 個の葉をまとめる新しい節点をつくり、その節点と 2 つの葉を枝で結ぶ。2 本の枝の一方には符号アルファベットの記号 0 を、もう一方には 1 を割り当てる。新しい節点には二つの葉の確率の和を記してお

4.6 ハフマン符号化

く。今度はこの節点を一つの葉とみなし、そこから出ていた枝はなくなったと考える。

(3) 葉が 1 枚しか残っていなければ符号構成は完了している。そうでなければ、手順(2)に戻る。

上記手順では、すべての情報源記号は葉に対応づけられる。したがって、このようにしてつくられたハフマン符号は瞬時符号である。なお、確率の 2 番目に小さい葉が二つ以上あると、その選択に任意性が生じる。また、枝への記号の割り当てかたにもどちらの枝を 0 とするかで 2 通りの任意性がある。したがって、前者だけ考えても、得られるハフマン符号は 1 種類とは限らない。しかしながら、いずれの場合でもその平均符号長は同じである。

【例 4.2】 さきの表 4.1 の例の場合を考える。すなわち、情報源アルファベットを $\{A, B, C, D\}$ 、それらの生起確率をそれぞれ 0.6, 0.25, 0.1, 0.05 とする。このとき、図 4.5 のようなハフマン符号が得られる。これは、表 4.1 の C_3 のものであり、その平均符号長は 1.55 である。

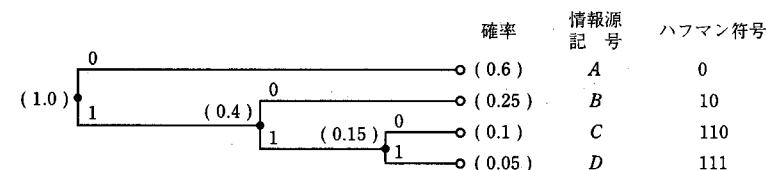


図 4.5 ハフマン符号化

【例 4.3】 情報源アルファベットを $\{A, B, C, D, E, F\}$ 、それらの生起確率をそれぞれ 0.3, 0.25, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05 とする。このとき、図 4.6 のようなハフマン符号が得られる。

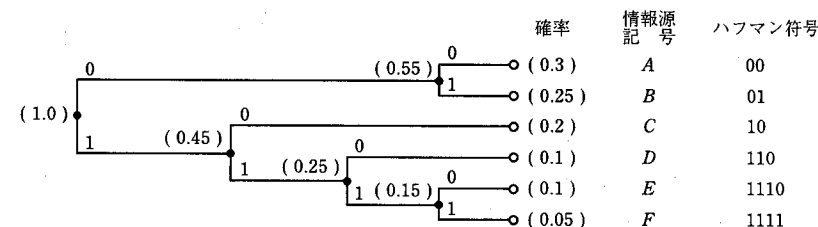


図 4.6 例 4.3 のハフマン符号の構成

課題 1 JPEG 圧縮 (DCT+ハフマン符号化)

0 ~ 5 の画素値をもつ行列表記した 2×2 画像

$$g = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

を考える．この画像を JPEG DCT (Discrete Cosine Transform) 法にならって

$$g = \begin{bmatrix} 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 5 \end{bmatrix} \quad \text{すなわち, } g = [2 \ 4 \ 3 \ 5]$$

のように 1 次元化したのち, 1 次元 Hadamard 関数

$$\begin{aligned} f_0 &= [1 \ 1 \ 1 \ 1] & f_1 &= [1 \ 1 \ -1 \ -1] \\ f_2 &= [1 \ -1 \ -1 \ 1] & f_3 &= [1 \ -1 \ 1 \ -1] \\ c_i &= (1/4) (g, f_i) \quad (,) \text{ は内積} \end{aligned}$$

で展開すると, 展開係数 $c_0 \sim c_3$ が得られる．これらの係数を用いて

$$g = \sum_{i=0}^3 c_i f_i$$

を求めると, もとの g が完全に復元できる．

(1) 展開係数 $c_0 \sim c_3$ を求めよ．また, これらから g が復元できることを確かめよ．

(2) 高い周波数に対応する係数 c_i の確率分布は

c_i	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
確率 $\times(1/42)$	0	0	0	1	10	20	10	1	0	0	0

であったとする．これをハフマン符号化すると, 平均符号長はいくらとなるか．

(3) この問題について論ぜよ．

注：ここで係数は 0.5 刻みとなっている．したがって, 係数は最大 0.25 程度の誤差を含む可能性がある．この 0.25 程度の振幅誤差は $(0.25)^2$ の誤差電力となり, 4 つの係数から由来するものを合わせると最大 $(0.25)^2 \times 4 = 0.25 = (0.5)^2$ の誤差電力となる．これは復元画像上で最大振幅 0.5 程度の誤差である．

なお, 得られた結果は, 原画像の各画素 (0-5) を表現するために必要な 3 bit に比べて小さいことを見る．ただし, 問題の規模が小さいので, 実際の画像で得られる圧縮効果よりも得られる効果はかなり小さい．

7

標本化定理

アナログ信号波をデジタル化するためには、一定の間隔でサンプリング(標本化)し、それらによって得られたアナログ標本値を **A/D 変換** により、デジタル値にすればよい。このとき、どのような間隔で標本化すればよいかを与えるのが標本化定理である。これはもとの信号の最高周波数の2倍の速度で標本化を行えばよい、表現を変えると、信号の最高周波数の1周期間に二つの標本点をとればよいという定理である。これを満たさないときにはスペクトルの折返し歪み(エイリアシング現象)が生じる。

7.1 簡単な例

本論に入る前に簡単な計算で標本化定理をみてみよう。

図7.1に示すように、周波数 f [Hz] をもつ三角関数波 $x(t)$ があり、それを f_s [Hz] の速度で等間隔標本化(サンプリング)することを考える。 $x(t)$ は余弦波

$$x(t) = \cos 2\pi f t \quad (7.1)$$

で与えられるとする。サンプリングパルスは周期をもつので、それは基本波とその整数倍の周波数をもつ高調波に分解できる。その基本波を、

$$g(t) = \cos 2\pi f_s t \quad (7.2)$$

とする。 $x(t)$ をサンプリングするということは、 $x(t)$ とサンプリングパルスを乗算するということである。サンプリングパルスは周波数 f_s [Hz] の基本波とその整数倍の周波数 nf_s [Hz] ($n=2, 3, \dots$) の高調波に分解できるが、基本波

7.1 簡単な例

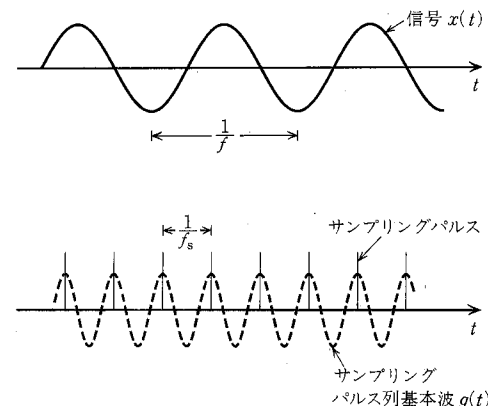


図 7.1 三角関数波の標本化

に関していえばサンプリングにより、

$$\begin{aligned} x(t)g(t) &= \cos 2\pi f t \cos 2\pi f_s t \\ &= \frac{\cos 2\pi (f_s + f) t + \cos 2\pi (f_s - f) t}{2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

なる成分が生ずる。この式は、一般にサンプリングなどの乗算や非線形特性により二つの波の和と差の周波数成分が出現することを示している。式(7.3)の分子の第1項は高い周波数であるから問題はないが、問題は第2項である。 $f_s - f$ なる周波数は小さな値となるが、これがもとの信号付近にあれば原信号と区別がつかなくなってくる。したがって少なくとも、

$$f_s - f > f$$

すなわち、

$$f_s > 2f \quad (7.4)$$

であることが必要である。サンプリングパルスの高調波に関しては周波数が高いので、このような干渉の問題は起こらない。結局、式(7.4)、すなわち、「サンプリング周波数は原信号の最高周波数の2倍以上必要である」ことがわかる。これが標本化定理の主要な結論である。

実際にこれを満たさないことによる影響を二、三みてみよう。図7.2は、二つの縞の周波数が近いことによるモアレ縞であるが、これは一方を信号とし、もう一方をサンプリングパルスとみれば上記の議論にあてはまる。両者を重ねて置いただけであるが、サンプリングのような乗算的操作が行われた結果、低

周波成分がモアレ縞として出現しているのである。以下にくわしい標本化定理の導出を示そう。



図 7.2 モアレ縞。二つのパターンの相互作用によるエイリアシングの一種。二つのパターンの周波数が近い場合信号と区別できない干渉縞が現われている。

7.2 フーリエ級数

一般に T を周期とする偶関数 $x(t)$ は、

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T}, \quad (7.5)$$

また $x(t)$ が T を周期とする奇関数であれば、

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \quad (7.6)$$

のように級数展開できる。 $x(t)$ が偶関数の場合、奇関数の場合、およびそれ以外の場合を含めてもっと一般に $x(t)$ は、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \beta_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (\text{フーリエ級数}) \quad (7.7)$$

のように級数展開できる。この式(7.7)はフーリエ級数(Fourier series)と呼ばれる。これは直交関数による $x(t)$ の級数展開の一種である。ここに、 a_k および β_k はその展開係数であり、次式で与えられる：

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (7.8)$$

$$\beta_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (k=1, 2, \dots) \quad (7.9)$$

これらは、 $\sin$ 関数および $\cos$ 関数の直交性

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi mt}{T} \cdot \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \begin{cases} 1 & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi mt}{T} \cdot \sin \frac{2\pi nt}{T} dt = \begin{cases} 1 & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi mt}{T} \cdot \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = 0 \quad (7.12)$$

から得られる。式(7.8), および式(7.9)の a_k , β_k はフーリエ係数 (Fourier coefficient) と呼ばれる。

【例 7.1】 図 7.3 は区間 $[-T/2, T/2]$ † において定義された矩形波 $x(t)$ のフーリエ級数展開の結果を表わしている。区間 $[-T/2, T/2]$ において、 $x(t)$ は次式で与えられたとする：

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (-T/4 \leq t < T/4) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (7.13)$$

全区間においては $x(t)$ は周期 T をもつ周期関数となっているが、その一周期に対応する一つの区間だけに注目している場合には周期性は関係がない。いま、 $x(t)$ を区間 $[-T/2, T/2]$ においてフーリエ級数で表わすとき、その展開係数は以下のように与えられる：

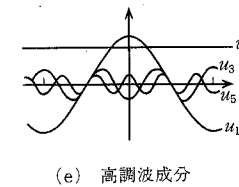
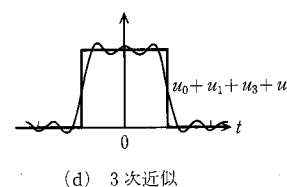
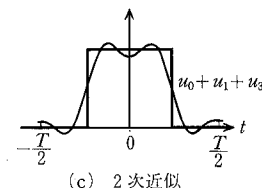
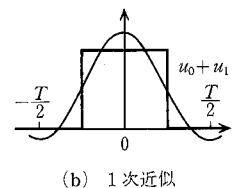
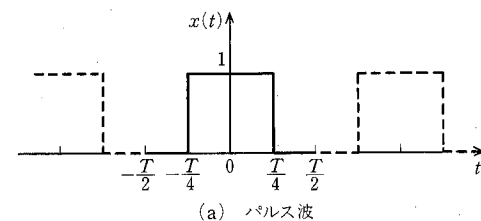


図 7.3 パルス波の正弦波による合成

† $[a, b]$ は下限 a を含み、上限 b を含まない区間を表わす。